

Generadores de primos,  
identidades aproximadas  
y funciones multifractales

Serafín Ruiz Cabello

Director: Fernando Chamizo Lorente  
Universidad Autónoma de Madrid

23 de mayo de 2014

# Contenido

- ▶ Capítulo 1. La sucesión de Rowland.
- ▶ Capítulo 2. Identidades aproximadas y formas de Maass.
- ▶ Capítulo 3. Espectro de singularidades y formas modulares.

# Capítulo 1. La sucesión de Rowland

## La sucesión de Rowland

Preliminares. Generalización

Conjeturas. Cadenas de Rowland

Identities aproximadas y formas de Maass

Espectro de singularidades y formas modulares

## La sucesión de Rowland

Preliminares. Generalización

Conjeturas. Cadenas de Rowland

Identities aproximadas y formas de Maass

Espectro de singularidades y formas modulares





## Sucesiones auxiliares

$$\begin{cases} c_1^* = 5 \\ c_n^* = c_{n-1}^* + \text{mfp}(c_{n-1}^*) - 1, n > 1 \end{cases} ; \quad r_n^* = \frac{c_n^* + 1}{2}, n \geq 1,$$

donde  $\text{mfp}(\cdot)$  es el menor factor primo de un entero dado.

- ▶ Con estas sucesiones damos una prueba al Teorema:

### Proposición

$$a_k - a_{k-1} = \begin{cases} \text{mfp}(c_{n-1}^*), & \text{si } k = r_n^* \text{ para algún } n > 1. \\ 1, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- ▶ Y además probamos:

### Proposición

$\{a_k - a_{k-1}\}_{k>1}$  contiene infinitos primos distintos.

## La sucesión de Rowland generalizada

- ▶ ¿Qué ocurrirá al cambiar  $a_1 = 7$  por otro entero positivo?

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z}^+ \text{ } a_1 \text{ impar, } a_1 > 3 \\ a_k = a_{k-1} + \text{mcd}(k, a_{k-1}); \quad k > 1 \end{cases}$$

- ▶ Ahora el resultado de Rowland no siempre será cierto.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_k$	805	806	807	808	809	810	811	812	813
$a_k - a_{k-1}$		1	1	1	1	1	1	1	1

$k$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$a_k$	814	825	828	829	830	835	836	837	846
$a_k - a_{k-1}$	1	11	3	1	1	5	1	1	9



- De nuevo introducimos dos sucesiones auxiliares:

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_{n+1} = \min\{k > r_n : \text{mcd}(k, c_n) \neq 1\}, n \geq 1 \\ c_1 = a_1 - 2 \\ c_{n+1} = c_n + \text{mcd}(c_n, r_{n+1}) - 1, n \geq 1 \end{cases}$$

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$r_n$	1	3	5	6	41	42	83	84	167	168	...
$c_n$	33	35	39	41	81	83	165	167	333	335	...

### Proposición

$$a_k - a_{k-1} = \begin{cases} \text{mcd}(c_{n-1}, r_n), & \text{si } k = r_n \text{ para algún } n > 1. \\ 1, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	...	40	41	...
$a_k$	35	36	39	40	45	48	49	...	82	123	...

## La sucesión de Rowland

Preliminares. Generalización

Conjeturas. Cadenas de Rowland

Identidades aproximadas y formas de Maass

Espectro de singularidades y formas modulares

- ▶ Aunque existen contraejemplos en los que  $a_k - a_{k-1}$  no es primo, nuestras pruebas sugieren que sólo aparecen al principio.

### Conjetura (A)

Para cada sucesión de Rowland generalizada, existe  $K \geq 1$  tal que  $a_k - a_{k-1}$  es 1 o un número primo para todo  $k > K$ .

- ▶ Existe una condición suficiente para la Conjetura.

### Proposición

- ▶ Para todo  $a_1 > 3$  impar se cumple  $r_n \leq (c_n + 1)/2$  para cada  $n > 1$ . La igualdad se alcanza si y sólo si  $\text{mcd}(c_{n-1}, r_n)$  es un primo  $p$  y  $p \lfloor r_{n-1}/p \rfloor = (c_{n-1} - p)/2$ .
- ▶ Si se cumple  $r_n = (c_n + 1)/2$  para un cierto  $n_0$ , entonces se cumple para todo  $n \geq n_0$  y la Conjetura (A) es cierta.

► Fijado  $a_1$ , basta con que se cumpla alguna de estas condiciones para que la Conjetura (A) sea cierta:

► Que exista  $n_0$  tal que  $2r_{n_0} + 1 = c_{n_0}$ .

Como vimos, esto implica  $2r_n + 1 = c_n$  para  $n \geq n_0$ .

► Que exista  $m_0$  tal que  $c_{m_0}$  sea primo.

Como consecuencia se tiene  $2r_{m_0+1} + 1 = c_{m_0+1}$ .

### Conjetura (B)

(I)  $n_0 < \infty$ , (II)  $m_0 < \infty$ , (III)  $n_0 = m_0 + 1 < \infty$

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$r_n$	1	11	12	15	18	827	828	830	831	...
$c_n$	803	813	815	819	827	1653	1655	1659	1661	...

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$r_n$	1	5	6	11	12	23	24	47	48	50	...
$c_n$	5	9	11	21	23	45	47	93	95	99	...

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$r_n$	1	3	5	6	41	42	83	84	167	168	...
$c_n$	33	35	39	41	81	83	165	167	333	335	...

$n$	1	2	...	6	7	8	9	10	11
$r_n$	1	7	...	20	21	29	30	35	587
$c_n$	511	517	...	549	551	579	581	587	1173

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$r_n$	1	11	12	15	18	827	828	830	831	...
$c_n$	803	813	815	819	827	1653	1655	1659	1661	...

## Relaciones entre las conjeturas

### Proposición

La Conjetura (B) implica la Conjetura (A), y además que  $\{a_k - a_{k-1}\}_{k \geq 1}$  contenga infinitos primos distintos.

### Proposición

Si se cumple (I) y  $\text{mcd}(c_{n_0-1}, r_{n_0}) > r_{n_0-1}$ , entonces (III) es cierto.

### Proposición

Si se cumple (I) y además  $(2 + 1/2500)r_n < c_n + 1$  para  $n < n_0$ , entonces también se cumple (III).



- Para cada cadena  $C_k = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ , definimos

$$S(n) = \sum_{j < n} (p_j - 1), \quad S(1) = 0.$$

### Proposición

$C_k$  es una cadena de Rowland si y sólo si verifica:

- $S(m) \equiv S(n) \pmod{p_n}$ , para  $p_n = p_m$ .
  - $S(m) \not\equiv S(n) \pmod{p_n}$ , para  $p_n < p_m$ .
  - Para cada primo  $q$ , el conjunto  $\{S(j) \pmod{q} : p_j > q\}$  no contiene todos los residuos módulo  $q$ .
- $\{p_1, p_2, \dots, p_k, p_1, p_2, \dots, p_k\}$  nunca será una cadena de Rowland si  $p_1, p_2, \dots, p_k$  son primos distintos, mientras que

$$C_{27} = \{3, 5, 3, 23, 3, 5, 3, 653, 3, 5, 3, 23, 3, 5, 3, 3603833, \\ 3, 5, 3, 23, 3, 5, 3, 653, 3, 5, 3\}$$

es una cadena de 27 elementos con sólo 5 primos.



# Capítulo 2. Identidades aproximadas y formas de Maass

La sucesión de Rowland

Identidades aproximadas y formas de Maass

Resultados auxiliares

Identidades aproximadas

Espectro de singularidades y formas modulares

La sucesión de Rowland

Identities aproximadas y formas de Maass

Resultados auxiliares

Identities aproximadas

Espectro de singularidades y formas modulares

## Un ejemplo de identidad aproximada

$$S := \frac{1}{4} \left( \sum_{n=-15}^{15} e^{-n^2/4} \right)^2.$$

- ▶  $S$  es una *identidad aproximada* para  $\pi$ , pues

$$0 < |S - \pi| < 10^{-15}.$$

- ▶ Fórmula de sumación de Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n), \quad \text{con } f(x) = e^{-x^2/4}.$$

- ▶ El valor de  $\sqrt{4S}$  es comparable a  $\hat{f}(0)$ :

$$\sqrt{4S} = \hat{f}(0) - 2 \sum_{n \geq 16} e^{-n^2/4} + \sum_{n \neq 0} \sqrt{4\pi} e^{-4\pi^2 n^2} \approx \hat{f}(0) = 2\sqrt{\pi}.$$

- ▶ Cualquier función 1-periódica puede expresarse en una base de autofunciones del operador laplaciano:

$$\begin{cases} \Delta f &= \lambda f \\ f(0) &= f(1). \end{cases}$$

Tales autofunciones son exponenciales complejas,  $\{e^{2\pi i j x}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , con sendos autovalores  $\lambda_j = -4\pi^2 j^2$ .

- ▶ A partir de cualquier función suficientemente regular puede obtenerse otra 1-periódica, considerando sobre ella la suma de todas las traslaciones enteras. Esta nueva función se denomina *núcleo automorfo*:

$$F(x, y) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(|x - y + n|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

## Grupos fuchsianos

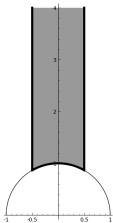
- ▶ El *semiplano de Poincaré* es el semiplano complejo superior  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$  junto con una métrica especial.
- ▶ El grupo de matrices  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  define una acción sobre  $\mathbb{H}$  mediante la aplicación  $G \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  dada por

$$gz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G.$$

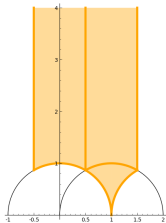
- ▶ Los subgrupos discretos  $F$  de  $G$  se denominan *grupos fuchsianos*. El más conocido es  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Otro ejemplo es

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d, b + c \equiv 0 \pmod{2} \right\} \subset \Gamma.$$

- ▶ Un *dominio fundamental* de  $F$  es un polígono  $D \subset \mathbb{H}$  tal que dos puntos distintos de  $D$  no pertenecen a la misma órbita y toda órbita contiene un punto en el cierre de  $D$ .
- ▶ Los vértices de  $D$  que están en  $\mathbb{R} \cup \{i\infty\}$  se llaman *cúspides*. Se dice que dos cúspides son equivalentes si sus órbitas coinciden.
- ▶ Si  $F$  no tiene cúspides se dice que es *co-compacto*.



Dominio fundamental de  $\Gamma$ .



Dominio fundamental de  $\tilde{\Gamma}$ .

## Desarrollo espectral

- Sobre  $\mathbb{H}$  consideramos el operador de Laplace-Beltrami:

$$\Delta = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

- Fijado  $F$ , existe un sistema ortonormal  $\{u_j\}_{j \geq 0}$  de autofunciones de  $\Delta$ , llamadas *formas de Maass*. Toda función compleja  $k(u)$  cumple la *fórmula de pretraza*:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in F} k(u(gz, w)) &= \sum_{j \geq 0} h(t_j) u_j(z) \overline{u_j(w)} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathfrak{a}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) E_{\mathfrak{a}}(z, 1/2 + it) \overline{E_{\mathfrak{a}}(w, 1/2 + it)} dt, \end{aligned}$$

donde  $h(t)$  es la *transformada de Selberg* de la función  $k$  y  $-(1/4 + t_j^2)$  es el autovalor asociado a  $u_j$ .  $E_{\mathfrak{a}}$  es la *serie de Eisenstein* asociada a cada clase de equivalencia cúspide.

La sucesión de Rowland

Identities aproximadas y formas de Maass

Resultados auxiliares

Identities aproximadas

Espectro de singularidades y formas modulares



## El caso no compacto

$$4u(\gamma i, i) = (a - d)^2 + (b + c)^2 = (a + d)^2 + (b - c)^2 - 4$$

Con esta igualdad es posible expresar el número de matrices de  $\tilde{\Gamma}$  o  $\Gamma$  para las que  $4u(\gamma i, i)$  toma cada valor entero en función de

$$r(n) = |\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b^2 = n\}|.$$

### Proposición

$$\sum_{\gamma \in \tilde{\Gamma}} k(u(\gamma i, i)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} r(n) r(n+1) k(n),$$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} k(u(\gamma i, i)) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n r(n) r(n+4) k(n/4),$$

donde  $\xi_n$  vale  $1/2$  para  $n$  par y  $1/4$  para  $n$  impar.

## Algunos ejemplos

- Escogiendo adecuadamente funciones  $k$ , obtenemos varios ejemplos de identidades aproximadas.

$$S = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{r(n)r(n+4)}{(n+4)^2}, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|^2}{\cosh(\pi t)} (1/4 + t^2) dt,$$

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)r(n+1)e^{1-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}, \quad I' = \int_{-\infty}^{\infty} K_{it}^2(1/2) \left| \frac{f(t)}{1 + 2^{\frac{1}{2}+it}} \right|^2 dt,$$

donde  $f(t) = \frac{\zeta(s)L(s,\chi)}{\zeta(2s)}$  para  $s = 1/2 + it$ ,  $\chi$  es el único carácter no principal módulo 4 y  $K_\nu$  es la función de Bessel modificada de segunda especie. Se cumplen

$$0 < \left| \frac{S-3}{I} - \pi \right| < 4 \cdot 10^{-14}, \quad 0 < \left| \frac{S'-16}{32I'} - \frac{e}{\pi} \right| < 2'04 \cdot 10^{-11}.$$

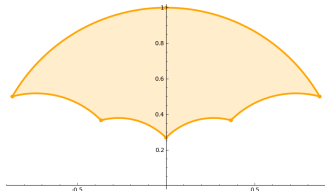
## El caso compacto

- ▶ Existen ejemplos de grupos fuchsianos sin cúspides; muchos procedentes del álgebra de cuaterniones. Por ejemplo, para primos  $p \equiv 3 \pmod{4}$  y  $q \equiv 5 \pmod{8}$ ,

$$G_p = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b\sqrt{p} & c + d\sqrt{p} \\ -c + d\sqrt{p} & a - b\sqrt{p} \end{pmatrix} : a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod{2} \right\} \subset G$$

$$G_{2,q} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} & c + d\sqrt{2} \\ q(c - d\sqrt{2}) & a - b\sqrt{2} \end{pmatrix} : a \equiv c, b \equiv d \pmod{2} \right\} \subset G.$$

- ▶ El dominio fundamental de  $G_3$  es un hexágono hiperbólico.



Utilizando la siguiente generalización de  $r(n)$ ,

$$r_{s,t}(n) = \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : sx^2 + ty^2 = n \right\} \right|.$$

podemos utilizar los resultados conocidos sobre  $\Gamma$  y  $\tilde{\Gamma}$ .

### Proposición

$$\sum_{\gamma \in G_p} k(u(\gamma i, i)) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} r(n)r(pn + 2)k\left(\frac{pn}{2}\right)$$

$$\sum_{\gamma \in G_{2,q}} k(u(\gamma(i/\sqrt{q}), i/\sqrt{q})) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} r_{2,q}(n)r_{1,2q}(n + 4)k\left(\frac{n}{4}\right).$$

La serie  $S = \sum_{n=1}^{\infty} r(n)r(3n + 2)\sqrt{n}e^{-((\log n)/4)^2}$  verifica

$$1'29 \cdot 10^{-7} < 1 - \frac{S}{72e^9\sqrt{\pi}} < 3 \cdot 10^{-7}.$$

# Capítulo 3. Espectro de singularidades y formas modulares

La sucesión de Rowland

Identidades aproximadas y formas de Maass

Espectro de singularidades y formas modulares

Introducción

Formas modulares y multifractales

Cálculo del orden Hölder

La sucesión de Rowland

Identidades aproximadas y formas de Maass

Espectro de singularidades y formas modulares

**Introducción**

Formas modulares y multifractales

Cálculo del orden Hölder

## Dimensión de Hausdorff

- ▶ Dado un conjunto no vacío  $X \subset \mathbb{R}^n$  y  $s > 0$ , se define la *medida  $s$ -dimensional de Hausdorff* de  $X$  como

$$\mathcal{H}^s(X) := \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : X \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i; |U_i| \leq \delta, i \in \mathbb{N} \right\}.$$

- ▶ La *dimensión de Hausdorff* de  $X$  es

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}}(X) &:= \inf\{s > 0 : \mathcal{H}^s(X) = 0\} \\ &= \sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(X) = \infty\}. \end{aligned}$$

## Espectro de singularidades

- ▶ Dada una función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  y un punto  $x \in [0, 1]$ , el *exponente Hölder* de  $f$  en  $x$  puede definirse como

$$\beta_f(x) = \sup\{\gamma \leq 1 : f(x+h) - f(x) = \mathcal{O}(|h|^\gamma)\}$$

siempre que  $\beta_f(x) \leq 1$ .

- ▶ El *espectro de singularidades* de  $f$  es

$$d_f(\beta) := \begin{cases} \dim_{\mathcal{H}}\{x : \beta_f(x) = \beta\} & \text{si } \{x : \beta_f(x) = \beta\} \neq \emptyset \\ \text{indefinido} & \text{si } \{x : \beta_f(x) = \beta\} = \emptyset. \end{cases}$$

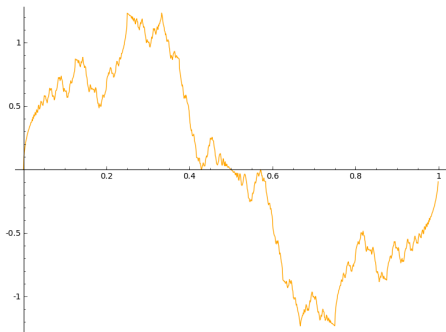
- ▶ Diremos que  $f$  es una *función multifractal* si la imagen de  $d_f(\beta)$  no es discreta.



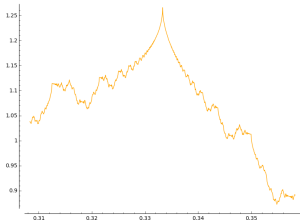
## El ejemplo de Riemann

$$R(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi n^2 x)}{n^2}.$$

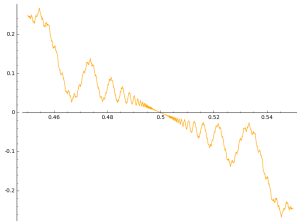
- ▶ Se atribuye (tal vez errónamente) a Riemann su introducción de esta función como un posible ejemplo de función continua y a su vez no diferenciable en ningún punto.



- ▶ En 1916 Hardy demostró que  $R$  no es diferenciable en ningún irracional, y en determinadas familias de racionales.
- ▶ En 1970 Joseph Gerver demostró que  $R$  es diferenciable en los racionales que no incluyó Hardy: aquellos que se pueden escribir como  $a/2b$ , con  $a$  y  $b$  impares.



No diferenciable en  $x = 1/3$ .



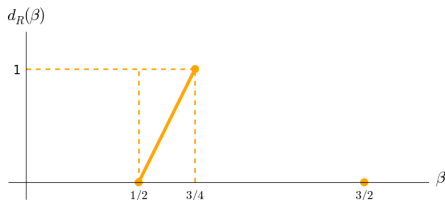
Diferenciable en  $x = 1/2$ .

- El ejemplo de Riemann también es interesante por las propiedades de su espectro de singularidades.

### Teorema (Stéphane Jaffard, 1996)

$R$  es una función multifractal. De hecho, su espectro de singularidades cumple

$$d_R(\beta) = \begin{cases} 4(\beta - 1/2) & \text{si } \beta \in [1/2, 3/4] \\ 0 & \text{si } \beta = 3/2 \\ \text{indefinido} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



La sucesión de Rowland

Identidades aproximadas y formas de Maass

Espectro de singularidades y formas modulares

Introducción

Formas modulares y multifractales

Cálculo del orden Hölder

## El grupo $\Gamma_0(N)$

- ▶ El grupo de matrices  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  define una acción sobre  $\mathbb{H}$  mediante la aplicación  $\Gamma \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  dada por

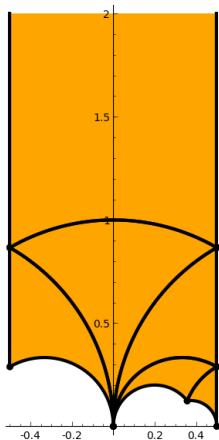
$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

- ▶ Ahora vamos a considerar los siguientes grupos fuchsianos.

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : c \equiv 0 \pmod{N} \right\} \subset \Gamma, \quad N \in \mathbb{Z}, N \geq 1.$$

- ▶ Salvo en el caso  $\Gamma = \Gamma_0(1)$ ,  $\Gamma_0(N)$  tendrá siempre varias clases de equivalencia de cúspides.

- Estas clases de equivalencia pueden describirse mediante clases de congruencia. Si  $a \equiv a' (N)$  y  $q \equiv q' (N)$ , entonces  $a/q \sim a'/q'$ .



El grupo  $\Gamma_0(4)$  tiene tres clases de equivalencia de cúspides.

## Formas modulares

- ▶ Una *forma modular* de peso  $r > 0$  con respecto del grupo  $\Gamma_0(N)$  es una función  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  que verifica

$$f(\gamma z) = w_\gamma (cz + d)^r f(z), \quad \text{con } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N), |w_\gamma| = 1.$$

- ▶ La función  $f$  admite el siguiente desarrollo de Fourier:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz).$$

- ▶ Se dirá que  $f$  es *cuspidal* en una cúspide  $\mathfrak{a}$  si la función decae exponencialmente al ser evaluada cerca de dicha cúspide. Si  $f$  es cuspidal en todas las cúspides de  $\Gamma_0(N)$ , se dice que es una *forma cuspidal*. Dada  $f$ , se define su *integral fraccionaria*,  $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , como

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} e(nx), \quad r < \alpha < r + 1/2.$$

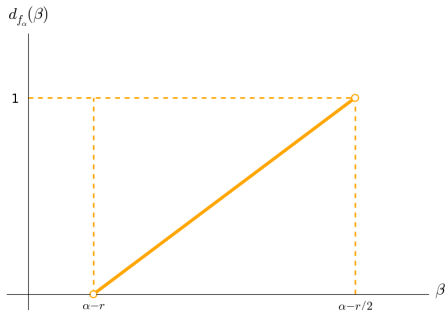
# Resultado principal

## Teorema

Sean  $f$  una forma modular *no cuspidal* de peso  $r \in (0, 1)$  y  $\alpha < 1$ . Entonces, el espectro de singularidades de  $f_\alpha$  cumple

$$d_{f_\alpha}(\beta) = \frac{2(\beta - \alpha + r)}{r}, \quad \text{para } \alpha - r < \beta < \alpha - r/2.$$

En particular,  $f_\alpha$  es una función multifractal.





La prueba está dividida en dos partes.

- ▶ En la primera vamos a hallar varias fórmulas asintóticas para expresar el incremento  $f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)$  utilizando las relaciones entre  $f_\alpha$  y  $f$  y las propiedades modulares de esta última.
- ▶ En la segunda vamos a utilizar esas fórmulas para describir el espectro de singularidades de  $f_\alpha$  utilizando aproximación diofántica y el Teorema de Jarník-Besicovitch.

La sucesión de Rowland

Identidades aproximadas y formas de Maass

Espectro de singularidades y formas modulares

Introducción

Formas modulares y multifractales

Cálculo del orden Hölder

# Una fórmula asintótica para $f_\alpha$

## Proposición

Sea  $x$  un número irracional y  $a/q$  una fracción irreducible tal que  $|\delta| \leq q^{-2}$ , donde  $\delta := x - a/q$ . Entonces, para  $0 < |h| < q^{-2}$ ,

$$f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x) = \Lambda \frac{(\delta+h)^{\alpha-r} - \delta^{\alpha-r}}{q^r} + \mathcal{O}\left(|h|^{2\alpha-2r} q^{2\alpha-3r}\right).$$

Además,  $\Lambda = \Lambda_{\alpha,r,a} = 0$  si y sólo si  $f$  es cuspidal en  $a/q$ .

- $f$  y  $f_\alpha$  están relacionadas gracias a la *integral Gamma*:

$$f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(2\pi n)^\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left[ f\left(\frac{a}{q} + (\delta+h) + it\right) - f\left(\frac{a}{q} + \delta + it\right) \right] dt.$$

## Aproximación diofántica

- ▶ Todo irracional  $x$  puede aproximarse bien por racionales: si tomamos los convergentes de su fracción continua,  $\{a_n/q_n\}_{n \geq 1}$ , se cumple

$$|x - a_n/q_n| < q^{-2}.$$

- ▶ Algunos irracionales permiten mejorar el orden de aproximación. Fijado  $c \geq 2$  definimos

$$A_c := \left\{ x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} : \left| x - \frac{a_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^{c_n}} \text{ con } \limsup c_n = c \right\}.$$

### Teorema (Jarník-Besicovitch)

La dimensión de Hausdorff de  $A_c$  y de  $\bigcup_{s \geq c} A_s$  es  $2/c$ .

# Determinación del espectro

## Proposición

$$f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x) \ll |h|^{\alpha-r+r/c}, \quad x \in A_c, \quad c > 2.$$

- ▶ Para lograr una cota inferior, es preciso que  $f$  sea no cuspidal en al menos una clase de equivalencia de cúspides. Esto nos permite redefinir  $A_c$  conservando la dimensión:

$$A_c^* := \{x \in A_c : \exists \{n_k\}_{k \geq 1} : a_{n_k} \equiv a'(N); q_{n_k} \equiv q'(N), k \geq 1\}.$$

## Proposición

$A_c^*$  es un subconjunto de  $A_c$  con la misma dimensión y tal que para cada  $x \in A_c^*$  existe una sucesión  $\{h_n\}_{n \geq 1}$  convergente a cero y verificando

$$f_\alpha(x+h_n) - f_\alpha(x) \gg |h_n|^{\alpha-r+r/c}.$$

- ▶ Combinando estas dos Proposiciones se prueba el Teorema.

- ▶ Capítulo 1. La sucesión de Rowland.
  - ▶ F.Chamizo, D.Raboso & S.Ruiz-Cabello.  
*On Rowland's Sequence.*  
Electronic Journal of Combinatorics, 18(2). 2011
  
- ▶ Capítulo 2. Identidades aproximadas y formas de Maass.
  - ▶ F.Chamizo, D.Raboso & S.Ruiz-Cabello.  
*Exotic approximations and Maass forms.*  
Acta Arithmetica, 159. 2013
  
- ▶ Capítulo 3. Esp. de singularidades y formas modulares.
  - ▶ F.Chamizo & S.Ruiz-Cabello.  
*Modular forms and multifractal Fourier series.*  
*En preparación.* 2014