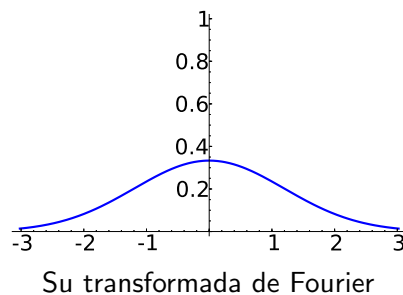
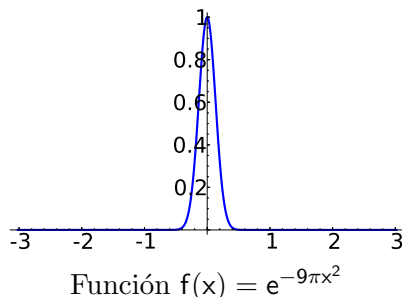


Incertidumbre en análisis armónico

FERNANDO CHAMIZO LORENTE

Notación: La normalización de la transformada de Fourier es $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e(-x\xi) dx$ con $e(t) = e^{2\pi it}$, que es la habitual en matemáticas pero no tanto en física.

Si una regla tiene divisiones de un milímetro no podemos medir con mucha más precisión. De la misma forma, si tenemos armónicos que dan saltos de longitud λ parece claro que no tendremos capacidad para estudiar con precisión lo que ocurre a escalas menores. Sin embargo hay que poner ciertas acotaciones a esta afirmación porque con dos reglas con divisiones de $6mm$ y $10mm$ podemos medir $2mm$ (porque $2 = 2 \cdot 6 - 10$) y en la explotación de este hecho se basaba en parte el funcionamiento de las reglas de cálculo [BS08, §11] que durante más de cien años fueron un instrumento fundamental para cálculos científicos. Quizá, entonces, con unos pocos armónicos de baja frecuencia podamos representar aspectos locales precisos de las funciones.



Diferentes formas del *principio de incertidumbre* afirman que tal esperanza es vana. En el análisis de Fourier clásico, hay una oposición entre la localización de una función y la de su transformada de Fourier. Es decir, como parece lógico, no podemos ver detalles pequeños sólo con frecuencias bajas. Este hecho aparece en muchos contextos de la Física y las Matemáticas pero, debido a la divulgación y a su importancia, para el gran público el nombre está ligado a la mecánica cuántica y alcanza tintes filosóficos. Cuando oímos que es imposible medir la posición y el momento de una partícula, quizá deberíamos tener presente que en física cuántica no hay partículas como las clásicas (bolitas muy pequeñas) sino que llevan asociadas una especie de ondas.

Una forma muy débil del principio de incertidumbre es que una función y su transformada de Fourier se escalan a través de la siguiente relación cuya prueba es un ejercicio sencillo:

$$(1) \quad g(x) = \lambda f(\lambda x) \quad \implies \quad \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi/\lambda) \quad \text{para } \lambda > 0.$$

Digamos para fijar ideas que f y \widehat{f} son funciones no negativas dadas que tienen el 90% de sus masas (de su norma L^1) en el intervalo $[-2013, 2013]$, entonces g y \widehat{g} tienen el 90% de sus masas, respectivamente, en los intervalos $[-2013/\lambda, 2013/\lambda]$ y $[-2013\lambda, 2013\lambda]$. Si al variar λ tratamos de localizar g encogiendo el primer intervalo, el segundo se alarga y viceversa.

Otra versión muy débil, esta vez sin escalamientos, es que f y \widehat{f} no pueden tener ambas soporte compacto. Una variante en \mathbb{T} es que una función no nula 1-periódica con sólo un número finito de coeficientes de Fourier no nulos no se puede anular en un intervalo. Esto último se sigue, tras el cambio $e(x) = z$ (los ingenieros hablan de la *transformada* z), de que una función racional no se anula en un intervalo. Lo primero es en cierta manera similar: si f tiene soporte compacto, \widehat{f} define una función entera que no puede anularse en un intervalo (ni en ningún conjunto con un punto de acumulación).

Sabemos que para $f(x) = e^{-\pi x^2}$ se tiene $f = \widehat{f}$. Por otro lado, sin mirar la fórmula explícita, (1) asegura que las gaussianas que decaen como $e^{-\alpha\pi x^2}$ tienen transformadas que decaen como $e^{-\pi x^2/\alpha}$. Un bello teorema debido a G.H. Hardy [Har] afirma que esto que ocurre para las gaussianas, establece un límite para lo que sucede con cualquier función.

Teorema 1 (Hardy). *Si $f(x) = O(e^{-\alpha\pi x^2})$ y $\widehat{f}(x) = O(e^{-\beta\pi x^2})$ con $\alpha, \beta > 0$ y f no es idénticamente nula, entonces $\alpha\beta \leq 1$. Además la igualdad se da únicamente cuando f es un múltiplo de $e^{-\pi x^2}$.*

Demostración (con una laguna). Por (1) podemos suponer $\alpha = 1$. En estas condiciones, $\beta > 1$ implica $\widehat{f}(x) = o(e^{-\pi x^2})$ y la última parte del enunciado probaría que no hay ninguna función con estas características. Es decir, basta probar que si $f(x)$ y $\widehat{f}(x)$ son $O(e^{-\pi x^2})$, f es un múltiplo de $e^{-\pi x^2}$.

Bajo la hipótesis $f(x) = O(e^{-\pi x^2})$, la función

$$F(z) = e^{\pi z^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-tz} dt \quad \text{con } z = x + iy \in \mathbb{C},$$

está bien definida, porque el integrando es $O(e^{-\pi t^2 + 2\pi ty})$. Además es entera.

Si $y = 0$, usando $\widehat{f}(x) = O(e^{-\pi x^2})$ se tiene $F(z) = e^{\pi z^2} O(e^{-\pi x^2}) = O(1)$. Por otra parte, si $x = 0$, $F(z) = e^{-\pi y^2} O\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 + 2\pi ty} dt\right) = O(1)$, gracias al cambio $t \mapsto t + y$.

Si una función entera está acotada en los ejes real e imaginario entonces por el principio del máximo aplicado a cada uno de los cuadrantes (aquí está la laguna), F está acotada en cada uno de ellos, y una función entera acotada es constante. Por consiguiente, para $z = x$ real, $\text{cte} = e^{\pi x^2} \widehat{f}(x)$ y despejando y tomando antitransformadas, se obtiene $f(x) = \text{cte} e^{-\pi x^2}$. \square

La laguna de esta demostración, tomada del blog de T. Tao, está en que se ha aplicado el principio del máximo en una región no acotada. La solución de este problema, que puede verse en dicho blog o en [DM72, §3.2], pasa por utilizar el *principio de Pragmén-Lindelöf*, el cual esencialmente dice que el principio del máximo es cierto en regiones no acotadas siempre que la función tenga un crecimiento

controlado. Lo que afea la solución es que la hipótesis sobre el crecimiento no se cumple por un poco, y hay que encoger ligeramente los sectores y multiplicar por un factor e^{icz^2} para aplicar el principio de Pragmén-Lindelöf sin hacer trampas.

La versión matemática más conocida del principio de incertidumbre es la *desigualdad de Heisenberg*, que a pesar de la denominación, no se encuentra en el famoso trabajo de W. Heisenberg en mecánica cuántica, sino que es algo posterior.

Teorema 2 (Desigualdad de Heisenberg). *Para $a, b \in \mathbb{R}$ y $f \in L^2(\mathbb{R})$*

$$16\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\xi-b)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \|f\|_2^4$$

siempre que las integrales existan. Además la igualdad se da sólo si f es un múltiplo de $e(bx)e^{-c(x-a)^2}$ para cierto $c > 0$.

Si consideramos el caso $\|f\|_2 = 1$, que es el que aparece en mecánica cuántica, entonces las medidas $|f(x)|^2 dx$ y $|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$ son medidas de probabilidad y la desigualdad de Heisenberg afirma que el producto de las varianzas de las medidas correspondientes a f y \widehat{f} es siempre mayor que $1/16\pi^2$.

Demostración. Definiendo $f(x) = g(x-a)e(bx)$, un sencillo cálculo prueba que $\widehat{f}(\xi)$ es $\widehat{g}(\xi-b)e(a(b-\xi))$ y entonces la desigualdad de Heisenberg equivale a

$$16\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \geq \|g\|_2^4,$$

es decir, al caso $a = b = 0$.

Supongamos primero que g es de la clase de Schwartz para evitar consideraciones de convergencia. Integrando por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x (|g(x)|^2)' dx = -2\Re \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) \overline{g'(x)} dx.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz primero, y después la identidad de Parseval, prueban

$$\|g\|_2^4 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2 dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}'(\xi)|^2 d\xi$$

y basta usar $\widehat{f}(\xi) = (2\pi i \xi)^{-k} \widehat{f^{(k)}}(\xi)$. La desigualdad es una igualdad si y sólo si xg y g' son proporcionales y resolviendo una simple ecuación diferencial, esto equivale a que g sea una gaussiana.

Para extender la prueba a una función g que no sea tan regular, se aproxima por funciones g_n de la clase de Schwartz que cumplan $\lim \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2) |\widehat{g}(\xi) - \widehat{g}_n(\xi)|^2 d\xi = 0$ y se hace la prueba para cada una de ellas. Véanse los detalles en [DM72, 116]. \square

El hecho de que las gaussianas sean el caso límite en el principio de incertidumbre, sugiere que dan los mejores filtros en cuanto a localización. Seguramente por ello no debiera sorprendernos que en programas de retoque fotográfico exista el “desenfoque gaussiano”.

Hay una variante del principio de incertidumbre que es una especie de desigualdad de Heisenberg pero en intervalos finitos. Su aspecto es

$$\arccos \frac{\alpha}{\|f\|_2} + \arccos \frac{\beta}{\|f\|_2} \geq F(ab) \quad \text{con} \quad \alpha = \left(\int_{-a}^a |f|^2 \right)^{1/2} \text{ y } \beta = \left(\int_{-b}^b |f|^2 \right)^{1/2}$$

donde la función F es difícil de describir porque viene dada por el primer autovalor de un operador integral [DM72, §2.9].

Después de estos resultados, cabe preguntarse qué se puede decir en el caso finito. Recordemos que en el contexto general de los grupos abelianos finitos G se tiene que si $f, f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$, se verifica la *fórmula de inversión*

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi(g),$$

y la *identidad de Parseval*

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{|G|} \langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle, \quad \text{en general} \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \langle \widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \rangle.$$

Un enunciado bastante sencillo (tomado de [Ter99, §14]), afirma que en este contexto f y \widehat{f} no se pueden anular ambas muchas veces.

Teorema 3. *Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ no idénticamente nula, con G un grupo abeliano finito. Entonces*

$$|\text{supp } f| |\text{supp } \widehat{f}| \geq |G|$$

donde supp indica el conjunto de puntos donde no se anula una función.

Demostración. Claramente

$$\langle f, f \rangle \leq |\text{supp } f| \max_{g \in G} |f(g)|^2$$

Por la fórmula de inversión y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\max_{g \in G} |f(g)|^2 \leq \left(\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)| \right)^2 \leq \frac{1}{|G|^2} \sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)|^2 |\text{supp } \widehat{f}|.$$

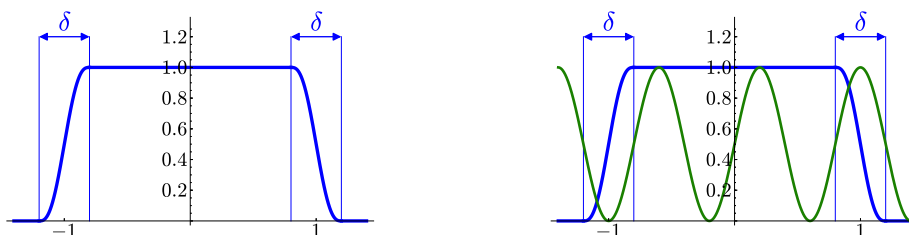
Sustituyendo esta desigualdad en la anterior y aplicando la identidad de Parseval,

$$\langle f, f \rangle \leq |\text{supp } f| |\text{supp } \widehat{f}| \frac{\langle f, f \rangle}{|G|}.$$

Finalmente, los términos $\langle f, f \rangle$ se cancelan porque f no es idénticamente nula. \square

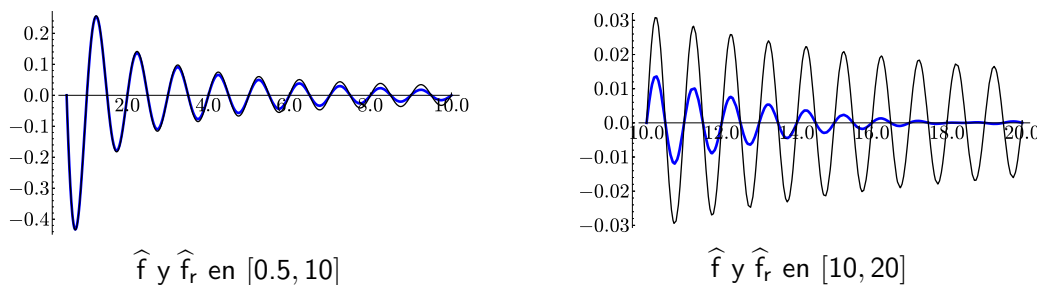
Veamos algunas figuras que muestran la idea del principio de incertidumbre como límite de nuestra precisión.

Supongamos que tenemos la función característica del intervalo $[-1, 1]$, digamos f , y para aplicar en buenas condiciones el análisis de Fourier hacemos una regularización $f_r \in C^\infty$ tal que $f = f_r$ excepto en los intervalos $[-1 - \delta/2, -1 + \delta/2]$ y $[1 - \delta/2, 1 + \delta/2]$. Las ondas de longitud de onda mayor que δ se saltan los intervalos modificados y no perciben el cambio en f . Con una estructura como la del dibujo, $\widehat{f}(\xi)$ y $\widehat{f}_r(\xi)$ serán parecidas para ξ mucho menor que δ^{-1} . Lo mismo ocurrirá con los coeficientes de Fourier en un intervalo que contenga al soporte de f_r . Por otro lado, gracias a $\widehat{f}(\xi) = (2\pi i \xi)^{-k} \widehat{f^{(k)}}(\xi)$ sabemos que a la larga, \widehat{f}_r decaerá a toda velocidad, más rápido que el inverso de cualquier potencia.



La conclusión es que, usando transformadas de Fourier, no podemos distinguir la función característica de su regularización hasta que no consideramos frecuencias grandes, al menos de tamaño inverso de la precisión δ que buscamos. Ahí está la incertidumbre.

Estos son unos gráficos reales para $\delta = 0.1$ empleando una regularización C^3 .

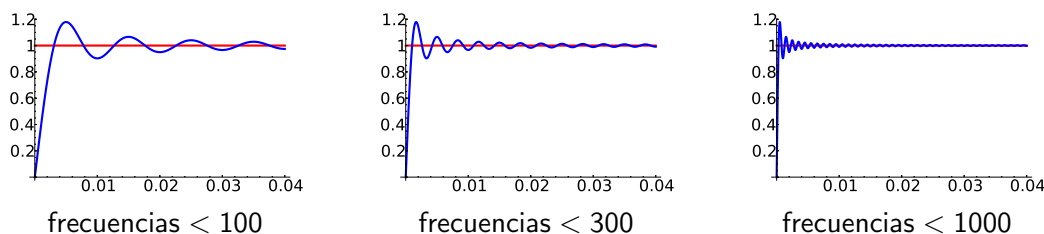


En el primero apreciamos que hay pocas diferencias entre \widehat{f} y \widehat{f}_r en los primeros valores. Estas diferencias se van acentuando según llegamos a las frecuencias que empiezan a ver a tamaño δ , que son las comparables a $\delta^{-1} = 10$. En el intervalo $[10, 20]$ ya notamos una diferencia clara, con la transformada de Fourier de la regularización mucho menor que la de la función característica.

La localización exacta de una discontinuidad requiere precisión infinita mientras que, según lo anterior, si tomamos frecuencias hasta δ^{-1} nuestra vista está limitada a tamaño δ . En principio a escala menor puede ocurrir cualquier cosa. El *fenómeno de Gibbs* consiste en el curioso hecho de que, por muchos términos que tomemos en la serie de Fourier, en presencia de una discontinuidad

aislada de salto, en el intervalo incierto que contiene a la singularidad, siempre hay un “bulto” de altura aproximada del 9% del tamaño del salto.

Por ejemplo, estos son detalles de la serie de Fourier en $[-1/2, 1/2]$ de de la función signo $f(x) = \text{sgn}(x)$.



Cualquier función que sea regular salvo una discontinuidad aislada de salto, se puede escribir como $g(x) + \lambda \text{sgn}(x - \mu)$ con g regular, por tanto basta entender el fenómeno para $f(x) = \text{sgn}(x)$.

Proposición 4 (Fenómeno de Gibbs). *Para $f(x) = \text{sgn}(x)$, se cumple*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{|x| < 1/(2N+1)} |f(x) - S_N f(x)| = \int_{-1}^1 \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} dx - 1 = 0.17897974 \dots$$

Nótese que, como cabe esperar por lo que hemos visto hasta ahora, el bulto se manifiesta en un intervalo de anchura N^{-1} . Es fácil ver siguiendo la demostración, que el resultado es idéntico cambiando $1/(2N + 1)$ por cualquier cantidad mayor.

Demostración. Por simetría, nos podemos centrar en el caso $x \geq 0$. Sabemos que para cualquier función, $S_N f = D_N * f$ donde D_N es el núcleo de Dirichlet

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e(nx) = \frac{\text{sen}(2\pi(N + 1/2)x)}{\text{sen}(\pi x)}.$$

Particularizando en la función signo, se tiene

$$S_N f(x) = - \int_x^{x+1/2} D_N(t) dt + \int_{x-1/2}^x D_N(t) dt.$$

Usando que D_N es par, esto se puede reescribir como

$$S_N f(x) = \int_{-x}^x \frac{\text{sen}((2N + 1)\pi t)}{\text{sen}(\pi t)} dt - \int_{-x-1/2}^{x-1/2} \frac{\text{sen}((2N + 1)\pi t)}{\text{sen}(\pi t)} dt.$$

Integrando por partes (recuérdese que x es pequeño), la segunda integral es $O(N^{-1})$.

Claramente el supremo de la primera integral se alcanza para $x = 1/(2N+1)$ porque el integrando es positivo en el rango de x . Finalmente,

$$\int_{-1/(2N+1)}^{1/(2N+1)} \frac{\text{sen}((2N+1)\pi t)}{\text{sen}(\pi t)} dt = \int_{-1}^1 \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} dx$$

se reduce a un simple cambio de variable. □

Es fácil comprender que el fenómeno de Gibbs es relevante en la práctica pues al reconstruir una señal o una imagen que tenga cambios bruscos, provoca que aparezcan detalles inexistentes, lo que, sobre todo en el tratamiento de imágenes, se llaman *artifacts*.

Referencias

- [BS08] J. Bryant and C. Sangwin. *How round is your circle?* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008. Where engineering and mathematics meet.
- [DM72] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Academic Press, New York, 1972. Probability and Mathematical Statistics, No. 14.
- [Har] G. H. Hardy. A Theorem Concerning Fourier Transforms. *J. London Math. Soc.*, S1-8(3):227.
- [Ter99] A. Terras. *Fourier analysis on finite groups and applications*, volume 43 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.