La serie que define la función ζ no converge para $\Re(s) < 1$. Si pensamos en los reales en dicha región, esto es, $s \in (-\infty, 1)$, parece que no hay otra posibilidad que asignarles el valor infinito. Sin embargo, hay una manera de extender ζ a todo el plano complejo con un único polo en $s = 1$ y esa manera es única si queremos preservar buenas propiedades de variable compleja (la holomorfía fuera de $s = 1$). Por poner una analogía, si definimos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ parece que deberíamos asignar $f(2) = \infty$, pero utilizando series geométricas sabemos que $f(z) = 1/(1 - z)$ en el círculo de convergencia $|z| < 1$ y el segundo miembro tiene perfecto sentido fuera de él. La extensión $1/(1 - z)$ es la única meromorfa (por el principio de unicidad en variable compleja) y nos dice que debiéramos definir $f(2) = -1$.

Curiosamente, la información sobre las propiedades finas de la distribución de los primos radica en la región $\Re(s) \le 1$, especialmente en $\frac{1}{2} \le \Re(s) \le 1$, es decir, en la parte que no vemos con la serie de la definición original de la función ζ. Toda esta hoja estará dedicada a obtener la extensión anunciada. En relación con esto, probaremos una sorprendente simetría que tiene interés independiente.

1) Demuestra para $\Re(s) > 1$ las igualdades

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\, dx = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s \int_1^{\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor - 1/2}{x^{s+1}}\, dx$$

donde $\lfloor x \rfloor$ significa la parte entera. La segunda debería resultarte fácil, la primera no tanto.

2) Explica por qué la última integral converge para $\Re(s) > 0$. Deduce que ζ se puede extender a una función meromorfa en esa región con un único polo en $s = 1$ que es simple y con residuo igual a 1.

Recuerda que por el llamado "principio de unicidad" [9, Ch. 2, §4], a lo más hay una posible extensión meromorfa a una región dada. Nadie puede venir con otra fórmula ingeniosa y obtener una extensión a $\Re(s) > 0$ que difiera de la obtenida.

En cierto modo, integrando por partes en la fórmula anterior se obtienen extensiones sucesivas a $\Re(s) > -1$, $\Re(s) > -2$, etc. y en el límite se sigue la extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$. Esta manera de proceder, no será tan relevante para nosotros porque obtendremos la extensión de otra forma. De todos modos, si quieres leer sobre ello, mira cómo se utiliza la fórmula de sumación de Euler-Mclaurin con este propósito en [5, Th. 1.2].

Casi todo el resto de la hoja está dedicada a una fórmula que relaciona $\zeta(s)$ y $\zeta(1 - s)$, lo cual en particular, permitirá la extensión meromorfa a $\mathbb{C}$, porque podremos pasar la región $\Re(s) > 0$, en la que ya sabemos que ζ es meromorfa a la región $\Re(s) < 1$. Esta relación la obtuvo Riemann en su famosa memoria sobre los números primos [3], aunque hay algún antecedente en el trabajo de Euler. Para enunciar y demostrarla, es necesario conocer antes una función clásica de variable compleja. Aunque la hayas visto, refleja el contenido de los ejercicios en tu trabajo.

Definimos la *función* Γ en $\Re(s) > 0$ mediante la integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx.$$

Debería estar claro que la integral converge en la región indicada.

3) Integrando por partes, deduce que se cumple $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ y explica por qué esto permite deducir que Γ tiene una extensión meromorfa a $\{\Re(s) > -1\}$ con un único polo en $s = 0$ con residuo igual a 1. Repitiendo esta idea, prueba que Γ admite una extensión meromorfa a $\mathbb{C}$ tal que los polos están en $\mathbb{Z}_{\le 0}$ y todos ellos son simples.

4) Comprueba que la función Γ generaliza el factorial en el sentido de que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. De hecho, históricamente, Γ surgió interpolando factoriales [2]. Justifica la igualdad $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Una propiedad digna de mención es que Γ no se anula y, por tanto, $1/\Gamma$ es entera[1]. Demostraremos la no anulación por medio de la fórmula

$$\Gamma(s) \int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s}\, dx = \Gamma(s-w)\Gamma(w) \tag{1}$$

Aquí se entiende que $\Re(w) > 0$ y $\Re(w-s) < 0$ para asegurar la convergencia de la integral.

5) Escribe el primer miembro como $\int_0^\infty \int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s} y^{s-1} e^{-y}\, dxdy$ y efectuando un cambio de variable $x = u/v$, $y = u+v$, muestra cómo obtener el segundo término, completando así la prueba de (1).

6) Si $\Gamma(s) = 0$ con $\Re(s) > 0$. Explica por qué (1) con $w = 1/n$ y n arbitrariamente grande, lleva a una contradicción. Concluye que $1/\Gamma$ define una función entera en $\mathbb{C}$ cuyos ceros están en $\mathbb{Z}_{\le 0}$.

Esta introducción a la función Γ son los prolegómenos de la prueba que la simetría de la función ζ que comenzamos ahora. Dicha simetría provendrá de la igualdad:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} \qquad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2}$$

Es muy posible que hayas visto esta identidad en algún curso de ecuaciones o análisis, por ejemplo, en relación con la ecuación del calor. Sea o no el caso, te propongo que escribas una prueba siguiendo las líneas esbozadas en el próximo ejercicio.

[1] Al hilo de esto, hay resultados que permiten "factorizar" las funciones enteras que no crecen demasiado [8, Ch. 15] y concluir una fórmula para Γ como un producto infinito.

7) Sea $F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(m+x)^2 t}$. Como es 1-periódica y regular, coincide con su desarrollo de Fourier:

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x} \qquad \text{con} \quad a_n = \int_{-1/2}^{1/2} F(x) e^{-2\pi i n x}\, dx.$$

Demuestra que se tiene $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2 - 2\pi i n x}\, dx$ y deduce (2) calculando $F(0)$. Indicación: Para completar este esquema, necesitarás saber $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi i x y}\, dx = e^{-\pi y^2}$. Si esta integral no te suena, mira o cita [6, Ex. 10.9] o [7].

Ahora estamos preparados para probar la simetría de ζ siguiendo el esquema original de Riemann en su famosa memoria [1, §8], [3].

8) Considera la función $\omega : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *de decaimiento rápido*[2] $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$. Muestra que satisface

$$\omega(x^{-1}) = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\,\omega(x) \qquad \text{para cualquier } x > 0.$$

9) Sea $\xi(s) = s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Utilizando las definiciones originales de ζ y de Γ, como serie e integral, demuestra para $\Re(s) > 1$

$$\xi(s) = s(1-s) \int_0^{\infty} x^{s/2-1}\omega(x)\, dx.$$

Efectuando el cambio $x \mapsto 1/x$ en el intervalo $(0,1]$ del rango de integración, deduce también

$$\xi(s) = -1 + s(1-s) \int_1^{\infty} \big(x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1}\big)\omega(x)\, dx.$$

10) A partir de la expresión anterior, demuestra los siguientes puntos:

1. $\xi(s)$ se extiende a una función entera.
2. $\zeta(s) - 1/(s-1)$ se extiende a una función entera.
3. Se cumple $\xi(s) = \xi(1-s)$ para todo $s \in \mathbb{C}$.

El último punto es la simetría que buscábamos, lo que se llama *la ecuación funcional* por antonomasia que permite relacionar $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$. El factor $s(1-s)$ es irrelevante porque es invariante bajo $s \mapsto 1-s$, solo se introduce para tener una función entera. Por ello, la ecuación funcional se suele presentar en la forma:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s).$$

[2] Se dice que una función es de decaimiento rápido si es C^∞ y ella y sus derivadas de cualquier orden tienden a cero cuando $x \to \infty$ al multiplicar por x^N, sea cual sea N.

Por cierto, mira [10, Ch. II] si quieres ver otras pruebas de esta identidad.

11) Calcula $\zeta(0)$, $\zeta(-1)$, $\zeta(-2)$ y $\zeta(-4)$ empleando la ecuación funcional. Indicación: Para uno de los cálculos debes recordar la solución del problema de Basilea [4].

En realidad, para el estudio de la distribución de los primos, la función $-\zeta'/\zeta$ que, hasta donde yo sé, no recibe ningún nombre especial es más relevante que la propia función ζ. Dedicaremos los últimos ejercicios a algunas de sus propiedades básicas.

12) Sea $\mathcal{Z} = \big\{\rho \in \mathbb{C} \,:\, \zeta(\rho) = 0\big\}$. Demuestra que $-\zeta'(s)/\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ es meromorfa, más concretamente, es holomorfa en el abierto $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{Z}$ y tiene polos simples en los elementos de $\mathcal{Z}$. Por cierto, ¿ves claro que $\mathcal{U}$ es un abierto?

La función $-\zeta'/\zeta$ está definida por una serie en $\Re(s) > 1$, pero es más fea que la de ζ.

13) Prueba

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1 \qquad \text{donde} \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí p representa un primo genérico. Por ejemplo, $\Lambda(3) = \Lambda(3^{20}) = \log 3$ y $\Lambda(2024) = 0$. A la función aritmética Λ se le llama *función de von Mangoldt*. Indicación: Usa la fórmula producto de Euler. ¿Qué operación analítica transforma f en f'/f?

La función de von Mangoldt es un poco rara y en la demostración simplificada del teorema de los números primos de la próxima hoja la evitaremos pasando de $-\zeta'/\zeta$ a la función

$$F(s) = \sum \frac{\log p}{p^s} \qquad \text{donde } p \text{ recorre los primos.}$$

Esta función está bien definida como función holomorfa en $\Re(s) > 1$ (¿lo ves?). Lo importante es que imita a $-\zeta'/\zeta$ en una región más amplia en el sentido de que no introduce nuevas singularidades.

14) Demuestra que $\zeta'(s)/\zeta(s) + F(s)$ admite una extensión holomorfa a $\Re(s) > \frac{1}{2}$.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre con una fuerte recomendación de que no llegues a las 7 páginas, sin contar la bibliografía, con el formato de esta hoja. Si te ves muy apurado, escribe muy escueto lo relativo a la función Γ. Es importante que trates de combinar las soluciones de los ejercicios en vez de pegarlas por separado. El resultado debe dar lugar a un segundo capítulo de tu TFG llamado *La extensión meromorfa* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.

[2] J. Dutka. The early history of the factorial function. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 43(3):225–249, 1991.

[3] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function*. Academic Press, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[4] J. Hofbauer. A simple proof of $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ and related identities. *Amer. Math. Monthly*, 109(2):196–200, 2002.

[5] A. Ivić. *The Riemann zeta-function*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2003. Theory and applications, Reprint of the 1985 original [Wiley, New York].

[6] H. L. Montgomery. *Early Fourier analysis*, volume 22 of *Pure and Applied Undergraduate Texts*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[7] Pr∞fWiki contributors. Fourier Transform of Gaussian Function — Pr∞fWiki. `https://proofwiki.org/w/index.php?title=Fourier_Transform_of_Gaussian_Function&oldid=668452`, 2023. [Online; accessed 26-December-2023].

[8] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[9] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[10] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.