

Problemas de puntos del retículo en tres dimensiones

M^a Elena Cristóbal Rodríguez

25 de mayo de 2009

Defensa de tesis doctoral

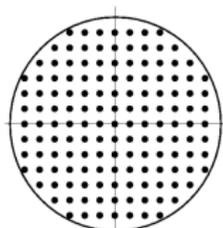
Director: Fernando Chamizo Lorente

Índice

- 1 Introducción
- 2 Problema de la esfera
- 3 Puntos visibles en la esfera
- 4 Problema de los elipsoides racionales

¿Qué son los problemas de puntos del retículo?

- Constituyen una rama clásica de la teoría analítica de números.
- Consisten en contar el número de puntos de coordenadas enteras en grandes dominios cerrados y acotados, en el plano euclídeo y en espacios de dimensión mayor o igual que tres.
- El número de puntos del retículo es **aproximadamente** el volumen de la región estudiada.



Objetivo

Acotar la diferencia entre el número de puntos de coordenadas enteras y el volumen de la región estudiada.



Controlar el término de error, resto o discrepancia.

Término principal \rightleftharpoons el volumen
Dificultad \rightleftharpoons acotar el término de error.

Problemas de puntos del retículo en las bolas

Es el problema más natural y simétrico.

Notación O de Landau: $f = O(g) \leftrightarrow f \ll g$

$f \ll g \implies |f| \leq cg$, c constante absoluta y $g \geq 0$

$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : \|\vec{n}\| \leq R\} = \frac{\pi^{d/2} R^d}{\Gamma(\frac{d+2}{2})} + O(R^\theta)$$

Nº puntos del retículo = Volumen + Error

($R \geq 1$ y θ tan pequeño como sea posible).

¿Qué ocurre en las distintas dimensiones?

$\theta_d \equiv$ Ínfimo de todos los θ válidos para la aproximación anterior.

Problema resuelto en:

$$d = 1 \rightarrow \theta_1 = 0$$

$$d \geq 4 \rightarrow \theta_d = d - 2$$

Problema abierto en:

$$d = 2, \text{ se conjetura } \theta_2 = 1/2$$

$$d = 3, \text{ se conjetura } \theta_3 = 1$$

Con los métodos actuales parece inasequible llegar a probar estos resultados.

Un poco de historia. La esfera

$d = 3$, "Problema de la esfera"

Es un caso muy interesante debido a que está relacionado con otras áreas de la teoría de los números como son el número de clases o las funciones L de Dirichlet.

Durante el siglo XX se han ido probando distintos resultados:

- $\theta_3 \leq 1,5$, E. Landau, 1912.
- Utilizando por primera vez sumas trigonométricas en el problema de la esfera $\rightarrow \theta_3 \leq 1,4$, I.M. Vinogradov, 1935.

Un poco de historia. La esfera

- En 1963, I.M. Vinogradov y J.-R. Chen $\rightarrow \theta_3 \leq 1,333\dots$

Esta cota se obtiene a partir de un término diagonal.
Reducirla usando únicamente métodos de sumas trigonométricas es impensable.

- Pasaron 32 años hasta que el resultado fue mejorado.

En 1995, F. Chamizo y H. Iwaniec $\rightarrow \theta_3 \leq 1,318\dots$

Clave: volviendo a Gauss emplearon la interpretación del número de puntos del retículo en la esfera como el número de clases de formas cuadráticas primitivas.

La esfera, introducción al problema

$$S(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 : \|\vec{n}\| \leq R\} = \frac{4\pi}{3}R^3 + O(R^\theta).$$

Cuestión: reducir al máximo el término de error. Es decir, encontrar θ_3 , el ínfimo entre todos los θ .

Para un entero positivo n ,

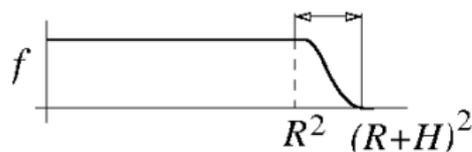
$$r_3(n) = \#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n\}.$$

$S(R) \rightarrow$ suma:

$$S(R) = \sum_{n \leq R^2} r_3(n).$$

La esfera, descomposición del término de error

La suma $S(R) = \sum_{n \leq R^2} r_3(n)$ se regulariza:

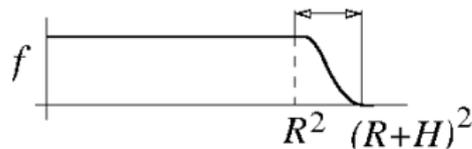


$$S_f(R) = \sum_{1 \leq n \leq (R+H)^2} r_3(n) f(n)$$

Poisson \Rightarrow T. Principal + sumas trigonométricas (oscilación)

La esfera, descomposición del término de error

La suma $S(R) = \sum_{n \leq R^2} r_3(n)$ se regulariza:



$$S_f(R) = \sum_{1 \leq n \leq (R+H)^2} r_3(n) f(n) \rightarrow S_f(R, H) = \sum_{R^2 < n \leq (R+H)^2} r_3(n) f(n).$$

Poisson \Rightarrow **T. Principal** + sumas trigonométricas (oscilación)

Contrapartida: contar puntos en una esfera de radio $R + H \Rightarrow$ hay que restar los puntos de más,

$$S(R) = S_f(R) - S_f(R, H).$$

Es necesario controlar el tamaño de H .

La esfera, descomposición del término de error

¿Cómo descontamos los puntos sobrantes? El análisis de Fourier falla en regiones finas.

Clave para restarlos: $S_f(R, H) \leftrightarrow$ sumas de caracteres.

La relación se basa en

$$R_3(n) = c_n h(-4n) = \frac{1}{\pi} c_n \sqrt{n} L(1, \chi_n), \quad n > 1,$$

$h(-4n)$ es el nº de clases de f. cuadráticas binarias de discriminante negativo $-4n$, c_n es una sucesión de enteros de periodo 8, $L(1, \chi_n)$ es la función L asociada al carácter $\chi_n(m) = (-4n/m)$ y $R_3(n)$ es el número de representaciones primitivas de un entero n como suma de tres cuadrados.

Recuperamos $r_3(n)$: $r_3(n) = \sum_{d^2|n} R_3\left(\frac{n}{d^2}\right) \Leftarrow R_3(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d) r_3\left(\frac{n}{d^2}\right)$

La esfera, descomposición del término de error

¿Cómo descontamos los puntos sobrantes? El análisis de Fourier falla en regiones finas.

Clave para restarlos: $S_f(R, H) \leftrightarrow$ sumas de caracteres.

La relación se basa en

$$R_3(n) = c_n h(-4n) = \frac{1}{\pi} c_n \sqrt{n} L(1, \chi_n), \quad n > 1,$$

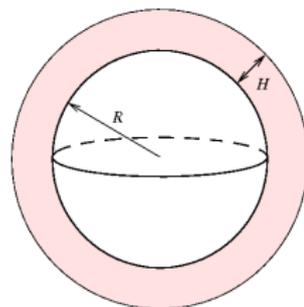
$h(-4n)$ es el nº de clases de f. cuadráticas binarias de discriminante negativo $-4n$, c_n es una sucesión de enteros de periodo 8, $L(1, \chi_n)$ es la función L asociada al carácter $\chi_n(m) = (-4n/m)$ y $R_3(n)$ es el número de representaciones primitivas de un entero n como suma de tres cuadrados.

Recuperamos $r_3(n)$:
$$r_3(n) = \sum_{d^2|n} R_3\left(\frac{n}{d^2}\right) \Leftarrow R_3(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d) r_3\left(\frac{n}{d^2}\right)$$

La esfera, descomposición del término de error

Recapitulando,

$$S(R) = S_f(R) - S_f(R, H)$$



$S_f(R)$	→ Poisson	→ suma trigonométrica.
$S_f(R, H)$	→ Fórmula n° clases	→ suma de caracteres.

- Acotar la suma de caracteres tiene buen fin cuando H no es demasiado grande.
- Si H es muy pequeño la ayuda de la regularización desaparece.
- Es imprescindible controlar el tamaño de H .

Antecedentes y contribución

- Mejor estimación conocida $\rightarrow \theta_3 \leq 1,3125$, Heath-Brown, 1999. (Mejora la acotación de la suma de caracteres).
- Observó que GRH \Rightarrow mejor acotación de la suma de caracteres.

Nuestra contribución:

Obtenemos mejoras condicionales de la cota superior de θ_3

¿Cómo?

- 1 Nuevas estimaciones incondicionales de sumas trigonométricas
- 2 Nuevas estimaciones de sumas de caracteres bajo una hipótesis más débil que GRH

Nuevas estimaciones trigonométricas

Mejoramos la parte trigonométrica con \rightsquigarrow **Pares de exponentes.**

Son pares de números reales $(p, q) \in [0, 1/2] \times [1/2, 1]$ tales que

$$\sum_{N < x \leq 2N} e^{2\pi i f(x)} \ll D^p N^q, \quad \text{con } D \sim f'(x).$$

Para usarlos f y sus derivadas se deben “controlar bien”.

Combaten las dificultades de la estimación trigonométrica: la longitud y la oscilación de las sumas.

$$\rightarrow \sum_{N < x \leq 2N} e^{2\pi i f(x)} \stackrel{?}{\ll} D^\epsilon N^{1/2+\epsilon}, \quad \text{con } D \sim f'(x).$$

Conjetura LEP: Para cualquier $\epsilon > 0$, $(\epsilon, 1/2 + \epsilon)$ es un par de exponentes.

Nuevas estimaciones trigonométricas

Mejoramos la parte trigonométrica con \rightsquigarrow **Pares de exponentes.**

Son pares de números reales $(p, q) \in [0, 1/2] \times [1/2, 1]$ tales que

$$\sum_{N < x \leq 2N} e^{2\pi i f(x)} \ll D^p N^q, \quad \text{con } D \sim f'(x).$$

Para usarlos f y sus derivadas se deben “controlar bien”.

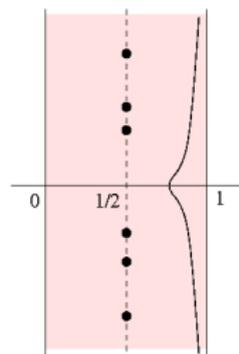
Combaten las dificultades de la estimación trigonométrica: la longitud y la oscilación de las sumas.

$$\rightarrow \sum_{N < x \leq 2N} e^{2\pi i f(x)} \stackrel{?}{\ll} D^\epsilon N^{1/2+\epsilon}, \quad \text{con } D \sim f'(x).$$

Conjetura LEP: Para cualquier $\epsilon > 0$, $(\epsilon, 1/2 + \epsilon)$ es un par de exponentes.

Nuevas estimaciones de sumas de caracteres bajo L_β

Conjetura GRH: La región $\Re(s) > 1/2$ es libre de ceros para cualquier función L de Dirichlet.

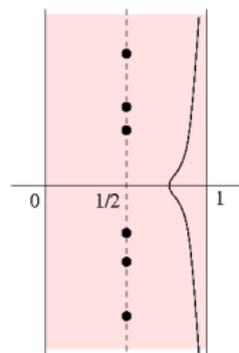


$$i L(\rho, \chi) = 0 \implies \Re \rho = 1/2 ?$$

Conjetura GLH: En $\Re(s) \geq 1/2$ se tiene, $L(s, \chi) = O(q^\epsilon |s|^\epsilon)$ siendo χ un carácter módulo q .

Nuevas estimaciones de sumas de caracteres bajo L_β

Conjetura GRH: La región $\Re(s) > 1/2$ es libre de ceros para cualquier función L de Dirichlet.



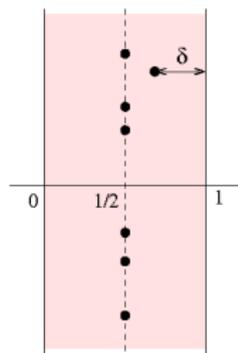
$$i L(\rho, \chi) = 0 \implies \Re \rho = 1/2 ?$$

Conjetura GLH: En $\Re(s) \geq 1/2$ se tiene, $L(s, \chi) = O(q^\epsilon |s|^\epsilon)$ siendo χ un carácter módulo q .

Suponiendo que esto sólo ocurre en $\Re(s) \geq \beta$ con $\beta \in [1/2, 1] \rightarrow L_\beta$.

Nuevas estimaciones de sumas de caracteres bajo L_β

Conjetura L_β : Para $\Re(s) \geq \beta$ y χ un carácter real no principal módulo q ,
 $L(s, \chi) = O(q^\epsilon |s|^\epsilon)$.



Se puede probar que L_β es equivalente a un teorema sobre la densidad de los ceros en rectángulos de altura uno en $\Re(s) > \beta$.

En particular la ausencia de los ceros en $\Re(s) > \beta$ implica L_β .

Resumen

$$\text{Error} \rightarrow \begin{cases} \text{parte trigonométrica} & \equiv \mathcal{T}(R, H) \\ \text{parte de caracteres} & \equiv \mathcal{C}(R, H) \end{cases}$$

$$S(R) = \frac{4\pi}{3}R^3 + O(\mathcal{T}(R, H) + \mathcal{C}(R, H)).$$

$$\text{Acotar } \mathcal{T} \longleftrightarrow T_N = \sum_{N < n \leq 2N} r_3(n) e^{2\pi i R \sqrt{n}} \leftrightarrow \text{Pares de exponentes}$$

$$\text{Acotar } \mathcal{C} \longleftrightarrow \sum_{N < n \leq N+K} \sum_{m \neq \square} \left(\frac{-4n}{m} \right) \leftrightarrow \text{Nuevas estimaciones y } L_\beta$$

Resumen y actualidad

- 1963, J.-R. Chen e I.M. Vinogradov $\rightarrow \theta_3 \leq 1,333\dots$

Con sus estimaciones trigonométricas $\rightarrow T_N \ll N^{5/4+\epsilon}$ en algunos rangos.

Esta acotación procede de un t. diagonal \Rightarrow difícilmente superable.

- 1995, F. Chamizo y H. Iwaniec $\rightarrow \theta_3 \leq 1,3181\dots$

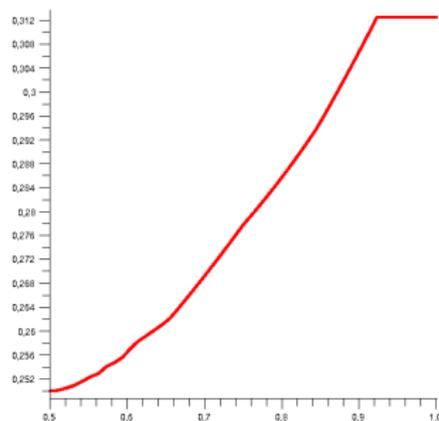
Extendieron los rangos donde $T_N \ll N^{5/4+\epsilon}$, el paso fundamental es la introducción de la suma de caracteres.

- 1999, D.R. Heath-Brown $\rightarrow \theta_3 \leq 1,3125$

- Extendemos el rango donde $T_N \ll N^{5/4+\epsilon}$ en función de γ , una constante que depende de pares de exponentes.

Con LEP $\gamma = 0$ y se conoce $\gamma \leq 0,0786953379$.

Resultados principales



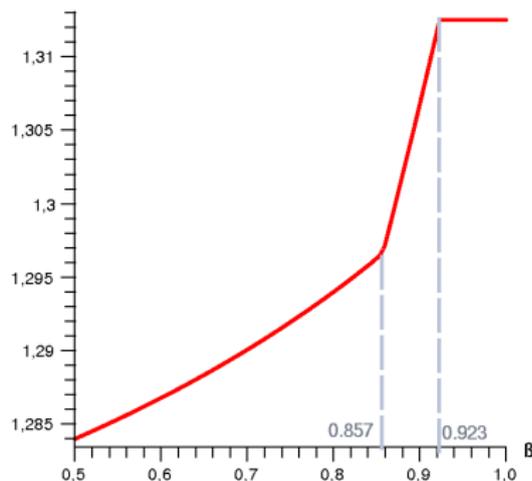
Función $\kappa(\beta)$

Teorema

Sea $\kappa = \kappa(\beta)$ como en la figura. Suponiendo L_β para algún $\beta \in (1/2, 1]$, se tiene, $\theta_3 \leq 1 + \kappa$ siempre que $\gamma \leq 1/2 - 1/8\kappa$.

Resultados principales

Cota superior de θ_3 bajo L_β



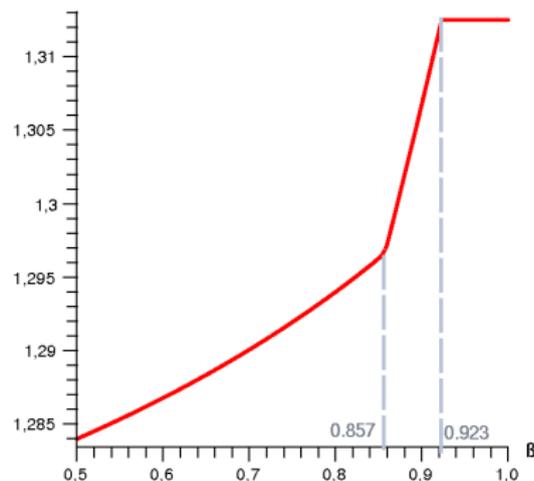
Si $\beta \geq 0,857$, se concluye el mismo resultado que en el Teorema sin utilizar pares de exponentes no probados.

Si $\beta \rightarrow 1/2^+ \Rightarrow \gamma \rightarrow 0^+$, es decir:

Suponiendo LEP ($\gamma = 0$) y GRH, se tiene $\theta_3 \leq 5/4$.

Resultados principales

Cota superior de θ_3 bajo L_β



Si $\beta \geq 0.857$, se concluye el mismo resultado que en el Teorema sin utilizar pares de exponentes no probados.

Si $\beta \rightarrow 1/2^+ \Rightarrow \gamma \rightarrow 0^+$, es decir:

Suponiendo LEP ($\gamma = 0$) y GRH, se tiene $\theta_3 \leq 5/4$.

Ω -resultados

- En los problemas de puntos del retículo, aparte de acotar la discrepancia y estimarla lo mejor posible, O -resultados, existe otro tipo de problema: probar que “cierta estimación (quizá conjetural)” es la mejor y que no puede existir ninguna más precisa.
- Estos problemas se denominan Ω -resultados.

$$f = \Omega(g) \quad \text{si} \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0, \quad \text{donde } g > 0$$

Intuitivamente esto indica que si se diese la estimación $O(g)$ es imposible mejorarla.

Puntos visibles

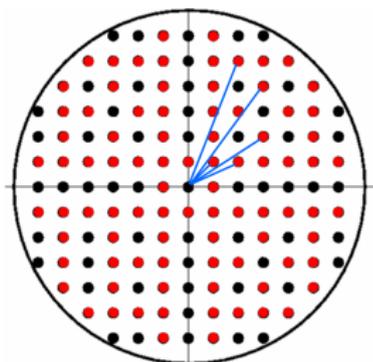
En los problemas de puntos del retículo, además de contar puntos de coordenadas enteras, se pueden contar los que se conocen como puntos visibles desde el origen o puntos primitivos.

Un punto de coordenadas enteras es visible desde el origen si el segmento rectilíneo que une dicho punto con el origen no contiene a ningún otro.

Un punto (n_1, n_2, n_3) será visible si $\text{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1$.

Daremos un Ω -resultado para puntos visibles en la esfera.

Puntos visibles, introducción



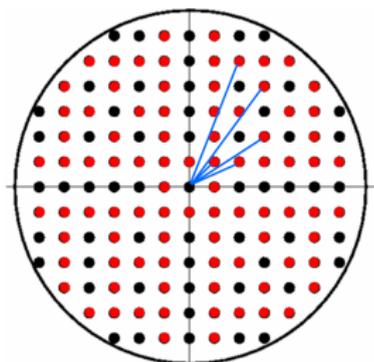
← Puntos visibles en el círculo.

En el problema de los puntos visibles denotaremos al error $E^*(R)$.

El número de puntos visibles en una esfera de radio R se aproxima por $4\pi R^3/3\zeta(3)$, lo que implica

$$E^*(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 : \|\vec{n}\| \leq R, \text{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1\} - \frac{4\pi}{3\zeta(3)} R^3.$$

Puntos visibles, introducción



← Puntos visibles en el círculo.

En el problema de los puntos visibles denotaremos al error $E^*(R)$.

El número de puntos visibles en una esfera de radio R se aproxima por $4\pi R^3/3\zeta(3)$, lo que implica

$$E^*(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 : \|\vec{n}\| \leq R, \text{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1\} - \frac{4\pi}{3\zeta(3)} R^3.$$

Resultado principal

Ω -resultado comparable al que se conoce para todos los puntos.

$$E^*(R) = \Omega(R(\log R)^{1/2}).$$

- Para probarlo evitamos trabajar con el momento de orden dos que en este caso es desconocido.
- Empleamos una serie trigonométrica auxiliar que está correlacionada con $E^*(R)$.

Puntos visibles, método

Probar Ω -resultados \leftrightarrow Momento de orden dos.

La oscilación se controla en media.

$$\frac{1}{R} \int_{R/2}^R E^2(t) dt > \lambda^2(R) \Rightarrow |E(R)| > \lambda(R) \rightarrow E(R) = \Omega(\lambda(R))$$

Nuestro método: escogemos T , serie trigonométrica sencilla,

$$\int_{R/2}^R E^*(t) T(t) dt = \lambda(R) \Rightarrow \int_{R/2}^R (E^*(t))^2 dt \geq \frac{\lambda^2(R)}{\int_{R/2}^R T^2(t) dt}$$

Control sobre λ + norma dos de $T \rightarrow \Omega$ -resultado

Puntos visibles, método

Probar Ω -resultados \leftrightarrow Momento de orden dos.

La oscilación se controla en media.

$$\frac{1}{R} \int_{R/2}^R E^2(t) dt > \lambda^2(R) \Rightarrow |E(R)| > \lambda(R) \rightarrow E(R) = \Omega(\lambda(R))$$

Nuestro método: escogemos T , serie trigonométrica sencilla,

$$\int_{R/2}^R E^*(t) T(t) dt = \lambda(R) \Rightarrow \int_{R/2}^R (E^*(t))^2 dt \geq \frac{\lambda^2(R)}{\int_{R/2}^R T^2(t) dt}$$

Control sobre λ + norma dos de $T \rightarrow \Omega$ -resultado

Relación de $E(R)$ y $E^*(R)$

Sea $E(R)$ el término de error en el problema de la esfera,

$$E(R) = \sum_{1 \leq n \leq R^2} r_3(n) - \frac{4\pi}{3} R^3.$$

La relación entre $E(R)$ y $E^*(R)$ es sencilla:

Lema

Para $R > t > 1$

$$E^*(t) \sim \sum_{d \leq R} \mu(d) E(t/d).$$

Puntos visibles, método

¿Por qué funciona multiplicar por la serie trigonométrica? Se controla la oscilación de la función de Möbius.

$$E^*(R) \leftrightarrow \sum \mu(d)r_3(n)e^{2\pi iR\sqrt{n}/d} \quad T \leftrightarrow \sum e^{2\pi iR\sqrt{m}}$$

$$E^*(R) \cdot T = \sum_d \sum_{m,n} \mu(d)r_3(n)e^{2\pi i(R\sqrt{n}/d - R\sqrt{m})}$$

Los términos diagonales, $n/d^2 = m$ son los que más contribuyen:

$$\int E^*(R) \cdot T \rightarrow \sum_n \sum_{d^2|n} \mu(d)r_3(n)$$

$$\cdot \sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n) \text{ positiva } \checkmark \quad \cdot \text{ controlaremos } \sum_n \mu^2(n)r_3(n) \checkmark$$

Problema de los elipsoides racionales

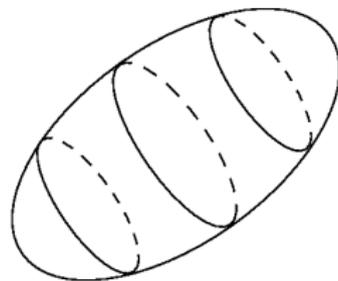
En este problema contamos puntos de coordenadas enteras en elipsoides racionales (con coeficientes racionales).

- De nuevo, la dificultad es estimar la discrepancia, $E(R)$.

En general,

$$E(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : \vec{n}/R \in \mathcal{B}\} - \text{Vol}(\mathcal{B})R^d$$

$\mathcal{B} \equiv$ cuerpo convexo suave que contiene al origen.



Puntos del retículo en cuerpos convexos. Historia

Las estimaciones para $E(R)$ se escriben como en el problema de la esfera,

$$E(R) = O(R^{\theta_3 + \epsilon}) \text{ si } R \rightarrow \infty.$$

Nos centramos en $d = 3$.

- La mejor acotación para cuerpos convexos suaves generales: $\theta_3 \leq 1,465 \dots$, W. Müller, 2000.
- Existe una gran diferencia entre esta acotación y la de la esfera.

Sin embargo, si los cuerpos convexos cumplen determinados requisitos se pueden dar resultados intermedios:

- Si los cuerpos son de revolución $\rightarrow \theta_3 \leq 1,375$, F. Chamizo, 1998.

Puntos del retículo en cuerpos convexos. Historia

Las estimaciones para $E(R)$ se escriben como en el problema de la esfera,

$$E(R) = O(R^{\theta_3 + \epsilon}) \text{ si } R \rightarrow \infty.$$

Nos centramos en $d = 3$.

- La mejor acotación para cuerpos convexos suaves generales: $\theta_3 \leq 1,465 \dots$, W. Müller, 2000.
- Existe una gran diferencia entre esta acotación y la de la esfera.

Sin embargo, si los cuerpos convexos cumplen determinados requisitos se pueden dar resultados intermedios:

- Si los cuerpos son de revolución $\rightarrow \theta_3 \leq 1,375$, F. Chamizo, 1998.

Puntos del retículo en elipsoides racionales

Objetivo: acotar superiormente la discrepancia,

$$E(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 : Q(\vec{n}) \leq R^2\} - \text{Vol}(\mathcal{E}),$$

Q forma cuadrática definida positiva con coeficientes racionales.

- Para $d \geq 4$ el problema está totalmente resuelto. Los únicos casos abiertos son $d = 2$ y $d = 3$.
- Se sabe que $E(R) = \Omega(R^{d-2})$ si $d \geq 3 \Rightarrow \theta_3 \geq 1$.
- Mejor acotación superior $\rightarrow \theta_3 \leq 1,333\dots$
- Mejor cota general: $\theta_3 \leq 1,465\dots$ esfera: $\theta_3 \leq 1,3125$

Puntos del retículo en elipsoides racionales

Objetivo: acotar superiormente la discrepancia,

$$E(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 : Q(\vec{n}) \leq R^2\} - \text{Vol}(\mathcal{E}),$$

Q forma cuadrática definida positiva con coeficientes racionales.

- Para $d \geq 4$ el problema está totalmente resuelto. Los únicos casos abiertos son $d = 2$ y $d = 3$.
- Se sabe que $E(R) = \Omega(R^{d-2})$ si $d \geq 3 \Rightarrow \theta_3 \geq 1$.
- Mejor acotación superior $\rightarrow \theta_3 \leq 1,333\dots$
- Mejor cota general: $\theta_3 \leq 1,465\dots$ esfera: $\theta_3 \leq 1,3125$

¿A que se debe esta disparidad? ejes racionales, caracteres ...

Aportación, resultado principal

Teorema

Sea $\mathcal{E} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : Q(\vec{x}) \leq R^2\}$ donde Q es una forma cuadrática definida positiva con coeficientes racionales, entonces, $\theta_3 \leq 1,3125$.

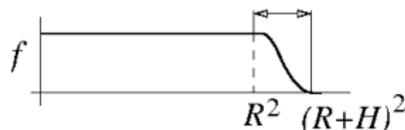
- Se consigue el mismo resultado que en la esfera.

Problema de los elipsoides racionales

La idea inicial es similar a la de la esfera: el n° de puntos del retículo en elipsoides racionales se expresa como una suma,

$$S_Q(R) = \sum_{n \leq R^2} r_Q(n)$$

La suma se regulariza \Rightarrow se prolonga un poco más.



$$S_Q(R) = S_f(R) - S_f(R, H),$$

$$S_f(R) = \sum_{n \leq (R+H)^2} r_Q(n) f(n) \quad \text{y} \quad S_f(R, H) = \sum_{R^2 \leq n \leq (R+H)^2} r_Q(n) f(n).$$

Problema de los elipsoides racionales

$S_f(R)$

Poisson \Rightarrow T. Principal + sumas trigonométricas (oscilación)

Es necesario controlar el tamaño de H .

$S_f(R, H)$

No hay fórmula para el n° de clases:

$$r_Q(n) \leftrightarrow L(1, \chi)$$

Pero...

$r_Q(n) \leftrightarrow$ coeficientes de una forma modular

$S_f(R, H) \leftrightarrow$ sumas cortas de coeficientes de formas modulares.

Elipsoides racionales, descomposición de la parte modular

- $r_Q(n) \rightarrow \theta_Q(z) = \sum r_Q(n)e^{2\pi inz}$ forma no cuspidal.

$$r_Q(n) \rightsquigarrow r(n, \text{gen } Q)$$

$r(n, \text{gen } Q) \equiv$ promedio del n° de representaciones de n por todas las formas cuadráticas pertenecientes al mismo género que Q .

- $r(n, \text{gen } Q) \rightarrow \theta_{\text{gen}}(z) = \sum r(n, \text{gen } Q)e^{2\pi inz}$ f. no cuspidal.

$$\sum r_Q(n)e^{2\pi inz} - \sum r(n, \text{gen } Q)e^{2\pi inz} = \sum a_n e^{2\pi inz} = f(z),$$

siendo $f(z)$ una forma cuspidal de peso $3/2$.

Es decir, los coeficientes se descomponen en una parte cuspidal y en otra no cuspidal:

$$r_Q(n) = r(n, \text{gen } Q) + a_n.$$

Elipsoides racionales, descomposición de la parte modular

- **Parte no cuspidal:**

Por la fórmula de masa de Siegel:

$$r(n, \text{gen } Q) = C\sqrt{n} \prod_p \delta_p(n),$$

donde $\delta_p(n)$ son las densidades p -ádicas de las soluciones de $Q(\vec{x}) = n$.

$$\prod_p \delta_p(n) \leftrightarrow L(1, \chi)$$

- Por tanto, $r(n, \text{gen } Q)$ se puede expresar como una suma corta de caracteres. Se acota como lo hizo D.R. Heath-Brown.
- **Parte cuspidal:** a_n se controla con diferentes técnicas de formas modulares.

Relación con el procedimiento del problema de la esfera

- Esfera:

$$\text{Error} \rightarrow \begin{cases} \text{caracteres aditivos (sumas trigonométricas)} \\ \text{caract. multiplicativos (sumas de caracteres)} \end{cases}$$

- Elipsoides racionales:

$$\text{Error} \rightarrow \begin{cases} \text{caracteres aditivos (sumas trigonométricas)} \\ \text{sumas cortas de coeficientes de f. modulares} \\ \text{caract. multiplicativos (sumas de caracteres)} \end{cases}$$



En el error dominan la parte aditiva y multiplicativa \Rightarrow mismo resultado que en la esfera.

Descomposición del término de error

En resumen,

$$E(R) = \mathcal{T}(R, H) + \mathcal{C}(R, H) + \mathcal{M}(R, H),$$

- $\mathcal{T}(R, H) \leftrightarrow$ sumas trigonométricas.
- $\mathcal{C}(R, H) \leftrightarrow$ sumas de caracteres
- $\mathcal{M}(R, H) \leftrightarrow$ formas modulares.

El tamaño de H se puede elegir como en la esfera.

La suma modular

Estimamos la contribución modular,

$$\mathcal{M} \longrightarrow \sum_{R^2 < n < (R+H)^2} a_n.$$

La acotación está directamente relacionada con la estimación de los coeficientes de Fourier de las f. modulares de peso semientero.

Controlar la suma modular \leftrightarrow obtener una cota para coeficientes de formas cuspidales de peso $3/2$.

Lema

Sea $f(z) = \sum a_n e^{2\pi i n z} \in \mathcal{S}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$ tal que su correspondencia de Shimura es una forma cuspidal, entonces $a_n \ll_{f, \epsilon} n^{13/28 + \epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$.

Cota para los coeficientes de formas cuspidales de peso $3/2$

Conjetura de Ramanujan-Petersson: Para todo $\epsilon > 0$ y toda forma cuspidal

$$a_n = O(n^{(k-1)/2+\epsilon}).$$

La conjetura se enunció para peso entero pero después ha sido extendida a peso semientero para libres de cuadrados.

En el caso de peso entero ($k \geq 2$) la conjetura ya está probada, P. Deligne, 1972.

¿Y cuando el peso semientero? → Hay algo más que la conjetura.

Cota de W. Duke y H. Iwaniec: $a_n = O(n^{13/28+\epsilon}).$

Es válida para formas modulares cuspidales de peso $3/2$ con n libre de cuadrados.

La suma modular, idea de la demostración del lema

- Si n no es libre de cuadrados: \rightarrow no se puede utilizar directamente la cota de W. Duke y H. Iwaniec.
- Caso $n = td^2$ con t libre de cuadrados y d coprimo con D .

Correspondencia de Shimura: esencialmente relaciona,

$$a_n \begin{cases} \longleftrightarrow a_t \\ \longleftrightarrow b_d \end{cases} \equiv \text{coeficiente de una forma de peso 2.}$$

$a_t \leftarrow$ cota de W. Duke e H. Iwaniec

$b_d \leftarrow$ cota de P. Deligne (Eichler, Shimura).

El Lema es una extensión de la cota de Duke-Iwaniec.

La suma modular y el resultado final

- Para aplicar el resultado a nuestro problema hay que asegurarse de estar en las hipótesis del lema \rightarrow que la correspondencia de Shimura sea cuspidal.
- Para ello se resta a $f(z)$ una combinación lineal de funciones theta

$$\Rightarrow f^*(z) = \sum a_n^* e^{2\pi inz} \text{ con corresp. de Shimura cuspidal.}$$

En el rango $R^2 \leq n < (R + H)^2$ se tiene $a_n = a_n^*$ excepto para un subconjunto de subíndices de cardinal acotado.

Finalmente, para demostrar el resultado principal basta unir las acotaciones de las tres partes y elegir H .