



Teoría de números clásica en tres contextos diferentes

José Granados Palomo

Tesis Doctoral bajo la dirección de
Fernando Chamizo Lorente

17/07/2020

CAPÍTULO 1

La Ley de Weyl para el grupo especial ortogonal

M variedad Riemanniana
compacta
 $d = \dim(M)$

Ley de Weyl

M variedad Riemanniana
compacta
 $d = \dim(M)$

+

$\{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ espectro del
operador de Laplace-Beltrami
 $-\Delta_g$ sobre M

Ley de Weyl

M variedad Riemanniana
compacta
 $d = \dim(M)$

+

$\{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ espectro del
operador de Laplace-Beltrami
 $-\Delta_g$ sobre M

\Downarrow

Ley de Weyl (1949)

$$\mathcal{N}(\lambda) := \sum_{\lambda_m \leq \lambda} 1 \sim \frac{2\text{Vol}(M)}{d(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \cdot \lambda^{d/2}$$

Ley de Weyl

M variedad Riemanniana
compacta
 $d = \dim(M)$

+

$\{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ espectro del
operador de Laplace-Beltrami
 $-\Delta_g$ sobre M

⇓

Ley de Weyl (1949)

$$\mathcal{N}(\lambda) := \sum_{\lambda_m \leq \lambda} 1 \sim \frac{2\text{Vol}(M)}{d(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \cdot \lambda^{d/2}$$

- 'Oír' las frecuencias de vibración de M ($\sqrt{\text{autovalores}}$) permite deducir $\dim(M)$ y $\text{Vol}(M)$.

Ejemplos

Ejemplos

- Circunferencia de longitud L . Frecuencias: múltiplos enteros de L .



Oscilación con longitud de onda $L/8$

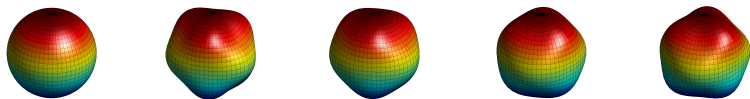
Ejemplos

- Circunferencia de longitud L . Frecuencias: múltiplos enteros de L .



Oscilación con longitud de onda $L/8$

- Esfera de área A . Frecuencias proporcionales a $\sqrt{n(n+1)}/A$, $n \in \mathbb{Z}$, cada una de ellas presente en $2n + 1$ modos de vibración (armónicos esféricos).



Oscilaciones correspondientes al armónico esférico Y_{53}

Análisis del Término de Error

$$\mathcal{N}(\lambda) := \sum_{\lambda_m \leq \lambda} 1 \sim \frac{2\text{Vol}(M)}{d(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \cdot \lambda^{d/2}$$

Análisis del Término de Error

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{2\text{Vol}(M)}{d(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \cdot \lambda^{d/2} + \mathcal{E}(\lambda)$$

¿ $|\mathcal{E}(\lambda)|$?

Análisis del Término de Error

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{2\text{Vol}(M)}{d(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \cdot \lambda^{d/2} + \mathcal{E}(\lambda)$$

¿ $|\mathcal{E}(\lambda)|$?

- **Morris-Taheri. (2017)** Para \mathbb{G} uno de los grupos de Lie clásicos $\mathbf{U}(N)$, $\mathbf{SU}(N)$, $\mathbf{SO}(N)$, $\mathbf{Spin}(N)$:

equidistribución
de puntos enteros
en n -esferas

\Rightarrow

$$\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{d/2-1})$$

$n(N) = \text{rank}(\mathbb{G}) \geq 5$
estimación errónea

Análisis del Término de Error

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{2\text{Vol}(M)}{d(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \cdot \lambda^{d/2} + \mathcal{E}(\lambda)$$

¿ $|\mathcal{E}(\lambda)|$?

- **Morris-Taheri. (2017)** Para \mathbb{G} uno de los grupos de Lie clásicos $\mathbf{U}(N)$, $\mathbf{SU}(N)$, $\mathbf{SO}(N)$, $\mathbf{Spin}(N)$:

equidistribución
de puntos enteros
en n -esferas

\Rightarrow

$$\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{d/2-1})$$

$$n(N) = \text{rank}(\mathbb{G}) \geq 7$$

Análisis del Término de Error

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{2\text{Vol}(M)}{d(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \cdot \lambda^{d/2} + \mathcal{E}(\lambda)$$

¿ $|\mathcal{E}(\lambda)|$?

- **Morris-Taheri. (2017)** Para \mathbb{G} uno de los grupos de Lie clásicos $\mathbf{U}(N)$, $\mathbf{SU}(N)$, $\mathbf{SO}(N)$, $\mathbf{Spin}(N)$:

equidistribución
de puntos enteros
en n -esferas

\Rightarrow

$$\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{d/2-1})$$

$$n(N) = \text{rank}(\mathbb{G}) \geq 7$$

- **Chamizo-G. (2017)** Para $\mathbf{SO}(N)$ con $N = 2n, 2n + 1$:

formas
modulares

\Rightarrow

Término de error para $\mathbf{SO}(N)$

$$\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{d/2-1}(\log \lambda)^{\lfloor 4/n \rfloor}); \quad n \geq 4$$

Consideraciones sobre el Análisis

Consideraciones sobre el Análisis

- Esquema de la Prueba.

- Expresar $\mathcal{N}(\lambda)$ mediante polinomios homogéneos, descomponerlos en armónicos y separar el polinomio constante.
- Término de error: aplicar formas modulares a través de las funciones:

$$\Theta_P(z) := \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^n} P(\vec{m}) e^{\pi i A[\vec{m}]z}.$$

- Término principal: usar fórmulas para las representaciones como suma de n cuadrados enteros y enteros impares $r_n^{\mathbb{Z}}(k)$, $r_n^{\mathbb{O}}(k)$.

Consideraciones sobre el Análisis

- Esquema de la Prueba.

- Expresar $\mathcal{N}(\lambda)$ mediante polinomios homogéneos, descomponerlos en armónicos y separar el polinomio constante.
- Término de error: aplicar formas modulares a través de las funciones:

$$\Theta_P(z) := \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^n} P(\vec{m}) e^{\pi i A[\vec{m}]z}.$$

- Término principal: usar fórmulas para las representaciones como suma de n cuadrados enteros y enteros impares $r_n^{\mathbb{Z}}(k)$, $r_n^{\mathbb{O}}(k)$.

- Casos inferiores $N \leq 7$.

Casos inferiores de $\mathbf{SO}(N)$

$\mathbf{SO}(2)$ $\mathcal{O}(1)$

$\mathbf{SO}(4)$ $\mathcal{O}(\lambda^{3-55/82})$

$\mathbf{SO}(6)$ $\mathcal{O}(\lambda^{15/2-3/4} \log \lambda)$

$\mathbf{SO}(3)$ $\mathcal{O}(\lambda)$

$\mathbf{SO}(5)$ $\mathcal{O}(\lambda^{5-55/82})$

$\mathbf{SO}(7)$ $\mathcal{O}(\lambda^{21/2-3/4} \log \lambda)$

CAPÍTULO 2

Una prueba simple del Teorema de los Números Primos en Progresiones Aritméticas

Teorema de los Números Primos (TNP)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,
29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

Teorema de los Números Primos (TNP)

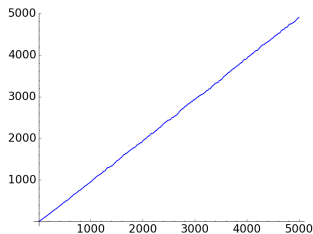
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,
29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

¿Hay algún patrón
'global' en su
comportamiento?

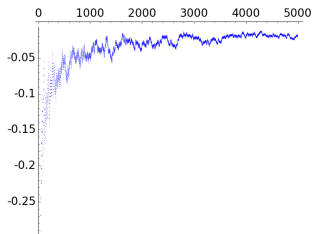
Teorema de los Números Primos (TNP)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,
29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

¿Hay algún patrón
'global' en su
comportamiento?



Suma de $\log p$ hasta $p \leq 5000$

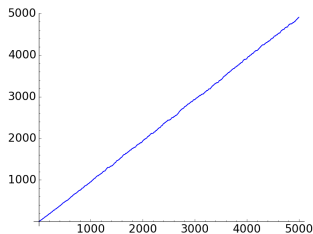


Error relativo para $50 \leq p \leq 5000$

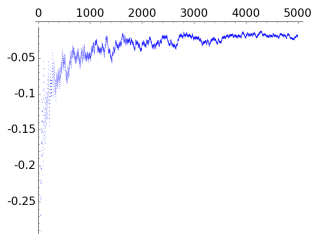
Teorema de los Números Primos (TNP)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,
29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

¿Hay algún patrón
'global' en su
comportamiento?



Suma de $\log p$ hasta $p \leq 5000$



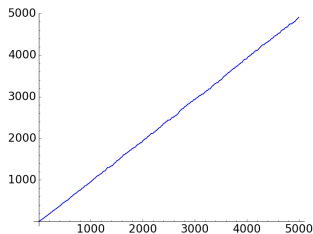
Error relativo para $50 \leq p \leq 5000$

$$\theta(N) := \sum_{p \leq N} \log p \sim N$$

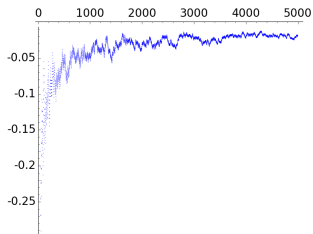
Teorema de los Números Primos (TNP)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,
29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

¿Hay algún patrón
'global' en su
comportamiento?



Suma de $\log p$ hasta $p \leq 5000$



Error relativo para $50 \leq p \leq 5000$

$$\theta(N) := \sum_{p \leq N} \log p \sim N$$

\Rightarrow

$$\mathbb{P} \left[\begin{array}{c} n \leq N \\ \text{es primo} \end{array} \right] \approx \frac{1}{\log N}$$

TNP en Progresiones Aritméticas

TNP en Progresiones Aritméticas

$$p > 2 \Rightarrow p \text{ impar} \Rightarrow p = 4n + 1 \text{ o } p = 4n + 3$$

TNP en Progresiones Aritméticas

$$p > 2 \Rightarrow p \text{ impar} \Rightarrow p = 4n + 1 \text{ o } p = 4n + 3$$

$$¿ \mathbb{P} \left[\begin{array}{l} 4n + 1 \leq N \\ \text{es primo} \end{array} \right] = \mathbb{P} \left[\begin{array}{l} 4n + 3 \leq N \\ \text{es primo} \end{array} \right] \approx \frac{1}{2 \log N} ?$$

TNP en Progresiones Aritméticas

$$p > 2 \Rightarrow p \text{ impar} \Rightarrow p = 4n + 1 \text{ o } p = 4n + 3$$

$$¿ \mathbb{P} \left[\begin{array}{l} 4n + 1 \leq N \\ \text{es primo} \end{array} \right] = \mathbb{P} \left[\begin{array}{l} 4n + 3 \leq N \\ \text{es primo} \end{array} \right] \approx \frac{1}{2 \log N} ?$$

- Se puede extender el **Teorema de los Números Primos** al caso de las progresiones aritméticas $p = qn + a$:

$$\pi_{a,q}(x) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 \sim \frac{x}{\varphi(q) \log x}$$

\Leftrightarrow

$$M_{\chi}(x) := \sum_{n \leq x} \chi(n) \mu(n) = o(x)$$

$$\Leftrightarrow \psi_{\chi}(x) := \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n) \sim \begin{cases} x + o(x) & (\chi = \chi_0) \\ o(x) & (\chi \neq \chi_0) \end{cases}$$

Pruebas Analíticas y Elementales del TNP

Pruebas Analíticas y Elementales del TNP

Autores

Resultados

Ideas

Hadamard y
De la Vallée-Poussin
(1896) (A)

$$\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1 \sim \frac{x}{\log x}$$

Artículo de Riemann
 $\zeta(s) \neq 0 \forall s = 1 + it, t > 0$

De la Vallée-Poussin

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(\frac{x \exp(-C\sqrt{\log x})}{C > 0 \text{ absoluta}}\right)$$

Integración de Contorno

Vinogradov y
Korobov (1958-65)

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(x \exp(-C(\log x)^{\frac{3}{5}} (\log \log x)^{-\frac{1}{5}})\right) \\ x \geq 3, C > 0 \text{ absoluta}$$

Cotas superiores más finas de $\zeta(s)$ cerca de $\text{Re}(s) = 1$
[Estimación de Vinogradov para sumas exponenciales](#)

Pruebas Analíticas y Elementales del TNP

Autores

Resultados

Ideas

Hadamard y
De la Vallée-Poussin
(1896) (A)

$$\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1 \sim \frac{x}{\log x}$$

Artículo de Riemann
 $\zeta(s) \neq 0 \forall s = 1 + it, t > 0$

De la Vallée-Poussin

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(\frac{x \exp(-C\sqrt{\log x})}{C > 0 \text{ absolute}}\right)$$

Integración de Contorno

Vinogradov y
Korobov (1958-65)

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(\frac{x \exp(-C(\log x)^{\frac{3}{5}} (\log \log x)^{-\frac{1}{5}})}{x \geq 3, C > 0 \text{ absoluta}}\right)$$

Cotas superiores más finas de $\zeta(s)$ cerca de $\text{Re}(s) = 1$
[Estimación de Vinogradov para sumas exponenciales](#)

Erdős y Selberg
(1948) (E)

$$\psi(x) \sim x$$

[Identidad de Selberg](#)

$$\sum_{p \leq x} \log^2 p + \sum_{pq \leq x} \log p \log q = 2x \log x + \mathcal{O}(x)$$

↓

$$|M(x)| \log x < \sum_{n \leq x} |M(\frac{x}{n})| + \mathcal{O}(x \log \log 3x)$$

Postnikov y
Romanov (1955)

$$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$$

Bombieri y
Wirsing (1962-64)

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(\frac{x \log^{-A} x}{A > 0 \text{ arbitrario}}\right),$$

Métodos de Erdős-Selberg más sofisticados

Diamond y
Steinig (1970)

$$|\psi(x) - x| \leq x \exp(-(\log x)^{\frac{1}{7}} (\log \log x)^{-2}),$$
$$\forall x \geq e^{e^{100}}$$

Pruebas Analíticas y Elementales del TNP

Autores	Resultados	Ideas
Hadamard y De la Vallée-Poussin (1896) (A)	$\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1 \sim \frac{x}{\log x}$	Artículo de Riemann $\zeta(s) \neq 0 \forall s = 1 + it, t > 0$
De la Vallée-Poussin	$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(\frac{x \exp(-C\sqrt{\log x})}{C > 0 \text{ absolute}}\right)$	Integración de Contorno Cotas superiores más finas de $\zeta(s)$ cerca de $\text{Re}(s) = 1$ Estimación de Vinogradov para sumas exponenciales
Vinogradov y Korobov (1958-65)	$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(\frac{x \exp(-C(\log x)^{\frac{3}{5}} (\log \log x)^{-\frac{1}{5}})}{x \geq 3, C > 0 \text{ absoluta}}\right)$	
Erdős y Selberg (1948) (E)	$\psi(x) \sim x$	Identidad de Selberg $\sum_{p \leq x} \log^2 p + \sum_{pq \leq x} \log p \log q = 2x \log x + \mathcal{O}(x)$ \downarrow $ M(x) \log x < \sum_{n \leq x} M(\frac{x}{n}) + \mathcal{O}(x \log \log 3x)$
Postnikov y Romanov (1955)	$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$	
Bombieri y Wirsing (1962-64)	$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(\frac{x \log^{-A} x}{A > 0 \text{ arbitrario}}\right),$	Métodos de Erdős-Selberg más sofisticados
Diamond y Steinig (1970)	$ \psi(x) - x \leq x \exp(-(\log x)^{\frac{1}{7}} (\log \log x)^{-2}),$ $\forall x \geq e^{100}$	
Para Progresiones Aritméticas	$\psi_{\chi}(x) = \delta_{\chi} x - \frac{x \beta_{\chi}}{\beta_{\chi}} + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-\frac{C \log^4 q \log x}{\sqrt{\log x + \log q}}\right)\right)$ $\beta_{\chi} \text{ cero de Siegel } (\text{¿}\exists\text{?}), \chi \text{ primitivo}$	q fijo suficientemente acotado \Rightarrow estimaciones análogas $q(x)$ genérico \Rightarrow ¿cuánto depende de q ?

Versión del TNP en Progresiones Aritméticas

$$G_{\chi}(s) := (-1)^k \left(\frac{1}{L(s, \chi)} \right)^{(k)} \quad F_{\chi}(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \chi(n) \log^k n \log \frac{x}{n}$$

Versión del TNP en Progresiones Aritméticas

$$G_{\chi}(s) := (-1)^k \left(\frac{1}{L(s, \chi)} \right)^{(k)}$$

$$F_{\chi}(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \chi(n) \log^k n \log \frac{x}{n}$$

1. Integración Compleja

$$(\log y)_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} y^s s^{-2} ds$$

$$(s = \sigma + it, \sigma > 0, y > 0)$$

Versión del TNP en Progresiones Aritméticas

$$G_{\chi}(s) := (-1)^k \left(\frac{1}{L(s, \chi)} \right)^{(k)}$$

$$F_{\chi}(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \chi(n) \log^k n \log \frac{x}{n}$$

1. Integración Compleja

$$(\log y)_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} y^s s^{-2} ds$$

$$(s = \sigma + it, \sigma > 0, y > 0)$$

2. Fórmula de Faà di Bruno

$$\left(\frac{1}{f} \right)^{(k)} = \frac{1}{f} \sum_A C_A \left(\frac{f_1}{f} \right)^{a_1} \cdots \left(\frac{f_k}{f} \right)^{a_k}$$

$$A = \{a_1 + \dots + ka_k = k\}; f_i = f^{(i)}$$

Versión del TNP en Progresiones Aritméticas

$$G_{\chi}(s) := (-1)^k \left(\frac{1}{L(s, \chi)} \right)^{(k)}$$

$$F_{\chi}(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \chi(n) \log^k n \log \frac{x}{n}$$

1. Integración Compleja

$$(\log y)_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} y^s s^{-2} ds$$

$$(s = \sigma + it, \sigma > 0, y > 0)$$

2. Fórmula de Faà di Bruno

$$\left(\frac{1}{f} \right)^{(k)} = \frac{1}{f} \sum_A C_A \left(\frac{f_1}{f} \right)^{a_1} \cdots \left(\frac{f_k}{f} \right)^{a_k}$$

$$A = \{a_1 + \dots + ka_k = k\}; f_i = f^{(i)}$$

3. Cotas para $L(s, \chi)$

$$(-1)^j L(s, \chi)^{(j)}(s) = \mathcal{O}_j(\log^{j+1}(2|s|))$$

$$|L(s, \chi)| \gg (\sigma - 1)^{3/4} \log^{-1/4}(2|s|)$$

Versión del TNP en Progresiones Aritméticas

$$G_{\chi}(s) := (-1)^k \left(\frac{1}{L(s, \chi)} \right)^{(k)}$$

$$F_{\chi}(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \chi(n) \log^k n \log \frac{x}{n}$$

1. Integración Compleja

$$(\log y)_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} y^s s^{-2} ds$$

$$(s = \sigma + it, \sigma > 0, y > 0)$$

2. Fórmula de Faà di Bruno

$$\left(\frac{1}{f} \right)^{(k)} = \frac{1}{f} \sum_A C_A \left(\frac{f_1}{f} \right)^{a_1} \cdots \left(\frac{f_k}{f} \right)^{a_k}$$

$$A = \{a_1 + \dots + ka_k = k\}; f_i = f^{(i)}$$

3. Cotas para $L(s, \chi)$

$$(-1)^j L(s, \chi)^{(j)}(s) = \mathcal{O}_j(\log^{j+1}(2|s|))$$

$$|L(s, \chi)| \gg (\sigma - 1)^{3/4} \log^{-1/4}(2|s|)$$

1 + 2 + 3 \Rightarrow TNPPA (2018)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^A x}{x} \sum_{n \leq x} \mu(n) \chi(n) = 0$$

$(\chi \neq \chi_0)$

CAPÍTULO 3

Una de las últimas conjeturas de Javier Cilleruelo
(in memoriam)

Planteamiento

$$S(n) := \{d + n/d : d \mid n\}$$

$(n \in \mathbb{Z}^+)$

$$S(4) = \{4, 5\}$$

$$S(144) = \{24, 25, 26, 30, \dots\}$$

$$S(15120) = \{246, 247, 248, 249, 258, \dots\}$$

Planteamiento

$$S(n) := \{d + n/d : d \mid n\}$$

$(n \in \mathbb{Z}^+)$

$$S(4) = \{4, 5\}$$

$$S(144) = \{24, 25, 26, 30, \dots\}$$

$$S(15120) = \{246, 247, 248, 249, 258, \dots\}$$

$$\mathcal{S}_K = \{n \in \mathbb{Z}^+ : S(n) \text{ contiene } K \text{ enteros consecutivos}\}$$

Planteamiento

$$S(n) := \{d + n/d : d \mid n\} \\ (n \in \mathbb{Z}^+)$$

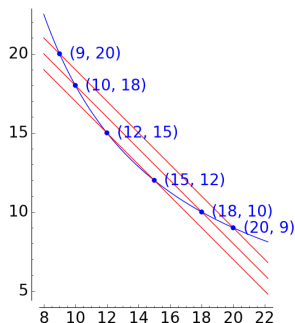
$$S(4) = \{4, 5\}$$

$$S(144) = \{24, 25, 26, 30, \dots\}$$

$$S(15120) = \{246, 247, 248, 249, 258, \dots\}$$

$$\mathcal{S}_K = \{n \in \mathbb{Z}^+ : S(n) \text{ contiene } K \text{ enteros consecutivos}\}$$

$$xy = 180, \quad x + y = 27, 28, 29$$



Interpretación geométrica

Número de rectas consecutivas $x + y = k$ que cortan a $xy = n$ en puntos enteros

Conjetura de Cilleruelo (C)

$$\text{card}(\mathcal{S}_K) = \begin{cases} \infty & 2 \leq K \leq 4 \\ 0 & K \geq 5 \end{cases}$$

Condiciones de espaciamento

$$\begin{aligned} &\exists 0 < d_1, d_2 \mid n : d_2 + n/d_2 - (d_1 + n/d_1) = d \in \mathbb{Z}^+ \\ \Leftrightarrow &n = ab(a - f_1)(b - f_2); f_1 f_2 = d; a, b, a - f_j, f_j \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Ecuaciones Diofánticas (Chamizo-G., 2019)

Condiciones de espaciamento

$$\begin{aligned} \exists 0 < d_1, d_2 \mid n : d_2 + n/d_2 - (d_1 + n/d_1) &= d \in \mathbb{Z}^+ \\ \Leftrightarrow n = ab(a - f_1)(b - f_2); f_1 f_2 = d; a, b, a - f_1, f_1 &\in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

\Rightarrow Caracterizaciones de \mathcal{S}_K

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \{ab(a - 1)(b - 1) : a, b \in \mathbb{Z}_{>1}\} \\ \mathcal{S}_3 &= \left\{ \frac{1}{4}(x^2 - 1)(y^2 - 1) : x^2 + y^2 - 1 = z^2 \text{ con } x, y, z \in \mathbb{Z}_{>1} \right\} \\ \mathcal{S}_{K>3} &= \mathcal{S}_3 \cap \{x^2 + 2(k - 2)xy + y^2 + k^2 - 4k + 3 = \square \mid \forall 3 < k \leq K\} \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = z_0^2 + 1$$

$$x^2 + 4xy + y^2 = z_1^2 - 3$$

$$x^2 + 6xy + y^2 = z_2^2 - 8$$

Ecuaciones Diofánticas (Chamizo-G., 2019)

Condiciones de espaciamento

$$\begin{aligned} &\exists 0 < d_1, d_2 \mid n : d_2 + n/d_2 - (d_1 + n/d_1) = d \in \mathbb{Z}^+ \\ &\Leftrightarrow n = ab(a - f_1)(b - f_2); f_1 f_2 = d; a, b, a - f_j, f_j \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

\Rightarrow Caracterizaciones de \mathcal{S}_K

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \{ab(a - 1)(b - 1) : a, b \in \mathbb{Z}_{>1}\} \\ \mathcal{S}_3 &= \left\{ \frac{1}{4}(x^2 - 1)(y^2 - 1) : x^2 + y^2 - 1 = z^2 \text{ con } x, y, z \in \mathbb{Z}_{>1} \right\} \\ \mathcal{S}_{K>3} &= \mathcal{S}_3 \cap \{x^2 + 2(k - 2)xy + y^2 + k^2 - 4k + 3 = \square \ \forall 3 < k \leq K\} \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = z_0^2 + 1$$

$$x^2 + 4xy + y^2 = z_1^2 - 3$$

$$x^2 + 6xy + y^2 = z_2^2 - 8$$

Infinitas soluciones no triviales en \mathbb{Z} de (\square, \blacksquare) } $\Rightarrow (C)$ es cierta
Ninguna solución no trivial en \mathbb{Z} de $(\square, \blacksquare, \blacksquare)$ }

Caracterización matricial de \mathcal{S}_3 (Chamizo-G., 2019)

Caracterización matricial de \mathcal{S}_3 (Chamizo-G., 2019)

Representaciones de formas
cuadráticas ternarias

\Rightarrow

Representaciones de formas
cuadráticas binarias
 $AX^2 + 2BXY + CY^2$ (Gauss)

Caracterización matricial de \mathcal{S}_3 (Chamizo-G., 2019)

Representaciones de formas
cuadráticas ternarias

\Rightarrow

Representaciones de formas
cuadráticas binarias
 $AX^2 + 2BXY + CY^2$ (Gauss)

\Downarrow

Caracterización matricial de \mathcal{S}_3

Las aplicaciones inyectivas $T_j : \Gamma_j \rightarrow \mathbb{Z}^3$ para $j = 0, 1$:

$$T_j(g) = (cd - ab + \frac{1}{2}j(c^2 - a^2), -ad - bc - jac, ab + cd + \frac{1}{2}j(a^2 + c^2))$$

configuran una partición de las soluciones enteras de (■), siendo:

$$\Gamma_0 := \mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm \text{Id}\}, \quad \Gamma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Gamma_0(2)/\{\pm \text{Id}\}$$

Caracterización matricial de \mathcal{S}_4 (Chamizo-G., 2019)

Ecuaciones de Pell generalizadas

$$AX^2 - BY^2 = 1$$

Caracterización matricial de S_4 (Chamizo-G., 2019)

Ecuaciones de Pell generalizadas

$$AX^2 - BY^2 = 1$$



Caracterización matricial de S_4

Existe una biyección entre el conjunto de tuplas de enteros impares

(λ, μ, u, v) que cumplen:

$$\delta_0^2(9v^2 - u^2)\lambda^2 - (v^2 - u^2)\mu^2 = 8 \quad \text{con} \quad \delta_0 = 1 \text{ si } 3 \nmid u, 1/3 \text{ si } 3 \mid u$$

salvo un cambio global de signo, y el conjunto de soluciones enteras

de $(\blacksquare, \blacksquare)$, a través de las fórmulas:


$$x = \frac{\mu(u+v) + \delta_0\lambda(u-3v)}{4} \quad y = \frac{\mu(v-u) + \delta_0\lambda(u+3v)}{4}$$
$$z_0 = \frac{\mu v - \delta_0\lambda u}{2} \quad z_1 = \frac{\mu u + 3\delta_0\lambda v}{2}$$

El Caso \mathcal{S}_5 (Chamizo-G., 2019)

El Caso \mathcal{S}_5 (Chamizo-G., 2019)

Cl. Enriques-Kodaira

¿Puntos en \mathbb{Q} ?

Ecuaciones
(, , )

\equiv




Superficie algebraica
de tipo K3

No hay conjeturas
claras

El Caso \mathcal{S}_5 (Chamizo-G., 2019)

Cl. Enriques-Kodaira




¿Puntos en \mathbb{Q} ?

Ecuaciones
(, , )

\equiv

Superficie algebraica
de tipo K3

No hay conjeturas
claras

Ecuaciones
(, , )

\rightarrow

Superficie algebraica
de tipo general

Bombieri-Lang

Sobre ciertas curvas
(¿género 0 o 1?)

El Caso \mathcal{S}_5 (Chamizo-G., 2019)

Cl. Enriques-Kodaira

¿Puntos en \mathbb{Q} ?

Ecuaciones
($\square, \blacksquare, \blacksquare$)

\equiv

Superficie algebraica
de tipo K3

No hay conjeturas
claras

Ecuaciones
($\square, \blacksquare, \blacksquare$)

\rightarrow

Superficie algebraica
de tipo general

Bombieri-Lang

Sobre ciertas curvas
(¿género 0 o 1?)

Condición suficiente de finitud de \mathcal{S}_5

Conjetura de Bombieri-Lang } $\Rightarrow \mathcal{S}_5$ es finito

$\nexists x(t), y(t), z_j(t) \in \mathbb{Q}(t) \setminus \mathbb{Q} : (\square, \blacksquare, \blacksquare)$



Teoría de números clásica en tres contextos diferentes

José Granados Palomo

Tesis Doctoral bajo la dirección de
Fernando Chamizo Lorente

17/07/2020