Esta hoja y las sucesivas, la previsión es que haya cinco en total, las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde se encuentra la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `AP24hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Idealmente cada hoja dará lugar a un capítulo de tu TFG, aunque seguramente al final habrá que hacer algunos ajustes globales.

El propósito de esta primera hoja es actuar de motivación mostrando que gracias al uso de la función ζ y de algunas funciones L es posible obtener dos resultados aritméticos que no parecen nada sencillos:

Resultado 1. La suma de los inversos de los primos diverge.

Resultado 2. Existen infinitos primos cuya cifra más a la derecha es un uno.

Antes de nada, introduzcamos algo de notación y las definiciones básicas. A lo largo de esta hoja p denotará un número primo genérico en el sentido habitual, $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$. De este modo, el primer resultado equivale a la fórmula

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{p\le N} \frac{1}{p} = \infty \tag{1}$$

y el segundo a

$$\#\{p \equiv 1 \pmod{10}\} = \infty. \tag{2}$$

El símbolo # indica el cardinal. Supongo que te es familiar la notación habitual de las congruencias: $n \equiv a \pmod{q}$ con $n, a \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}^+$ significa $q \mid n - a$, esto es, q divide a $n - a$. A veces se abrevia $\pmod{q}$ como (q). Además, siguiendo la notación anglosajona, $\gcd(a, b)$ indica el máximo común divisor de $a, b \in \mathbb{Z}$ (no ambos nulos). Si tienes dudas sobre las propiedades básicas de esta función o de las congruencias, consulta por ejemplo [3].

La función ζ de Riemann[1] se define como una función compleja dada por una serie. Por tradición, el nombre habitual de la variable es s en lugar de la z típica del análisis complejo:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1.$$

En realidad en esta hoja solo vamos a utilizar los valores $s \in \mathbb{R}_{>1}$.

[1]Lo habitual en el ámbito científico es leer ζ como *zeta*, pero según la RAE el nombre oficial es *dseta*. A pesar de la autoridad de la RAE, también dan *my* y *ny* como nombres de μ y ν cuando prácticamente todos los científicos usan *mu* y *nu*.

La relación con los números primos viene del llamado *producto de Euler*, con el que L. Euler dio una prueba de (1) y otros resultados:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}.$$

Esta fórmula suena muy razonable cuando se escribe $\left(1-p^{-s}\right)^{-1} = 1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\dots$ y se efectúa formalmente el producto infinito de las sumas infinitas (para Euler no era necesario decir más). Esta hoja es de motivación y prefiero posponer los aspectos técnicos. De todas formas, para que midas tus fuerzas y para que yo sepa la soltura que tienes con el análisis real y complejo (porque no conozco los temarios de la Complutense), te sugiero el siguiente ejercicio con tres apartados. Dedica tus esfuerzos sobre todo a los dos primeros, el tercero lo puedes descartar si escapa de lo que hayas estudiado de variable compleja. Si no te salen, consulta la bibliografía al uso (por ejemplo, [1], [2], [5]) y dime las dificultades que has tenido.

1) Da pruebas con todo el rigor del que seas capaz de:

i) El producto de Euler para ζ.

ii) $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = \infty$ (aquí $s \to 1^+$ indica $s > 1$ real y $s \to 1$).

iii) ζ es holomorfa en el semiplano $\{\Re(s) > 1\}$.

Nota que combinando i) y ii) se tiene que hay infinitos primos (teorema de Euclides).

El primer resultado aritmético, la fórmula (1), admite una demostración rápida.

2) Prueba que existe una constante C tal que para cualquier $s \ge 1/2$ y cualquier p se cumple $\left|p^{-s} + \log(1-p^{-s})\right| \le Cp^{-2s}$. Indicación: Aplica el teorema de Taylor a $f(x) = \log(1-x)$.

3) Demuestra que $\sum_p \left(p^{-s} + \log(1-p^{-s})\right)$ converge para cualquier $s > 1/2$ y con ello y con i) y ii) deduce (1).

Una curiosidad, por si llama tu atención, es que es prácticamente imposible sospechar (1) con cálculos numéricos por lo lenta que es la divergencia. Por ejemplo, si N es dos millones la suma vale cerca de 2,94 y para cuatro millones, cerca de 2,98.

Vamos ahora con la definición de cuatro funciones L que nos permitirán demostrar (2). En principio, la definición parecerá muy artificial, en breve veremos la idea que hay debajo.

Definimos los *caracteres* módulo 10 como las funciones $\chi_j : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, $j \in \{0,1,2,3\}$:

$$\chi_j(n) = \begin{cases} e^{2\pi ijk/4} \text{ con } 3^k \equiv n \ (10) & \text{si } \gcd(n,10) = 1, \\ 0 & \text{si } \gcd(n,10) \ne 1. \end{cases}$$

Aquí, $i = \sqrt{-1}$ así que $e^{2\pi ijk/4}$ es lo mismo que i^{jk}.

4) ¿Por qué están bien definidos? Esto lleva a preguntarse si existe siempre algún k con $3^k \equiv n$ y si da igual el que elijamos.

5) Explica por qué se tiene $\chi_j(n)\chi_j(m) = \chi_j(nm)$ para $n, m \in \mathbb{Z}$ y explica también que la expresión $\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} \chi_j(n)$ es 1 si $n \equiv 1 \pmod{10}$ y es 0 en otro caso.

Con estos caracteres, definimos las funciones L_j como

$$L_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_j(n)}{n^s} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1.$$

La motivación última de los χ_j está en las dos propiedades que acabas de probar. La primera hace que las L_j tengan un producto de Euler en el que aparezca los primos y la segunda, permite detectar los números que acaban en 1. Lo que vamos a hacer es adaptar la prueba de (1) para obtener un resultado análogo más fuerte que (2), concretamente:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{p\equiv 1\ (10)\\ p\le N}} \frac{1}{p} = \infty \tag{3}$$

6) Explica por qué $L_j(s) = \prod_p \big(1 - \chi_j(p)p^{-s}\big)^{-1}$. Así, definiendo $F(s) = \prod_{j=0}^{3} L_j(s)$ se tiene $F(s) = \prod_p f_s(p)$ con

$$f_s(n) = \big(1 - \chi_0(n)n^{-s}\big)^{-1}\big(1 - \chi_1(n)n^{-s}\big)^{-1}\big(1 - \chi_2(n)n^{-s}\big)^{-1}\big(1 - \chi_3(n)n^{-s}\big)^{-1}$$

Nota que $f_s(n)$ es real para s real porque $\chi_0(n)$ y $\chi_2(n)$ son reales y $\chi_1(n)$ y $\chi_3(n)$ son conjugados.

7) Prueba que existe una constante C tal que para cualquier $s \ge 1/2$ y cualquier p se cumple $\big|c(p)p^{-s} - \log f_s(p)\big| \le Cp^{-2s}$ donde $c(n) = 4$ si $n \equiv 1 \pmod{10}$ y $c(n) = 0$ en otro caso.

La clave para terminar es el análogo de ii).

Para $L_0(s)$ el comportamiento cerca de $s \to 1$ es similar al de $\zeta(s)$ porque, de hecho, su cociente es una función sencilla.

8) Demuestra $\lim_{s\to 1^+} L_0(s) = +\infty$.

Da igual que el resto de las $L_j(s)$ no tiendan a infinito cuando $s \to 1^+$, lo único que podría arruinar el argumento es que alguna de ellas se anulase en $s = 1$ y cancelase la divergencia de L_0. Como $L_1(s)$ y $L_3(s)$ son conjugadas, todo lo que probar es que no se anulan ni $\Re L_1(s)$ ni $L_2(s)$ cuando $s \to 1^+$.

9) Demuestra que $\Re L_1(1)$ converge a un número positivo. Indicación: Aplica el criterio de Leibniz usando que el error al aproximar por una suma parcial es menor que el primer término despreciado [4, p. 600].

El caso de $L_2(s)$ es algo más difícil. A ver si se te ocurre sin indicaciones.

10) Demuestra que $L_2(1)$ converge a un número positivo.

11) Deduce que $F(s) \to +\infty$ cuando $s \to 1^+$.

12) Utilizando los ejercicios anteriores, explica por qué de $\lim_{s\to 1^+} F(s) = +\infty$ se deduce (3) y, por tanto, el segundo resultado aritmético (2).

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre con una fuerte recomendación de que no superes las 7 páginas, sin contar la bibliografía, con el formato de esta hoja para que no tengamos que hacer muchos recortes al final. Es mucho más importante poner buenas explicaciones que detalles en los cálculos. El resultado debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *Motivación: dos resultados aritméticos* o algo parecido.

Referencias

[1] A. Ivić. *The Riemann zeta-function.* Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2003. Theory and applications, Reprint of the 1985 original [Wiley, New York].

[2] H. Iwaniec. *Lectures on the Riemann Zeta Function.* University Lecture Series. American Mathematical Society, 2014.

[3] K. H. Rosen. *Elementary number theory and its applications.* Addison-Wesley, Reading, MA, fourth edition, 2000.

[4] M. Spivak. *Calculus Vol. I, II.* Editorial Reverté, Barcelona, 1984.

[5] E.C. Titchmarsh and D.R. Heath-Brown. *The Theory of the Riemann Zeta-function.* Oxford science publications. Clarendon Press, 1986.