

# Un poco de representaciones, grupos de Lie compactos y autovalores de laplacianos

Fernando Chamizo (29/Oct/2017)

## Índice

1. Representaciones, ¿para qué? . . . . .	2
2. Análisis armónico con representaciones . . . . .	5
3. Grupos de Lie y autofunciones . . . . .	9
4. El caso $SU(2)$ totalmente a mano . . . . .	12
5. El álgebra de Lie de un grupo de Lie . . . . .	15
6. Toros maximales y subálgebras de Cartan . . . . .	19
7. Representaciones del álgebra de Lie . . . . .	22
8. La forma de Killing y métricas riemannianas . . . . .	23
9. Pesos, raíces y algunos ejemplos . . . . .	26
10.El teorema del peso más alto . . . . .	32
11.La fórmula de los caracteres de Weyl . . . . .	36
12.El laplaciano y sus autovalores . . . . .	41
13.Guía de lectura (opiniones) . . . . .	46
Referencias . . . . .	48
Índice alfabético . . . . .	51

# 1. Representaciones, ¿para qué?

En la versión simplificada que veremos aquí, una *representación* de un grupo  $G$  es una forma de asignar a cada elemento de  $G$  una matriz cuadrada no singular preservando la ley de grupo. Con más precisión, una representación  $\pi$  es un homomorfismo  $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$  con  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita. Se dice que  $d_\pi = \dim V$  es la dimensión de la representación. Nos estamos olvidando de las de dimensión infinita, que tienen una importancia secundaria para los grupos de Lie compactos que trataremos. Dando por hecho que el cuerpo es  $\mathbb{C}$ , se tendrá  $V \cong \mathbb{C}^{d_\pi}$  y podemos pensar que las imágenes de las representaciones son matrices complejas  $d_\pi \times d_\pi$ . Sin embargo es importante considerar las representaciones salvo isomorfismos de  $V$ . Las representaciones que tienen matrices  $\pi(g)$  y  $C^{-1}\pi(g)C$  con  $C$  una matriz constante (de cambio de base), corresponderían a tal isomorfismo y se dice que son *equivalentes* indexrepresentación!equivalente. Todo el rato nos ocuparemos de representaciones no equivalentes.

Por ejemplo, el grupo de permutaciones  $S_3$  está generado por las transposiciones  $(1, 2)$  y  $(2, 3)$  y hay tres representaciones no equivalentes importantes (ya veremos en qué sentido) con  $d_{\pi_1} = d_{\pi_2} = 1$ ,  $d_{\pi_3} = 2$ , especificadas por

	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
(1)	(1)	(-1)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	(1)	(-1)	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

Por supuesto hay representaciones de cualquier dimensión, aunque solo sea tomar siempre la matriz identidad. También está claro que la asignación no puede ser arbitraria, por ejemplo si  $\tau$  es una transposición  $M = \pi(\tau)$  debe cumplir  $M^2 = \pi(\tau\tau) = \pi(e) = I$ . Estas tres representaciones tienen que ver con objetos conocidos de cursos básicos de álgebra:  $\pi_1$  es el homomorfismo trivial,  $\pi_2$  da el signo de la permutación y  $\pi_3$  corresponde al isomorfismo entre  $S_3$  y el grupo (diédrico) de movimientos que dejan fijo un triángulo equilátero con vértices etiquetados con 1, 2 y 3.

Las representaciones sirven para indicar simetrías bajo la acción del grupo, incluso aunque actúe sobre sí mismo. Esto es interesante ya sin salirse del plano puramente algebraico, así en [21, p.255] leemos que para el grupo monstruo, los caracteres (que determinan las representaciones) se conocían antes de saber construir el propio grupo. Aquí nos centraremos en el ámbito analítico. Es obligado mencionar que uno de los mayores triunfos de la teoría de representaciones está en la física cuántica, especialmente en la física de partículas. Uno de los episodios más famosos es que la partícula  $\Omega^-$  fue conjeturada en 1962 por Gell-Mann porque solo se conocían 9 partículas asociadas a una representación de  $SU(3)$  con  $d_\pi = 10$  y fue descubierta en un acelerador dos años después [13, §3.9]. En un ámbito general, el *teorema de*

*Wigner* ofrece un fundamento teórico para que las simetrías de sistemas cuánticos se expresen mediante representaciones.

Todo grupo finito es isomorfo a uno de matrices (por el teorema de Cayley, usando matrices de permutación) y los grupos de Lie compactos más famosos son también grupos de matrices, por tanto parece inútil “representar” estos grupos con otras matrices de distintos tamaños. ¿Para qué buscar homomorfismos si ya tenemos un isomorfismo en un grupo de matrices? Vamos a ilustrar la situación con dos ejemplos, el primero de ellos muy elemental desde el punto de vista matemático.

En mecánica cuántica, el estado de un sistema físico se describe por una *función de ondas*  $\Psi$  normalizada para que su cuadrado integre uno mientras que una fase constante queda indeterminada. Así  $\Psi$ ,  $-\Psi$  y en general  $e^{i\alpha}\Psi$ , indican lo mismo. Consideremos la función de ondas que corresponde a  $n$  partículas idénticas  $\Psi = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Al ser idénticas, permutarlas no debe cambiar el estado y por tanto lo más que puede ocurrir es que aparezca una fase. Definamos

$$(2) \quad \pi : \sigma \longmapsto (e^{i\alpha_\sigma}) \quad \text{donde} \quad \sigma \in S_n \text{ y } \Psi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = e^{i\alpha_\sigma} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Esto determina una representación  $\pi : S_n \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ , la imagen es de hecho  $U(1) \cong S^1$ , porque aplicar  $\sigma \circ \tau$  es lo mismo que aplicar  $\tau$  y después  $\sigma$ . Las representaciones unidimensionales de  $S_n$  son la trivial y el signo, como  $\pi_1$  y  $\pi_2$  antes, lo cual implica que hay dos tipos de sistemas de  $n$  partículas idénticas: los que tienen  $\Psi$  simétrica al intercambiar dos de ellas y las que la tienen antisimétrica. En física se habla respectivamente de *bosones* y de *fermiones*.

El segundo ejemplo no lo desarrollaremos por completo aquí y es anticipo de uno de los temas de estas notas. Se refiere al problema de autovalores en la esfera  $S^2$

$$(3) \quad -\Delta = \lambda f \quad \text{con} \quad \Delta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Más allá de la fórmula complicada para  $\Delta$  vamos a abstraer que viene de restringir a  $S^2$  el laplaciano de  $\mathbb{R}^3$ , que es invariante por movimientos. Entonces en la esfera  $\Delta$  es invariante por  $G = \text{SO}(3)$ . Concretamente, para cada rotación  $g \in G$  se cumple  $\Delta(f \circ g) = (\Delta f) \circ g$ , de aquí

$$(4) \quad -\Delta f = \lambda f \quad \Rightarrow \quad -\Delta(f \circ g) = \lambda f \circ g.$$

Es decir,  $G$  conserva el autoespacio  $V$  correspondiente a un autovalor fijado  $\lambda$ . Si identificamos la rotación  $g$  con su matriz, tenemos una aplicación

$$(5) \quad \pi(g) : V \longrightarrow V \quad \text{con} \quad (\pi(g)f)(\vec{x}) = f(\vec{x}g)$$

donde convenimos que  $\vec{x}$  es un vector fila unitario, que expresa el punto de la esfera. Esto define una representación porque  $\pi(g_1 g_2) f(\vec{x}) = f((\vec{x} g_1) g_2) = \pi(g_1) \pi(g_2) f(\vec{x} g)$ . Fijada una base  $\{f_1, \dots, f_{d_\pi}\}$  de  $V$  si  $\pi_{ij}(g)$  son los elementos de la matriz de  $\pi(g)$  en dicha base se tiene

$$(6) \quad f_i(\vec{x} g) = \sum_{j=1}^{d_\pi} \pi_{ij}(g) f_j(\vec{x}),$$

lo cual establece una relación entre las autofunciones. Supongamos que en cierta base todas las matrices  $\pi(g)$  con  $g \in G$  fueran diagonales por bloques, entonces habría una representación correspondiente a cada bloque. Esquemáticamente

$$(7) \quad \pi \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix}, \quad \pi_k \rightarrow (A_k).$$

Se dice que  $\pi$  es *reducible* y se escribe  $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \dots \oplus \pi_l$ . Si  $\pi$  es reducible tendremos subespacios  $W_k \subset V$  en los que  $\pi$  actúa como  $\pi_k = \pi|_{W_k}$ , lo que obliga a que una relación como (6) se cumpla con menos autofunciones. Las representaciones que no admiten bloques más pequeños se dicen que son *irreducibles* y en ese sentido las de (1) eran importantes: son las únicas irreducibles (siempre salvo equivalencias). En resumen, si hallamos todas las representaciones irreducibles de  $G = SO(3)$  sabremos clasificar las relaciones más básicas entre autofunciones del mismo autovalor. Todavía más, el propio laplaciano se puede escribir en términos de representaciones y con ello es posible inventar una manera de saltar de unas autofunciones a otras (con lo que los físicos llaman *ladder operators*) resultando que el conocimiento preciso de las representaciones de  $SO(3)$ , algo en principio algebraico, permite hallar los autovalores y sus multiplicidades en el problema analítico (3). Esta es la línea que se sigue en los primeros cursos de física cuántica al estudiar la cuantización del momento angular y se aplica con pocos cambios a  $SU(2)$ . Cuando se pasa a grupos de Lie mayores, como  $SU(3)$ , hay un aumento notable de la complejidad.

Aparte de la *suma directa*  $\oplus$  que hemos introducido, una manera de operar dos representaciones  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  y  $\rho' : G \rightarrow GL(W)$  es su *producto tensorial*  $\rho \otimes \rho' : G \rightarrow GL(V \otimes W)$ , definido de la manea obvia [16, II.5]. Su matriz viene dada por el producto de Kronecker de las matrices de  $\rho$  y  $\rho'$  y así sus elementos son de la forma  $\rho_{ij}(g) \rho'_{kl}(g)$ . Al descomponer  $\rho \otimes \rho'$  en suma directa de representaciones irreducibles, obtendremos fórmulas del tipo

$$(8) \quad \rho_{ij}(g) \rho'_{kl}(g) = \sum_{\pi \text{ irred}} \sum_{r,s \leq d_\pi} a_{\pi rs} \pi_{rs}(g)$$

Estos  $a_{\pi rs}$  son los *coeficientes de Clebsch-Gordan* que aparecen en física y en el ejemplo anterior permiten probar fórmulas explícitas para productos de autofunciones que serían muy trabajosas con métodos puramente analíticos.

Ahora podemos describir con más detalle lo que hizo Gell-Mann. Asoció a tres hipotéticos *quarks* una representación  $\rho$  de  $SU(3)$  con  $d_\rho = 3$  (la dimensión indica el número de estados independientes que caben en el espacio considerado). En física cuántica las “agrupaciones” de partículas se indican con productos tensoriales y al comprobar que  $\rho \otimes \rho \otimes \rho$  daba representaciones irreducibles asimilables a partículas conocidas y otra más de dimensión 10, conjeturó que había exactamente diez partículas de espín 3/2 obtenibles con 3 quarks mientras que solo había nueve candidatas disponibles de los experimentos. Cuando se detectó la décima, los físicos teóricos empezaron a estar muy seguros de la existencia de tres quarks. Actualmente están muy seguros de que hay seis, a cambio piensan que las representaciones asociadas a tipos (*sabores*) de quarks son simetrías aproximadas (*simetría de sabor*), aunque bastante precisas porque los otros quarks son muy distintos. Según la teoría vigente, hay otro  $SU(3)$  no relacionado con el sabor cuyas representaciones dan simetrías exactas (*simetría de color*), en este caso la dimensión 3 del espacio ambiente permite que los quarks puedan tener tres posibles cargas de color ligadas a una especie de fuerza entre ellos [8, §16.1].

## 2. Análisis armónico con representaciones

La fórmula que resume el análisis armónico discreto en  $\mathbb{Z}_N$  es que para  $f : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$

$$(9) \quad f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{f}(m) e^{2\pi i mn/N} \quad \text{con} \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} f(m) e^{-2\pi i mn/N}.$$

La demostración se sigue de la sencilla identidad

$$(10) \quad \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j(m-n)/N} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv m \pmod{N}, \\ 0 & \text{si } n \not\equiv m \pmod{N} \end{cases}$$

pero no hay que menospreciar (9), lo primero por la cantidad de aplicaciones que tiene en el mundo digital y lo segundo porque si tomamos  $N \rightarrow \infty$  obtenemos formalmente las series de Fourier clásicas.

Por el teorema de estructura de grupos abelianos finitos, todos estos grupos están formados por trozos isomorfos a  $\mathbb{Z}_N$ , por ello no es raro que (9) se generalice a  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  con  $G$  abeliano finito como

$$(11) \quad f(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(g) \quad \text{con} \quad \hat{f}(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \bar{\chi}(g)$$

donde  $\widehat{G}$  es el grupo de *caracteres*  $\chi$ , las funciones que aplican  $\chi$  en raíces de la unidad,  $e^{2\pi ik/|G|}$ , preservando la ley de grupo. El análogo de (10) del cual se deduce (11) son las siguientes *relaciones de ortogonalidad* para  $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$

$$(12) \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_1(g) \chi_2(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi_1 = \chi_2, \\ 0 & \text{si } \chi_1 \neq \chi_2. \end{cases}$$

El “límite” de esta teoría es el análisis de Fourier para grupos abelianos localmente compactos. Resulta que bajo esta condición topológica se pueden construir *medidas de Haar* (medidas invariantes [17, §9])  $d\mu$  y  $d\nu$  en  $G$  y  $\widehat{G}$ , donde  $\widehat{G}$  es el grupo de caracteres, ahora definidos como homomorfismos continuos de  $G$  en  $|z| = 1$ . Con normalizaciones adecuadas de las medidas, (11) tiene su extensión a

$$(13) \quad f(g) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi(g) d\nu_\chi \quad \text{con} \quad \widehat{f}(\chi) = \int_G f(g) \bar{\chi}(g) d\mu_g$$

y también se podrían establecer unas relaciones de ortogonalidad análogas a (12) en el caso compacto. La fórmula (13) resume todos los análisis armónicos que se estudian en los grados de matemáticas. Si  $G$  es finito,  $d\mu$  y  $d\nu$  son medidas de contar, salvo normalizar con constantes, y se tiene (11); si  $G = \mathbb{T}$ ,  $d\mu$  es la medida de Lebesgue y  $d\nu$  la de contar y se tienen las series de Fourier; si  $G = \mathbb{R}$ ,  $d\mu$  y  $d\nu$  son medidas de Lebesgue y se tienen las integrales de Fourier.

La pregunta natural es cómo generalizar (11) o (13) a grupos no abelianos y la respuesta pasa por usar representaciones. Consideraremos, por ahora,  $G$  finito.

Primero una pequeña pero relevante observación teórica. Dada una representación cualquiera  $\pi : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ , siempre podemos inventar un producto escalar en  $V$  (porque  $V \cong \mathbb{C}^n$ ), digamos  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  y con él definir otro invariante:

$$(14) \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \pi(g)\vec{v}, \pi(g)\vec{w} \rangle_*$$

Es invariante en el sentido de que  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \pi(g)\vec{v}, \pi(g)\vec{w} \rangle$  para cualquier  $g \in G$ . Entonces  $\pi(g)$  es una aplicación unitaria en  $V$  con este producto escalar. Si utilizamos una base ortonormal,  $\pi(g)$  tendrá siempre una matriz unitaria  $MM^\dagger = I$  (aquí  $M^\dagger$  es la traspuesta conjugada, siguiendo la notación física). En definitiva, una representación es siempre equivalente a una *representación unitaria*, la que actúa como una aplicación unitaria. Consecuentemente, a partir de ahora nos limitaremos a representaciones  $\pi : G \longrightarrow \text{U}(V)$ , en particular  $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^\dagger$ . Si uno pudiera establecer unas relaciones de ortogonalidad, tendríamos un análisis armónico, al igual que (9) sale de (10) y (11) sale de (12). No es posible que lo mismo funcione porque en un grupo no abeliano hay muy pocos caracteres. Las representaciones parecen un análogo

pues preservan la ley de grupo y podemos considerarlas unitarias pero en principio hay demasiadas (infinitas). La demostración habitual de (12) cambiando caracteres por representaciones unitarias  $\pi$  y  $\rho$ , que suponemos inicialmente con  $d_\pi = d_\rho$ , sugiere partir de la sencilla identidad

$$(15) \quad \pi(h) \left( \sum_{g \in G} \pi(g^{-1}) \rho(g) \right) = \left( \sum_{g \in G} \pi(g^{-1}) \rho(g) \right) \rho(h)$$

que se deduce del cambio de variable  $g \mapsto gh$ . Si las cosas fueran abelianas el paréntesis grande sería nulo a no ser que  $\pi(h) = \rho(h)$  para todo  $h$  y tendríamos “ortogonalidad” entre las matrices de  $\pi(g^{-1})$  y  $\rho(g)$ , eso es lo que ocurre con los caracteres y así se prueba (12). En el caso no abeliano no todo está perdido gracias al *lema de Schur* que esencialmente afirma que si  $\pi$  y  $\rho$  no son equivalentes, la única manera de que se tenga  $\pi(h)M = M\rho(h)$  con  $M$  no nula es que en cierta base  $\pi(h)$  y  $\rho(h)$  tengan matrices diagonales por bloques, como en (7). Este no es el caso si  $\pi$  y  $\rho$  son irreducibles. Si  $d_\pi \neq d_\rho$  todavía es posible mantener el argumento insertando una matriz  $C$  constante de dimensiones  $d_\pi \times d_\rho$ . En definitiva, si llamamos  $\widehat{G}$  a un conjunto maximal de representaciones unitarias irreducibles (no equivalentes) de  $G$ , se tiene

$$(16) \quad \sum_{g \in G} \pi(g) C \rho(g)^\dagger = O \quad \text{para todo } \pi, \rho \in \widehat{G} \text{ con } \pi \neq \rho.$$

Tomando como  $C$  la matriz que tiene un elemento 1 y el resto ceros y una variante del lema de Schur para  $\pi = \rho$ , se deduce la ortogonalidad de los elementos  $\pi_{ij}$  y  $\rho_{ij}$  de las matrices de  $\pi, \rho \in \widehat{G}$ , en la forma [8] [21]:

$$(17) \quad \frac{d_\pi}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\pi_{ij}(g)} \rho_{kl}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \rho, i = k \text{ y } j = l, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Introduciendo el *carácter* (en un sentido diferente al abeliano), asociado a una representación  $\chi_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g))$ , con  $\text{Tr}(\cdot)$  la traza, hay unas relaciones de ortogonalidad con un aspecto totalmente análogo a (12) que se deducen de (17) [15, §2.3]. Concretamente, para  $\pi, \rho \in \widehat{G}$  se cumple

$$(18) \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\pi(g)} \chi_\rho(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \rho, \\ 0 & \text{si } \pi \neq \rho. \end{cases}$$

Aunque parezca que  $\chi_\pi$  tiene menos información que  $\pi$  porque cambiamos una matriz por un número, (18) muestra que dos elementos distintos de  $\widehat{G}$  no pueden tener el mismo carácter, es decir, cada representación  $\pi \in \widehat{G}$  está determinada por  $\chi_\pi$  [6, Cor.2.14]. Además si sustituimos en el primer miembro  $\pi = \rho$  unitarias pero no irreducibles siempre sale un número mayor que 1, lo cual da un criterio para saber si una representación es irreducible. Por cierto, se puede

demostrar que  $d_\pi$  siempre divide a  $|G|$  pero la prueba es un poco rara<sup>1</sup> pues utiliza anillos de enteros algebraicos.

Como ejemplo, la tabla de caracteres de  $S_3$  es:

		id.	trasp.	3-cicl.	
(19)	$\chi_{\pi_1}$	1	1	1	id. : (1)
	$\chi_{\pi_2}$	1	-1	1	trasp. : (1, 2), (1, 3), (2, 3)
	$\chi_{\pi_3}$	2	0	-1	3-cicl. : (1, 2, 3), (1, 3, 2)

Gracias a (17) por cada representación  $\pi \in \widehat{G}$  tenemos  $d_\pi^2$  funciones ortogonales. Un argumento simple con caracteres, aunque algo indirecto [21, p.256], implica

$$(20) \quad \sum_{\pi \in \widehat{G}} d_\pi^2 = |G|.$$

Esto significa que hay dimensión suficiente y cualquier función  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  admite un *desarrollo de Fourier*  $f(g) = \sum_{\pi \in \widehat{G}} c_{\pi,i,j} \pi_{ij}(g)$ . De hecho, usando (17) es posible escribirlo de manera muy similar a (11) como

$$(21) \quad f(g) = \sum_{\pi \in \widehat{G}} d_\pi \text{Tr}(\widehat{f}(\pi)\pi(g)) \quad \text{con} \quad \widehat{f}(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\pi(g)^\dagger.$$

Los “coeficientes de Fourier”  $\widehat{f}(\pi)$  son ahora matriciales. Esta fórmula en realidad generaliza (11) porque en un grupo abeliano las representaciones unitarias irreducibles tienen  $d_\pi = 1$  y  $\widehat{G}$  se convierte en el grupo de caracteres abelianos.

Veamos un ejemplo en acción. En  $S_3$  las representaciones  $\pi_1, \pi_2$  y  $\pi_3$  de (1) son todas las de  $\widehat{G}$  porque  $1^1 + 1^2 + 2^2 = |S_3|$ . Tomemos la función  $f : S_3 \rightarrow \mathbb{C}$  con  $f(g) = 0$  si  $g$  es una transposición y 1 en otro caso. Un cálculo breve prueba

$$(22) \quad \widehat{f}(\pi_1) = (3), \quad \widehat{f}(\pi_2) = (3), \quad \widehat{f}(\pi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, de acuerdo con (21) e identificando las matrices de dimensión uno con su elemento,

$$(23) \quad f(g) = \frac{1}{6}(3\pi_1(g) + 3\pi_2(g))$$

que es claramente cierto.

En este ejemplo, la función  $f$  es invariante por conjugación, esto es  $f(\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau) = f(\sigma)$ . Se dice que es una *función de clase*, porque es constante en cada *clase de conjugación*. Así, los

<sup>1</sup>Según escribe, quizá exageradamente, el autor de [16] “*This is one of the deepest and most subtle theorems in the subject and its proof one of the most surprising*”. En [5, §5.3] se puede encontrar una prueba más clara.



caracteres son funciones de clase. De hecho, todas son combinación de ellos y empleando (18) tenemos el desarrollo de Fourier de funciones de clase con caracteres [21]

$$(24) \quad f(g) = \sum_{\pi \in \hat{G}} c_{\pi} \chi_{\pi}(g) \quad \text{con} \quad c_{\pi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \bar{\chi}_{\pi}(g).$$

En el ejemplo,  $c_{\pi_1} = c_{\pi_1} = 1/2$  y  $c_{\pi_1} = 0$ , llevando al mismo resultado que antes.

### 3. Grupos de Lie y autofunciones

Vamos ahora a tratar de extender la teoría a grupos no abelianos infinitos con ciertas condiciones topológicas. Concretamente consideramos, sin indicarlo cada vez, que  $G$  es un *grupo de Lie* compacto y conexo. Eso significa que  $G$  es una variedad compacta y conexa, además de un grupo, y que la multiplicación por un elemento de  $G$  e invertir definen funciones regulares en la variedad.

Los únicos grupos que trataremos en estas notas son subgrupos de las matrices unitarias  $U(N)$  pero eso no es realmente una restricción, todos los que tienen las características topológicas exigidas son isomorfos a ellos [14, §3.3.3] [22, p.23]. Los ejemplos típicos son los grupos de matrices ortogonales directas  $SO(N)$  y las matrices unitarias de determinante uno  $SU(N)$ . Muchas veces se habla de *grupos clásicos* sin que haya una definición inamovible, para referirse a estos grupos y otras familias habituales. La compacidad que nosotros suponemos permite copiar en gran medida la sección anterior reemplazando sumas por integrales contra la medida de Haar  $d\mu$  de  $G$ , además asegura que el grupo es *unimodular* [19, §14], esto es,  $\mu(S) = \mu(gS) = \mu(Sg)$  para  $S$  medible y  $g \in G$ . El análogo de (14) prueba que es posible limitarse a representaciones unitarias. Las relaciones de ortogonalidad pasan a ser

$$(25) \quad \int_G \overline{\pi_{ij}(g)} \rho_{kl}(g) d\mu_g = \begin{cases} d_{\pi}^{-1} & \text{si } \pi = \rho, i = k \text{ y } j = l, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

lo cual implica que  $\mathcal{S} = \{\sqrt{d_{\pi}} \pi_{ij}\}_{\pi \in \hat{G}, i, j \leq d_{\pi}}$  es un sistema ortonormal. Para llegar a (21) a partir de (17) necesitábamos saber que las funciones  $\pi_{ij}(g)$  generaban todo el espacio y para ello se empleaba (20), lo que no parece que tenga un análogo sencillo. La completitud de  $\mathcal{S}$  es el *teorema de Peter-Weyl* (o una parte de él). Para los grupos de matrices que consideramos nosotros, y en general para todos los subgrupos de  $U(N)$ , es posible deducirlo del teorema de Stone-Weierstrass [20]. Como curiosidad, en [16] la propia relación (20) para grupos finitos se obtiene con una versión finita del teorema de Stone-Weierstrass.

Para la deducción hay que notar que gracias a (8) el espacio vectorial que genera  $\mathcal{S}$  es en realidad un álgebra con el producto usual, es cerrada por conjugación (si  $\pi$  es una representación,  $\bar{\pi}$  también) y además separa puntos porque  $\pi(g) = g$  es una representación unitaria en cualquier subgrupo de  $U(N)$ . En esta situación el teorema de Stone-Weierstrass implica que

$\mathcal{S}$  es denso en las funciones continuas de  $G$  y por tanto se tiene el análogo de (21) en  $L^2(G)$  [14, §3.4]. También se tiene un análogo de (24) para funciones de clase. De hecho el teorema de Peter-Weyl a menudo se enuncia como la completitud de los caracteres:

$$(26) \quad \int_G f \bar{\chi}_\pi d\mu = 0 \quad \text{para toda } \pi \in \widehat{G} \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

cuando  $f$  es una función de clase (regular).

Si en  $G$ , que tiene estructura de variedad, definimos una métrica riemanniana, tendremos una *operador de Laplace-Beltrami*. Dejaremos la definición de una métrica invariante compatible con la medida de Haar para más adelante, al igual que una interpretación del operador específica de grupos de Lie, y supondremos ahora que ya tenemos un laplaciano  $\Delta$  con propiedades de invariancia como las del usual en  $\mathbb{R}^n$ , o el inducido en la esfera. Es decir, si consideramos la aplicación (una “representación infinita”) que actúa sobre las funciones  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  como  $R(g)f(x) = f(xg)$ , entonces se cumple

$$(27) \quad -\Delta(R(g)f) = -R(g)\Delta f.$$

Como habíamos visto en el caso de la esfera, cada autoespacio  $E_\lambda$  correspondiente a un autovalor  $\lambda$  de  $-\Delta$  se rompe en espacios de dimensión  $d_\pi$  con  $\pi \in \widehat{G}$  en los que la base de autofunciones  $\{f_1, \dots, f_{d_\pi}\}$  verifica

$$(28) \quad f_i(xg) = \sum_{j \leq d_\pi} \pi_{ij}(g) f_j(x).$$

A diferencia de lo que ocurría en (6), ahora  $x$  es también un elemento del grupo, entonces tomando  $x = I$  se deduce que cada autofunción del subespacio es una combinación lineal (finita) de los elementos de la matriz de  $\pi$ . Cualquier elemento de cualquier representación  $\pi \in \widehat{G}$  debe aparecer en uno de esos desarrollos finitos, ya que en otro caso tendríamos funciones ortogonales a todas las autofunciones y eso es imposible porque contradiría el teorema espectral para  $-\Delta$  (hay un sistema ortonormal completo formado por autofunciones).

Fijemos  $\pi \in \widehat{G}$  y consideremos el espacio vectorial de funciones de dimensión finita  $V$  generado por  $\pi_{ij}$  con  $i, j \leq d_\pi$ . Por la ortonormalidad, o si uno lo prefiere por el análogo de (21), la proyección ortogonal sobre  $V$  viene dada por

$$(29) \quad P_V f(x) = d_\pi \sum_{i,j \leq d_\pi} \pi_{ij}(x) \int_G f(g) \bar{\pi}_{ij}(g) d\mu_g = d_\pi \int_G f(g) \text{Tr}(\pi(xg^{-1})) d\mu_g.$$

Con el cambio  $g \mapsto xg^{-1}$ ,

$$(30) \quad P_V f(x) = d_\pi \int_G R(g^{-1})f(x) \text{Tr}(\pi(g)) d\mu_g$$

y entonces de (27) se sigue

$$(31) \quad -\Delta(P_V f) = -P_V \Delta f.$$

Por tanto  $-\Delta$  aplica  $V$  en  $V$ . Se puede probar [19, §32] que la representación  $\rho : G \times G \rightarrow \text{GL}(V)$  dada por  $\rho(g, h)f(x) = f(g^{-1}xh)$  es irreducible. Si hubiera elementos de  $V$  en dos autoespacios  $E_\lambda$  y  $E_\mu$  con  $\lambda \neq \mu$ , entonces  $W = E_\lambda \cap V$  cumpliría  $\{0\} \neq W \subsetneq V$  y sería invariante por  $\rho(g, h)$ , lo que contradiría que  $\rho$  es irreducible. En conclusión,  $V \subset E_\lambda$  y los elementos de matrices de  $\pi$  ¡son autofunciones! con un autovalor  $\lambda_\pi$  que solo depende de la representación:

$$(32) \quad -\Delta\pi_{ij}(x) = \lambda_\pi\pi_{ij}(x) \quad \text{para toda } \pi \in \widehat{G}.$$

Además, como hemos visto en (28), todas las autofunciones son combinaciones lineales de ciertas  $\pi_{ij}$ . Entonces no es solo que los elementos de las matrices de las representaciones en  $\widehat{G}$  son autofunciones es que ¡son todas! en el sentido de que  $\mathcal{S}$  es un sistema ortonormal completo de autofunciones de  $-\Delta$ . La matriz de cada  $\pi \in \widehat{G}$  tiene  $d_\pi^2$  elementos, así pues la cantidad que aparece en la *ley de Weyl* (el número de autovalores menores que una cantidad dada, contando multiplicidades) es

$$(33) \quad \mathcal{N}(\lambda) = \sum_{\pi \in \widehat{G}_\lambda} d_\pi^2 \quad \text{con } \widehat{G}_\lambda = \{\pi \in \widehat{G} : \lambda_\pi \leq \lambda\}.$$

Después del trabajo de Weyl, bajo ciertas hipótesis sobre  $G$ , las representaciones unitarias irreducibles se parametrizan en términos de ciertos vectores llamados *pesos*. Sin embargo, tal parametrización no es uno a uno y hay que establecer cierta relación de equivalencia entre ellos para no repetir representaciones.

La idea general está explicada con sencillez y brevedad en [1] dentro del contexto de grupos simples simplemente conexos (esta terminología se explica en [18]). Veamos un pequeño resumen aquí. Si  $G$  fuera un grupo abeliano, las únicas representaciones irreducibles unitarias tendrían  $d_\pi = 1$  y en general las representaciones serían equivalentes a colocar caracteres abelianos formando una matriz diagonal. Incluso sin pensar en lo que ya hemos visto, esto se deduciría de que las matrices de  $\pi(g)$  con  $g \in G$  son normales y conmutan entre sí, por tanto diagonalizan simultáneamente y cada representación es equivalente a una con matrices diagonales, cada elemento de la diagonal daría una representación de dimensión 1. Por ejemplo, en el caso de  $\text{SO}(2)$ , una representación asigna a un giro de ángulo  $\alpha$  una matriz unitaria diagonal con  $a_{nn} = e^{im_n\alpha}$ ,  $1 \leq n \leq d_\pi$ ,  $m_n \in \mathbb{Z}$  y de esta forma las representaciones irreducibles están parametrizadas por  $\mathbb{Z}$ , lo cual no es nada nuevo porque  $\text{SO}(2)$  es lo mismo que  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , el espacio habitual de las series de Fourier. Para los grupos del Lie con todos los apellidos antes mencionados (e incluso con otros, como veremos), siempre hay un subgrupo abeliano suficientemente grande y entrelazado como para que las representaciones fáciles de este subgrupo condicionen de manera unívoca las representaciones de todo el grupo. Igual que en el

caso de  $SO(2)$  no podríamos decir que  $e^{i\alpha/2}$  es un carácter porque no respetaría que los giros de  $0$  y  $2\pi$  radianes son lo mismo, hay ciertas condiciones aritméticas que deben ser satisfechas y que se complican con otras de simetría cuando imponemos que las representaciones fáciles se extiendan a  $G$ . Incluso cuando las representaciones irreducibles están bien etiquetadas, no es obvio en absoluto cuál es la dimensión de cada una. Desarrollando todas estas técnicas, Weyl dio una fórmula explícita para los caracteres no abelianos de todo el grupo y usando que  $d_\pi = \text{Tr}(\pi(I)) = \chi_\pi(I)$ , dedujo de ella una fórmula para la dimensión [11, §15.5]. Incluso sustituir  $I$  en la fórmula para  $\chi_\pi$  no es trivial porque formalmente sale  $0/0$  con ceros de orden alto y, como veremos, hay que aplicar lo que se podría llamar una regla de L'Hôpital en grupos de Lie [16, IX.6].

#### 4. El caso $SU(2)$ totalmente a mano

El grupo  $SU(2)$  tiene una importancia capital en física y por ello sus representaciones irreducibles se estudian con técnicas especiales en muchos textos que no cubren toda la teoría. Aquí vamos a seguir una vía todavía más pedestre.

Es natural, o al menos uno se acostumbra a ello, pensar en las representaciones en términos de la acción del grupo sobre funciones. Ya lo habíamos hecho desde los primeros ejemplos, por ejemplo para el laplaciano en la esfera. En  $SU(2)$  las matrices tienen dimensión 2 y entonces parece lógico hacerlas actuar sobre funciones de dos variables en vez de las tres que usamos con  $SO(3)$  en la esfera. El esquema es que a cada  $M \in SU(2)$ , le asociamos la acción sobre las funciones  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$(34) \quad \pi(M) : f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f \left( M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).$$

El inverso en  $M$  es para asegurar  $\pi(M_1 M_2) = \pi(M_1) \pi(M_2)$  en el orden correcto (en el caso de la esfera, se puso el vector en fila y la matriz al otro lado para evitar este punto). Esto definiría una representación si no fuera porque estamos en un espacio de funciones de dimensión infinita. Un subespacio de dimensión finita sencillo válido son los polinomios de grado  $n$ . Para hacer el espacio más pequeño sin información redundante (teniendo en mente la irreducibilidad), elijamos el espacio  $\mathcal{H}_n$  formado por los polinomios con todos los monomios de grado exactamente  $n$ , es decir, polinomios homogéneos. Se cumple  $\dim \mathcal{H}_n = n+1$  y una base natural de  $\mathcal{H}_n$  es  $\mathcal{B}_n = \{\vec{h}_0, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n\}$  con  $\vec{h}_j = x^{n-j} y^j$ . Llamemos  $\pi_n$  a la representación correspondiente. La inversa de  $M \in SU(2)$  (y de cualquier matriz con  $\det M = 1$ ) simplemente intercambia los elementos diagonales y los otros dos los cambia de signo. Entonces es posible hallar la matriz de  $\pi_n(M)$  para  $n$  pequeño calculando  $\pi_n(M) \vec{h}_j$  directamente. Para  $n = 2$  se tiene

$$(35) \quad \pi_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d^2 & -cd & c^2 \\ -2bd & ad + bc & -2ac \\ b^2 & -ab & a^2 \end{pmatrix}$$

Así la primera columna solo indica que  $\vec{h}_1 = x^2$  se aplica en  $(dx - by)^2 = d^2x^2 - 2bdxy + b^2y^2$ .

La matriz no es unitaria porque la base  $\mathcal{B}_3$  no es ortonormal respecto al producto escalar invariante, aunque casi lo es, bastaría considerar  $\mathcal{B}'_3$  idéntica salvo cambiar  $\vec{h}_2$  por  $\sqrt{2}\vec{h}_2$ . En esta nueva base, calculando la traza y viendo que es 3 tendríamos que  $\pi_2$  es irreducible por el criterio tras (18). Aunque la ortonormalidad de  $\mathcal{B}'_3$  se podría abordar, parece difícil que este método de hallar matrices explícitas sea adecuado para estudiar si las representaciones  $\pi_n$  son o no irreducibles. Veamos en su lugar un argumento mágico que sirve para todas las  $\pi_n$  y que más tarde generalizaremos a grupos más complicados.

El punto de partida es considerar un subgrupo abeliano  $T$  de  $SU(2)$  lo mayor posible, en la jerga, un *toro maximal* [14, §5.1] [1]. En nuestro caso, las matrices diagonales

$$(36) \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \subset SU(2).$$

Topológicamente y como variedad este grupo de Lie  $T$  es  $S^1$ , un toro unidimensional. Es grande en el sentido de que por conjugación es posible llevar cualquier elemento de  $SU(2)$  a  $T$  (pasando a la base de Jordan y normalizando). En  $T$  la acción de  $\pi_n$  es muy sencilla:

$$(37) \quad M = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_n(M) : x^{n-j}y^j \mapsto e^{i(n-2j)\theta} x^{n-j}y^j.$$

Esto es, la aplicación  $\pi_n(M)$  diagonaliza y sus autovectores son justamente los elementos de la base  $\mathcal{B}_n$ . Supongamos que  $\pi_n$  fuera reducible, entonces habría un subespacio propio  $W$  de  $\mathcal{H}_n$  que queda invariante por  $\pi_n(M)$  para toda  $M \in SU(2)$ , en particular para  $M \in T$ . Necesariamente<sup>2</sup>  $W$  está generado por algunos elementos de  $\mathcal{B}_n$ . Digamos que uno de ellos es  $\vec{h}_k \in W$ . Vamos a utilizar un truco analítico para probar que el resto de los elementos de  $\mathcal{B}_n$  también están en  $W$  lo que lleva a la contradicción  $W = \mathcal{H}_n$ . Si en un espacio vectorial  $V$  están todos los vectores  $a(t)\vec{v} + b(t)\vec{w}$  con  $t \in \mathbb{R}$  y  $a, b \in C^1$ , entonces  $a'(t)\vec{v} + b'(t)\vec{w} \in V$  porque la combinación lineal  $h^{-1}(a(t+h) - a(t))\vec{v} + h^{-1}(b(t+h) - b(t))\vec{w}$  se puede llevar al límite. En nuestro caso, vamos a partir de un giro y de un “giro complejo”, ambos en  $SU(2)$ :

$$(38) \quad M_1 = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \cos t & i \operatorname{sen} t \\ i \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Se tiene por hipótesis  $\pi(M_1)\vec{h}_k \in W$  y  $\pi(M_2)\vec{h}_k \in W$  cualquiera que sea  $t$ . Derivando con

---

<sup>2</sup>Agradezco a Y. Fuertes haberme comunicado la siguiente demostración sencilla de que si  $f : V \rightarrow V$  es diagonalizable, entonces  $f|_W$  también lo es para  $W \subset V$  invariante, que es todo lo que se necesita aquí: Si  $f|_W$  no fuera diagonalizable, existirían  $\vec{v}_0, \vec{w} \in W$  con  $\vec{v}_0$  autovector de  $f|_W$  de autovalor  $\lambda$  tales que  $\vec{v}_0 = f(\vec{w}) - \lambda\vec{w}$ . Escribiendo  $\vec{w} = \sum_{j \geq 0} a_j \vec{v}_j$  con  $\vec{v}_j$  una base de autovectores de  $V$ , se sigue  $\vec{v}_0 = \sum_{j \geq 1} a_j (\lambda_j - \lambda) \vec{v}_j$ , lo que contradice que sean una base.

respecto a esta variable, se sigue

$$(39) \quad \begin{cases} (n-k)yx^{n-k-1}y^k + k(-x)x^{n-k}y^{k-1} \in W, \\ (n-k)(-iy)x^{n-k-1}y^k + k(-ix)x^{n-k}y^{k-1} \in W. \end{cases}$$

Sumando o restando a la primera ecuación la segunda por  $i$ , se obtiene

$$(40) \quad (n-k)\vec{h}_{k+1} \in W \quad \text{y} \quad k\vec{h}_{k-1} \in W.$$

Este es un ejemplo de *ladder operator* (sobre todo en la terminología física) que permite “subir” o “bajar” de unos vectores a otros. Con subidas o bajadas del índice se concluye  $\mathcal{B}_n \subset W$ , llegando a la contradicción esperada.

Una vez que sabemos, usando el “toro”  $T$  y cálculo elemental, que  $\pi_n$  son representaciones irreducibles de  $G = \text{SU}(2)$ , la pregunta es si (en la base en la que tienen matrices unitarias) conforman todo  $\widehat{G}$ . Es posible, en cierto modo, dar la vuelta al razonamiento anterior y a partir de un análogo de  $\vec{h}_k$  para una nueva hipotética representación irreducible, construir el resto del espacio vectorial y concluir que salvo cambios de nombre tenemos la misma representación. La manera habitual y más cómoda de llevarlo a cabo [23] [17] es utilizar la estructura del álgebra de Lie de  $\text{SU}(2)$ . Siguiendo [14, Th.3.32], vamos a probarlo con análisis de Fourier básico sin añadir nueva teoría, justificando lo de “totalmente a mano”. Si  $U \in \text{SU}(2)$  entonces diagonalizando,  $U = C^{-1}MC$  con  $C \in \text{SU}(2)$  y  $M$  como en (37). Así pues

$$(41) \quad \chi_{\pi_n}(U) = \chi_{\pi_n}(M) = \sum_{j=0}^n e^{i(n-2j)\theta} = \epsilon_n + 2 \sum_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \cos((2k + \epsilon_n - 1)\theta)$$

con  $\epsilon_n = 1$  si  $n$  es par y  $\epsilon_n = 0$  si es impar. Por tanto  $\{\chi_{\pi_n}(M)\}_{n=0}^{\infty}$  genera en  $L^2[-\pi, \pi]$  lo mismo que  $\{\cos(n\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ , que por análisis de Fourier básico son todas las funciones pares. Si  $f : \text{SU}(2) \rightarrow \mathbb{C}$  es una función de clase suficientemente regular, define una función de  $\theta$ , ya que  $f(U) = f(M)$ . Esta función debe ser par puesto que  $M$  y  $M^{-1}$  son conjugadas (por un giro de  $90^\circ$ ) y se sigue  $f = \sum c_n \chi_{\pi_n}$ . Comparando con la versión continua de (24), se deduce que las  $\pi_n$  deben ser, salvo equivalencias, las representaciones en  $\widehat{G}$ .

Resumiendo, se tiene la descripción completa de las representaciones:

- Para cada  $n \geq 0$ ,  $\pi_n$  define una representación irreducible de  $\text{SU}(2)$  con  $d_{\pi_n} = n + 1$ .
- Cada representación irreducible de  $\text{SU}(2)$  de dimensión  $n$  es equivalente a  $\pi_{n-1}$ .

Para ver la información que podemos extraer de ello en el tipo de problemas que nos interesan, supongamos que nos dan llovido del cielo el operador de Laplace-Beltrami (ya veremos

cómo hallarlo) de  $SU(2)$ . Antes de presentar cualquier fórmula para él hay que convenir unas cartas que indiquen las coordenadas. Una parametrización bastante natural es

$$(42) \quad (\theta_1, \theta_2, \varphi) \mapsto U_{\theta_1\theta_2\varphi} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \cos \varphi & e^{i\theta_2} \sen \varphi \\ -e^{-i\theta_2} \sen \varphi & e^{-i\theta_1} \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Una vez establecidas las coordenadas  $(\theta_1, \theta_2, \varphi)$ , el laplaciano  $\Delta$  de  $SU(2)$  tiene un vago parecido con (3) para  $S^2$ :

$$(43) \quad 8\Delta = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{1}{\sen^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} + \frac{1}{\sen(2\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sen(2\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Hallar todos los  $\lambda$  que resuelven el problema de autovalores  $-\Delta f = \lambda f$  no parece una tarea inmediata desde el punto de vista del análisis pero se termina bastante rápido con lo que sabemos de representaciones.

Como en (35), tenemos que el primer elemento de la matriz de  $\pi_n(U_{\theta_1\theta_2\varphi})$  es  $e^{-in\theta_1} \cos^n \varphi$ . Por (32) debe ser autofunción de  $-\Delta$  con cierto autovalor  $\lambda_{\pi_n}$  y todos los autovalores son de esta forma. Un cálculo prueba que  $\lambda_{\pi_n} = n^2 + 2n$ . Se concluye que los autovalores de  $-\Delta$  en  $SU(2)$  son  $n^2 + 2n$  para  $n \geq 0$ , cada uno con multiplicidad  $d_{\pi_n}^2 = (n+1)^2$ . En (33) se tiene la fórmula exacta

$$(44) \quad \mathcal{N}(\lambda) = \frac{1}{8} \sum_{n^2+2n \leq \lambda} (n+1)^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{48} \quad \text{para } \lambda = N^2 - 1.$$

La ley de Weyl establece una relación entre la asintótica  $\lambda^{3/2}/24$  de esta expresión y el volumen de  $SU(2)$ .

## 5. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

Estamos interesados en grupos de Lie como  $SO(N)$  o  $SU(N)$  en los que conmutar es una casualidad. Ahora les vamos a asociar de manera “functorial” un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  (por tanto con una suma conmutativa) al que añadiremos una multiplicación vectorial tal que  $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ , técnicamente, algo de este tipo es una álgebra anticonmutativa. Esta asignación parece ventajosa porque pasamos de una sola operación de grupo a tener más estructura y además trabajar en espacios vectoriales parece más sencillo que en grupos. Veamos desde el punto de vista geométrico de dónde surgen estas operaciones algebraicas aparentemente inexistentes en el grupo original.

Si  $G$  es un grupo de Lie, que siempre suponemos compacto, conexo y subgrupo de  $U(N)$ , su *álgebra de Lie*, es  $T_I(G)$ , el espacio tangente en la identidad  $I$ . Esta definición necesariamente requiere ser completada porque  $T_I(G)$  es un espacio vectorial real pero no un *álgebra*, no sabemos todavía multiplicar vectores.

Por ejemplo, si en  $SO(N)$  tomamos una curva genérica  $A : (-1, 1) \rightarrow SO(N)$  con  $A(0) = I$ , al derivar la relación  $AA^t = I$  que define  $SO(N)$ , obtenemos  $A'(u)A^t(u) + A(u)(A')^t(u) = O$  y al sustituir  $u = 0$ ,  $B = -B^t$  con  $B = A'(0)$ . Con ello, el álgebra de Lie de  $SO(N)$  son las matrices antisimétricas. La notación habitual es indicar las álgebras de Lie con las mismas letras que sus grupos de Lie pero en minúsculas góticas, lo cual es un engorro al escribir a mano. Las álgebras de Lie más famosas de grupos compactos conexos de matrices son (véase la notación en [16] [18])

$$(45) \quad \begin{cases} \mathfrak{so}(N) = \{X \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R}) : X^t = -X\}, \\ \mathfrak{su}(N) = \{X \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C}) : X^\dagger = -X, \text{Tr}(X) = 0\}, \\ \mathfrak{u}(N) = \{X \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C}) : X^\dagger = -X\}, \\ \mathfrak{sp}(N) = \{X \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C}) : X^t J = -JX\}. \end{cases}$$

Es fácil calcular las dimensiones de estas álgebras de Lie, como espacios vectoriales reales. Por ejemplo,

$$(46) \quad \dim \mathfrak{so}(N) = \sum_{n=1}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2} \quad \text{y} \quad \dim \mathfrak{u}(N) = N + 2 \sum_{n=1}^{N-1} n = N^2.$$

En el primer caso porque solo hay que elegir los elementos de media matriz y en el segundo por lo mismo, teniendo en cuenta que los que no están en la diagonal principal tienen parte real e imaginaria. Muchos estudiantes del grado de matemáticas se equivocan cuando se les pregunta cuántos grados de libertad tiene un giro en  $\mathbb{R}^3$ , es decir, cuántos parámetros necesitan para especificarlo, y les cuesta dar con una respuesta para “giros” (movimientos directos) en  $\mathbb{R}^N$ . Conociendo estas álgebras de Lie, cuya dimensión coincide con la de la variedad, la respuesta general  $\dim SO(N) = N(N-1)/2$  se vuelve fácil.

Aparte de la dimensión, en una variedad el espacio tangente en un punto no dice demasiado de ella pero si la variedad es un grupo de Lie  $G$  las cosas cambian porque un solo vector de su álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  puede enviarse a todos los puntos mediante la operación de grupo, definiendo de manera canónica un campo de vectores [16, VII.1], lo que ya es un objeto global. En geometría hay una operación natural entre campos de vectores dada por el corchete de Lie [20]

$$(47) \quad [X, Y] = XY - YX$$

que intuitivamente mide la variación de  $Y$  cuando uno viaja por las curvas integrales de  $X$ . A los menos avezados en geometría les asombrará que (47) defina algo en una variedad porque  $XY$  no parece tener sentido para  $X, Y$  campos de vectores. Hay que recordar que en geometría de variedades los vectores se asocian a *derivaciones*, que son operadores diferenciales de primer orden, así el vector  $(2, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  corresponde a  $2\partial_x + \partial_y$ . Las derivadas segundas en  $XY - YX$  se cancelan y resulta una derivación en cada punto que representa un nuevo campo de vectores.



En nuestro caso todo es más sencillo porque (47) se puede interpretar literalmente como un producto de matrices. Si nos creemos esto, es bastante claro que (47) define una operación en las álgebras de Lie de (45) pero no que lo haga en otros ejemplos. Antes de entrar en este punto debemos establecer una relación importante entre grupos y álgebras de Lie. Consideremos para un grupo  $G$  la curva integral  $A = A(t)$  del campo de vectores generado por un  $X \in \mathfrak{g}$ . Por definición,  $A'(t) = A(t)X$  pero esta ecuación diferencial con matrices es fácil de resolver: si la condición inicial es  $A(0) = X$  la solución es  $A(t) = e^{tX}$  con la exponencial de matrices. Tomando  $t = 1$  tenemos una aplicación, la *aplicación exponencial*<sup>3</sup>, del álgebra en el grupo

$$(48) \quad \begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^n/n! \end{aligned}$$

La serie nunca da problemas de convergencia. Uno puede definir un logaritmo mediante otra serie que esta vez si requiere consideraciones sobre la convergencia [18, §7.4] y establecer así que  $\exp$  define un difeomorfismo local en un entorno de cero. A pesar del nombre y la notación, la igualdad  $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y)$  solo se asegura si  $X$  e  $Y$  conmutan.

Tras definir  $\exp$ , estamos en condiciones de justificar que (47) tiene sentido con el producto de matricial en el álgebra de Lie de cualquier grupo de Lie de matrices que se nos ocurra. Esto, por supuesto, no es obvio porque rara vez al multiplicar dos matrices de  $\mathfrak{g}$ , se obtiene algo en  $\mathfrak{g}$ . Para  $X, Y \in \mathfrak{g}$  consideremos el conmutador en  $G$  de las imágenes de  $tX$  y  $uY$ , es decir  $\phi(t, u) = \exp(tX)\exp(uY)\exp(-tX)\exp(-uY)$ . Para cada  $u$  fijo,  $t \mapsto \phi(t, u)$  define una curva en  $G$  con  $\phi(0, u) = I$ , entonces

$$(49) \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi(t, u) = X e^{tX} e^{uY} e^{-tX} e^{-uY} + e^{tX} e^{uY} (-X) e^{-tX} e^{-uY} \Big|_{t=0} = X - e^{uY} X e^{-uY} \in \mathfrak{g}.$$

En este cálculo no es importante escribir  $e^{\pm tX}(\pm X)$  en lugar de  $(\pm X)e^{\pm tX}$  porque las matrices conmutan pero otros cambios de orden están en general prohibidos. El resultado obtenido  $c(u) = X - e^{uY} X e^{-uY}$  define una curva en  $\mathfrak{g}$  que es un espacio vectorial de dimensión finita y ya vimos en el ejemplo de  $SU(2)$  que su derivada no se sale del espacio. Un cálculo similar al anterior prueba  $c'(0) = XY - YX$  y por tanto (47) siempre está en  $\mathfrak{g}$  para cualquier grupo de Lie de matrices que se nos ocurra.

El producto “vectorial” (47) es bilineal, cumple  $[X, X] = 0$  y en vez de la asociativa (una propiedad que parecía sagrada en los cursos universitarios) satisface la *identidad de Jacobi*

$$(50) \quad [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

---

<sup>3</sup>Un pequeño caos que afecta a la bibliografía es que cuando se dirige a físicos se introduce una  $-i$  acompañando a  $X$  en la fórmula de  $\exp$  (y a veces también otra constante). Matemáticamente es raro porque  $\mathfrak{g}$  deja de ser  $T_I(G)$  y en grupos reales como  $SO(N)$  resulta chocante asignarles álgebras de matrices complejas. Sin entrar en detalles, en el lado físico es muy natural porque conviene relacionar todo con un operador  $H$  hermitico importante (el *hamiltoniano*, la “energía”) a través de otro operador unitario  $U = e^{-iH}$  (el de *evolución*).

Para los que se entusiasmen con la nomenclatura, a cualquier espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $K$  con estas tres propiedades se le llama *álgebra de Lie* en un contexto puramente algebraico. Si  $\dim V < \infty$  y  $K = \mathbb{R}$  estas álgebras de Lie “algebraicas” provienen siempre de un grupo de Lie [10, Th.3.18], esto es lo que se llama *tercer teorema de Lie* aunque difícilmente Lie lo reconocería en esta forma (el *teorema de Ado* extiende este resultado [6, §E.2]).

Ilustremos los conceptos anteriores con ejemplos. Una base sencilla de  $\mathfrak{so}(3)$  es

$$(51) \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

En el lenguaje físico se dice que son las *rotaciones infinitesimales* porque vienen de derivar en  $\text{SO}(3)$ . Para  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  se tiene la relación  $\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a} \cdot \mathbf{X})(\vec{b})$  donde  $\vec{a} \cdot \mathbf{X}$  significa  $\sum a_j X_j$  con  $a_j$  las coordenadas de  $\vec{a}$ . Esto tiene que ver con que la velocidad de una partícula que gira es un producto vectorial por el eje de giro. Ya sea por esta relación o por cálculos directos, se tiene

$$(52) \quad [X_1, X_2] = X_3, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad [X_2, X_3] = X_1.$$

Al ser  $\{X_1, X_2, X_3\}$  una base, estas relaciones caracterizan la estructura del álgebra  $\mathfrak{so}(3)$ .

Consideremos ahora  $\mathfrak{su}(2)$ . Tiene también dimensión 3, en general  $\dim \mathfrak{su}(N) = \dim \mathfrak{u}(N) - 1$  porque  $\mathfrak{su}(N)$  tiene una condición más que  $\mathfrak{u}(N)$ . Los siguientes elementos son linealmente independientes:

$$(53) \quad X_1 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto forman una base. Sacando un factor  $i/2$  se reconocen las matrices de Pauli, omnipresentes en la física cuántica, con una ordenación inusual. Es un buen ejercicio sencillo comprobar que  $\exp(tX_j) = \cos(t/2)I + 2X_j \sin(t/2) \in \text{SU}(2)$ . Si calculamos todos los corchetes llegamos a (52). Es decir,  $\text{SO}(3)$  y  $\text{SU}(2)$  tienen álgebras de Lie isomorfas. ¿Significa esto que los grupos son isomorfos? No pueden serlo porque  $\text{SU}(2)$  tiene un *centro* (los que conmutan con todos) de dos elementos  $\{I, -I\}$  mientras que el de  $\text{SO}(3)$  es trivial. Sin embargo existe un epimorfismo (preservando la estructura de variedad) cuyo núcleo es justamente  $\{I, -I\}$ . Es decir,  $\text{SU}(2)$  envuelve dos veces a  $\text{SO}(3)$ . La fórmula para tal epimorfismo tiene un aspecto impresionante

$$(54) \quad \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \in \text{SU}(2) \mapsto \begin{pmatrix} \Re(x^2 - y^2) & \Im(x^2 + y^2) & -2\Re(xy) \\ -\Im(x^2 - y^2) & \Re(x^2 + y^2) & 2\Im(xy) \\ 2\Re(x\bar{y}) & 2\Im(x\bar{y}) & |x|^2 - |y|^2 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3)$$

pero admite una interpretación en términos geométricos [13, §4], [10, §1.6.1]. Topológicamente  $\text{SU}(2)$  es como la esfera  $S^3$  y  $\text{SO}(3)$  es el espacio proyectivo resultante al identificar sus puntos

antipodales [18, §2.3]. Una manera fácil de ver que  $SO(3)$  es “proyectivo” es identificar cada elemento con un eje unitario de giro y un ángulo en  $[0, \pi]$ . Si tomamos tal ángulo como un radio, cada punto de la bola cerrada de radio  $\pi$  en  $\mathbb{R}^3$  corresponderá a un elemento de  $SO(3)$  y si queremos que la correspondencia sea biyectiva, debemos identificar los puntos antipodales de la frontera porque cambiar el sentido de giro es indiferente si el ángulo es  $\pi$ .

## 6. Toros maximales y subálgebras de Cartan

Un grupo de Lie de los que estamos considerando siempre contiene un subgrupo abeliano infinito que es también grupo de Lie. Esto es más sencillo de lo que parece, basta tomar  $\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\}$  con  $X$  cualquier elemento del álgebra de Lie.

Se llama *toro maximal* de un grupo de Lie  $G$  a un subgrupo de Lie abeliano  $T \subset G$  lo más grande posible en el sentido de la inclusión. Hay que aclarar que  $T$  lo seguimos suponiendo “de los que estamos considerando”, esto es, compacto y conexo. La compacidad realmente viene heredada de la de  $G$  pero la conexión no. Se llama toro porque es siempre isomorfo (y difeomorfo) a  $S^1 \times \cdots \times S^1$  ya que no hay otras posibilidades para grupos de Lie abelianos [14, Th.5.2]. Hay dos propiedades teóricas importantes de los toros maximales [16, VIII.1]: la primera es que todo elemento del grupo está en algún toro maximal (en nuestro caso esto se sigue de la definición) y la segunda que todos los toros maximales son conjugados. De ellas se deduce que elijamos el toro maximal que elijamos, tendrá intersección con todas las clases de conjugación por tanto evaluar  $\chi_\pi(g)$  en  $g \in G$  será lo mismo que evaluar  $\chi_\pi(t)$  en cierto  $t \in T$ , lo cual es un análogo del uso que habíamos dado en el estudio de  $SU(2)$  al hecho de que toda matriz se podía diagonalizar con un cambio de base a través de matrices del propio grupo.

La idea que habíamos avanzado, toma ahora una forma más concreta. Cada carácter, y por tanto cada representación de  $\widehat{G}$ , está determinada por su valor en un toro maximal, porque siempre podemos conjugar un elemento para llevarlo allí. Ahora bien, hallar representaciones de toros es fácil porque entendemos muy bien el caso abeliano. Lo que no parece tan claro, porque no es en absoluto sencillo, es que haya una manera de limitar los caracteres del toro a los que se extiendan a representaciones de  $G$  y que además sean irreducibles, que son que nos interesan. Las simetrías a estudiar y cómo se relaciona un toro maximal con el resto del grupo, se leen mejor en el álgebra de Lie. Por otro lado, los grupos no isomorfos  $SU(2)$  y  $SO(3)$ , que tienen la misma álgebra de Lie, sugieren la inevitable dificultad de que no vamos a encontrar allí reflejadas absolutamente todas las propiedades del grupo.

Recordemos que la operación (47) provenía de derivar el conmutador de elementos del grupo. En un toro maximal, por supuesto, este conmutador es siempre la identidad, por tanto el análogo del toro maximal en el álgebra de Lie es un subálgebra maximal tal que el corchete de Lie (47) sea siempre nulo en ella, es decir, compuesta de matrices que conmutan entre sí. Esto es lo que se llama un *subálgebra de Cartan*.

Dado un toro maximal  $T \subset G$ , su álgebra de Lie  $\mathfrak{t}$  es subálgebra de Cartan y viceversa, mediante  $\exp$  una subálgebra de Cartan da lugar a un toro maximal [14, §5.1.1]. A menudo se usa el singular “el toro maximal” o “la subálgebra de Cartan”, sobreentendiendo una elección coherente de ambos. Se llama *rango* de un grupo de Lie o de su álgebra de Lie a la dimensión como espacio vectorial de la subálgebra de Cartan, que coincide con la dimensión como variedad del toro maximal. Este concepto fue introducido por Killing en un estadio muy primitivo de la teoría de grupos de Lie [11, §5.4].

Por ejemplo, en  $SU(N)$  el subgrupo más sencillo que a uno se le ocurre de matrices que conmutan son las matrices diagonales. Es fácil ver, que ninguna matriz no diagonal conmuta con todas ellas, por tanto

$$(55) \quad T = \{\text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}) : \sum \theta_j = 0\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{t} = \{\text{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_N) : \sum \theta_j = 0\}$$

con  $\theta_j \in \mathbb{R}$ , son un toro maximal de  $SU(N)$  y su correspondiente subálgebra de Cartan. El rango de  $SU(N)$  es entonces  $r = N - 1$ .

Los giros de distinto eje en  $\mathbb{R}^3$  no conmutan, por tanto los giros alrededor de un mismo eje conforman un toro maximal de  $SO(3)$ . Sin embargo en  $SO(4)$  hay pares de giros que actúan sobre espacios ortogonales de dimensión dos y por tanto conmutan. Lo más cómodo es aprovechar lo aprendido con  $SU(N)$  y considerar matrices de giros diagonales por bloques. De esta forma tomaríamos en  $SO(3)$  y en  $SO(4)$  los toros maximales

$$(56) \quad T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 & 0 \\ \text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad T_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 & 0 & 0 \\ \text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & -\text{sen} \theta_2 \\ 0 & 0 & \text{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \right\}$$

con  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ . En el primer caso la subálgebra de Cartan correspondiente está generada por  $X_3$  en (51). En  $SO(N)$  si  $N$  es par caben  $N/2$  bloques y si  $N$  es impar  $(N - 1)/2$ , así que el rango es  $r = \lfloor N/2 \rfloor$  donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  indica la parte entera.

En estos ejemplos, la diferencia de tamaño entre el rango y la dimensión del grupo de Lie refleja el hecho de que es muy inusual que dos matrices conmuten.

Veamos con un ejemplo el tipo de problemas que aparecen cuando tratamos de extender una representación de un toro maximal  $T$  a  $G$ . Siempre podemos suponer que tal representación tiene una matriz diagonal en  $T$  porque las únicas representaciones irreducibles de un grupo abeliano tienen dimensión 1. La aplicación

$$(57) \quad \rho : M = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

define una representación del toro maximal  $T$  de  $SU(2)$ . Sin embargo es imposible que provenga de una representación  $\pi$  de  $SU(2)$  porque  $M^{-1} = C^{-1}MC$  para cierta  $C \in SU(2)$  (el giro de  $90^\circ$

ya mencionado) por tanto si  $\rho = \pi|_T$ , se debería cumplir  $\rho(M^{-1}) = \pi(C)^{-1}\rho(M)\pi(C)$  que es falso tomando determinantes.

Una interpretación algebraica del fenómeno es que las clases de conjugación en un toro maximal  $T$  constan solo de un elemento pero cuando lo introducimos en  $G$  se vuelven mayores y para que haya una extensión es necesario que todos los elementos de  $T$  en la misma clase de conjugación tengan matrices semejantes. Cada  $g \in G$  que cumple  $g^{-1}Tg = T$  inducirá una reordenación de los elementos de  $T$  que impone una serie de simetrías en las elecciones válidas de la matriz diagonal de una representación de  $T$ . Por ejemplo, en el caso anterior, las matrices diagonales  $\rho(M)$  deben ser invariantes por  $\theta \leftrightarrow -\theta$ . Por supuesto,  $g^{-1}Tg = T$  se cumple trivialmente para  $g \in T$  pero no inducen ninguna reordenación, por tanto queremos descartarlos. De esta forma surgen unas simetrías introducidas por Weyl que conforman el *grupo de Weyl* definido como

$$(58) \quad W(G) = \{g \in G : g^{-1}Tg = T\}/T.$$

Este es el cociente del normalizador y el centralizador (que coincide con  $T$ ) y se prueba que es finito [16, VIII.8], intuitivamente porque lo único que puede hacer es permutar los elementos cuando diagonalizamos una presentación matricial de  $T$ .

En el caso de  $SU(2)$  es fácil ver que con la elección anterior de  $T$ , las matrices que cumplen  $g^{-1}Tg = T$  son justamente las que tienen  $g_{11} = g_{22} = 0$ ,  $g_{12} = -g_{21}$  con  $|g_{12}| = 1$  y el cociente por  $T$  reduce el grupo de Weyl a  $e^{i\theta} \leftrightarrow e^{-i\theta}$ , por tanto  $W(SU(2)) \cong \mathbb{Z}_2$ . El mismo argumento permite intercambiar dos elementos cualesquiera de la diagonal de  $T$  en (55) y deducir

$$(59) \quad W(SU(N)) \cong S_N.$$

El caso  $SO(N)$  es algo más complicado aquí solo lo veremos para  $N = 2n$  sin profundizar. Si  $A$  y  $B$  son matrices  $2 \times 2$

$$(60) \quad \mathcal{J}^{-1} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \mathcal{J} = \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}.$$

Además  $\mathcal{J}$  es una matriz ortogonal de determinante 1. En un toro maximal de  $SO(N)$  que generalice  $T_4$  de (56), podemos permutar a nuestro antojo los bloques  $2 \times 2$  que corresponden a giros bidimensionales, lo que da una simetría  $S_n$ . Por otra parte, intercambiar variables actúa sobre cada bloque con el efecto  $\theta \leftrightarrow -\theta$

$$(61) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La matriz ortogonal usada no tiene determinante 1 sino  $-1$ , por ello en principio no es válida pero el determinante será 1 si aplicamos el proceso a  $T$  un número par de veces. Sin entrar en detalles, el resultado es el producto semidirecto

$$(62) \quad W(SO(2n)) \cong S_n \times \mathbb{Z}_2^{n-1}.$$

El  $n - 1$  se debe a que una vez elegido si intercambiamos variables o no (de ahí el  $\mathbb{Z}_2$ ) en los primeros  $n - 1$  bloques, en el último estará forzado para que el determinante sea 1.

## 7. Representaciones del álgebra de Lie

Ahora vamos a estudiar con más detalle el tipo de información del grupo de Lie que puede leerse en el álgebra de Lie. Un homomorfismo de grupos de Lie  $G \rightarrow K$  induce una aplicación tangente  $d\phi$ , en el sentido de la geometría diferencial, entre las álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{k}$  dada por

$$(63) \quad d\phi(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\exp(tX)).$$

Esta aplicación no es solo una aplicación lineal sino un homomorfismo de álgebras de Lie, esto es,  $d\phi([X, Y]) = [d\phi(X), d\phi(Y)]$ . Además es compatible con  $\exp$  en el sentido de que se tiene el primero de los siguientes diagramas conmutativos:

$$(64) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\phi} & \mathfrak{k} \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\phi} & K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\pi} & \mathfrak{gl}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\pi} & GL(V) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{t} & \xrightarrow{d\chi} & \mathbb{C} \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ T & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

Podemos considerar que las representaciones son un caso especial de este esquema. Una representación unitaria define un homomorfismo entre  $G$  y  $U(N)$  que al nivel de las álgebras pasaría de  $\mathfrak{g}$  a  $\mathfrak{u}(N)$ . En general, como muestra el segundo diagrama, deberíamos considerar el grupo de Lie no compacto  $GL(V)$  y su álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(V)$ . Si  $V = \mathbb{C}^n$ , y siempre es así salvo isomorfismos,  $GL(V)$  son todas las matrices complejas invertibles  $n \times n$  y  $\mathfrak{gl}(V)$  todas las matrices complejas  $n \times n$ . La aplicación inducida  $d\pi$  es una representación del álgebra de Lie. Hay que destacar que en este contexto se llama representación a una aplicación  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  que es lineal y respeta el corchete de Lie.

Como ya hemos indicado, al ser un toro maximal  $T$  abeliano, sus representaciones irreducibles unitarias vienen dadas por sus caracteres abelianos  $\chi$  (son de dimensión uno). Su imagen estará en  $U(1) \subset \mathbb{C}^*$  y la conmutatividad del último diagrama de (64) implica que si un elemento de  $\mathfrak{t}$  corresponde a la identidad en  $T$ , entonces necesariamente su imagen por  $d\chi$  pertenece a  $2\pi i\mathbb{Z}$ . El caso más sencillo es  $T = U(1)$  con  $\mathfrak{t} = \{i\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ . Cada carácter  $\chi$  proveniente de una representación unitaria irreducible queda unívocamente determinando por el entero  $n$  tal que  $2\pi in = d\chi(2\pi i)$ , de esta forma  $\mathbb{Z}$  parametriza  $\hat{T}$ .

Si queremos que las representaciones de  $\mathfrak{g}$  reflejen fielmente las de  $G$  debemos volver al problema de hasta qué punto el álgebra de Lie condiciona el grupo. Un hecho crucial es que se puede probar [14, §5.1.4] que  $G = \exp \mathfrak{g}$ . Del segundo diagrama conmutativo de (64) se sigue

$$(65) \quad \exp(d\pi(X)) = \pi(\exp(X)) \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}$$

y por tanto  $G = \exp \mathfrak{g}$  implica que  $d\pi$  determina totalmente  $\pi$ . Además  $d\pi$  es irreducible si y solo si  $\pi$  lo es [14, §6.1.1]. Esto se cumple incluso en el caso no compacto a pesar de que hay grupos no compactos sencillos, como  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  para los que  $\exp$  no es sobreyectiva [9, §7.2]. Todavía más, hay una famosa relación llamada *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff* (aunque parece que se debe a Dynkin [14, §5.2]) que expresa  $\exp(X)\exp(Y)$  en términos del corchete de Lie. En este sentido, el álgebra determina la ley de grupo. Teniendo esto en cuenta, parece muy chocante que los grupos  $\mathrm{SO}(3)$  y  $\mathrm{SU}(2)$  compartan álgebra de Lie sin ser isomorfos.

La explicación a esta paradoja es que no todo homomorfismo  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{k}$  en el primer diagrama de (64) es necesariamente de la forma  $d\phi$ . Por ejemplo, la “identidad”  $\mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$  que aplica las  $X_j$  de (51) en las de (53) no es de la forma  $d\phi$ , porque si lo fuera

$$(66) \quad I = \phi(I) = \phi \left( \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 2\pi & 0 \end{pmatrix} \right) = \exp \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} = -I$$

donde se ha usado la conmutatividad del diagrama para  $2\pi X_1 \in \mathfrak{so}(3)$  en la penúltima igualdad. Esto suena coherente con lo que habíamos señalado de que  $\mathrm{SU}(2)$  envuelve dos veces a  $\mathrm{SO}(3)$  mediante (54) y el elemento de  $\mathfrak{su}(3)$  que corresponde a  $2\pi X_1$  es  $4\pi X_1$ . Por cierto, en el contexto físico esto tiene una consecuencia bien extraña, resulta que el espín del electrón sigue una simetría relacionada con  $\mathrm{SU}(2)$  en vez de con  $\mathrm{SO}(3)$  y eso se traduce en que hay que girar un electrón  $720^\circ$  para que recupere su “estado” inicial.

La condición para que todos los homomorfismos sean de la forma  $d\phi$  es topológica, como en el caso de formas diferenciales, se verifica si  $G$  es simplemente conexo. En particular, los grupos de Lie simplemente conexos son isomorfos si y solo si lo son sus álgebras de Lie. Hay una construcción topológica, el *recubridor universal*, que permite introducir un grupo de Lie en otro simplemente conexo y ambos comparten la misma álgebra de Lie [10, §3.6, §3.7] [16, VII.6], por ejemplo, el recubridor universal de  $\mathrm{SO}(2)$  es  $\mathrm{SU}(2)$ . La situación es complicada porque el recubridor universal nos puede sacar del ámbito compacto e incluso de grupos de matrices, pero señala la importancia de entender los grupos de Lie simplemente conexos. Tras la clasificación de las álgebras de Lie debida a Cartan, se deduce que los grupos de Lie compactos, simplemente conexos y *simples* (con el significado de que sus subgrupos normales son discretos) se agrupan en cuatro familias infinitas  $A_n, B_n, C_n, D_n$  y cinco grupos esporádicos  $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ . La primera familia es  $A_n = \mathrm{SU}(n+1)$ ,  $n \geq 1$ , las otras son variantes de  $\mathrm{SO}(N)$  y de  $\mathrm{Sp}(N)$ .

## 8. La forma de Killing y métricas riemannianas

Por la teoría general de espacios localmente compactos, en un grupo de Lie  $G$  existe una medida de Haar  $\mu$  que en nuestro caso compacto es invariante tanto a la derecha como a la izquierda. Al ser  $G$  una variedad, cabe preguntarse si hay una estructura riemanniana en  $G$  de la que derive la medida y que permita definir los objetos métricos habituales como el tensor de curvatura, las geodésicas o los operadores diferenciales ligados a la métrica. Lo que vamos a ver

es que, bajo una condición técnica, hay una manera de crear dicha estructura canónicamente a partir de cierta forma bilineal en el álgebra de Lie.

Dado un producto escalar cualquiera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathfrak{g}$ , lo podemos transformar en una métrica en  $G$  simplemente utilizando el isomorfismo  $X \mapsto gX$  que aplica  $T_1(G)$  en  $T_g(G)$ , más concretamente, la métrica en cada punto  $g$  vendría definida por

$$(67) \quad \eta(gX, gY) = \langle X, Y \rangle.$$

Con ello es invariante por la izquierda en el sentido de que el lado derecho no depende de  $g$ . Para que sea compatible con nuestra medida de Haar, debería ser *bi-invariante*, es decir, también invariante por la derecha, y  $Xg = g^{-1}(gX)g$  implica que la condición necesaria y suficiente para ello es que el producto escalar seleccionado en  $\mathfrak{g}$  verifique

$$(68) \quad \langle X, Y \rangle = \langle g^{-1}Xg, g^{-1}Yg \rangle.$$

Si escribimos  $g = e^{-tZ}$  con  $Z \in \mathfrak{g}$  y derivamos en  $t = 0$ , se tiene

$$(69) \quad 0 = \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

Es decir, la aplicación lineal  $X \mapsto [Z, X]$ , habitualmente denotada por  $\text{ad}(Z)$  y llamada *representación adjunta* de  $\mathfrak{g}$  (porque realmente es una representación de  $\mathfrak{g}$  en sus endomorfismos), es anti-autoadjunta.

Con el propósito de garantizar (68) y (69) en un amplio contexto, se define de manera un tanto extraña, pero sin hipótesis sobre el grupo, la llamada *forma de Killing*

$$(70) \quad K(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)) = \text{Tr}(Z \mapsto [X, [Y, Z]])$$

que claramente es bilineal y simétrica y sin mucho esfuerzo se prueba que tiene las propiedades anteriores. Para ver que  $K(X, X)$  tiene un signo, se usa un argumento indirecto. Uno puede inventarse un producto escalar que satisfaga (68) promediando en  $g$  como en (14), de hecho, salvo cambiar sumas por integrales en grupos de matrices es exactamente lo mismo porque  $\pi(x) = gxg^{-1}$  es una representación. Al tomar una base ortonormal de  $\mathfrak{g}$  con este producto escalar, por (69),  $\text{ad}(Z)$  tendrá una matriz antisimétrica  $A$ , de esta forma  $K(X, X) = \text{Tr}(A^2) = -\text{Tr}(A^t A) \leq 0$  y entonces se define el producto escalar que da la métrica bi-invariante

$$(71) \quad \langle X, Y \rangle = -K(X, Y).$$

Hay un insidioso problema técnico que reaparece en otras partes de la teoría y es que  $K(X, X) \leq 0$  no es exactamente lo mismo que  $K(X, X) < 0$  para todo  $X \neq 0$ . Si en  $\mathfrak{g}$  hay un subespacio no trivial  $\mathfrak{g}_0$  de elementos que conmutan con todos, para  $X \in \mathfrak{g}_0$  se tiene  $\langle X, X \rangle = 0$  y falla que el producto escalar sea definido positivo. En el lado del grupo esto es lo mismo que decir



que el centro de  $G$  contenga infinitos elementos. Si  $\mathfrak{g}_0 \neq 0$  o equivalentemente si (71) define un producto escalar o el centro del grupo es finito, se dice que el álgebra o el grupo es *semisimple* (para el caso no compacto, esta definición y las equivalencias necesitan modificaciones). Es posible dar también una caracterización topológica [10, §6.1]. La mayor parte de la teoría de grupos de Lie se desarrolla bajo esta hipótesis. Con el objetivo de entender las representaciones, el caso compacto no entraña dificultades intrínsecas insalvables (aunque sí formales) ya que en principio uno podría escribir  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}'$  y trabajar en  $\mathfrak{g}'$ , como se hace en [14].

Los grupos  $SU(N)$  y  $SO(N)$ , excluyendo el caso trivial conmutativo  $SO(2)$ , son semisimples. Incluso más, añadiendo la excepción  $SO(4)$ , son *simples* [18], no admiten subgrupos normales propios infinitos. Como es tan inusual que las matrices conmuten, casi todos los subgrupos que se nos ocurran de  $U(N)$  serán semisimples, quizá la excepción más notable es el propio grupo  $U(N)$  cuyo centro son las matrices de la forma  $e^{i\theta}I$ .

En estos grupos de matrices, a la hora de hacer operaciones explícitas, aunque sean asistidas por ordenador, hay algo que inadmisiblemente pasan por alto muchos textos. Imaginemos que deseamos hallar  $\langle X, Y \rangle$  para dos elementos concretos  $X, Y \in \mathfrak{su}(5)$ . Debemos escoger una base de  $\mathfrak{su}(5)$  y calcular cómo actúa sobre ella  $X$ , lo que dará lugar a una matriz cuadrada para  $\text{ad}(X)$  cuyo número de columnas es  $\dim \mathfrak{su}(5) = 5^2 - 1 = 24$ , repetir lo mismo con  $Y$ , multiplicar las matrices y hallar la traza. Una tarea inmensa. Pues bien, el resultado coincide con  $-10 \text{Tr}(XY)$ , que organizando los cálculos solo requiere cinco productos escalares en  $\mathbb{C}^5$ . En general, cuando  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(N)$ , y recordemos que siempre se puede considerar así en nuestros grupos compactos conexos, si el grupo es simple se tiene que  $K(X, Y)$  es un múltiplo de  $\text{Tr}(XY)$  [14, §6.2.2] y si solo es semisimple,  $\mathfrak{g}$  se descompone en una suma directa de modo que es válida en cada sumando. La prueba se basa en que intuitivamente un producto escalar está determinado salvo constantes por los movimientos que lo dejan invariante [1] [16, VIII.2] y (68) da esta suerte de unicidad. En  $\mathfrak{su}(N)$  se tiene  $K(X, Y) = 2N\text{Tr}(XY)$  y en  $\mathfrak{so}(N)$ ,  $K(X, Y) = (N - 2)\text{Tr}(XY)$ . Es sorprendente que la comprobación de estas igualdades por cálculos directos, sin usar la invariancia, sea tan laboriosa<sup>4</sup>.

Claramente se tiene que para subgrupos de  $U(N)$ , semisimples o no, siempre  $-c\text{Tr}(XY)$  con  $c > 0$  define un producto escalar en el álgebra de Lie que verifica (68) y podemos usarlo a través de (67) para obtener una métrica bi-invariante. En los casos, de  $SU(N)$  y  $SO(N)$ , excluyendo  $SO(2)$ , coincidirá de hecho salvo constantes con el inducido por  $K(X, Y)$ . Si  $U = U(x_1, \dots, x_n)$  es una parametrización del grupo  $G$  en un entorno, la componente  $\eta_{ij}$  de la métrica con estas coordenadas es

$$(72) \quad \eta_{ij} = \eta\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial x_j}\right) = \left\langle U^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right\rangle = -c \text{Tr}\left(U^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_i}, U^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_j}\right).$$

---

<sup>4</sup>También sorprende que en [6] se proponga en un ejercicio inventar esta y otras fórmulas sin mencionar siquiera la invariancia (68). Por ejemplo, para  $SO(N)$  lo natural sería escoger la base  $\{X_{ij}\}$ ,  $i < j$ , donde  $X_{ij}$  tiene un uno en la posición  $ij$ , un  $-1$  en la  $ji$  y el resto ceros. Una matriz  $A \in \mathfrak{so}(N)$  se escribe como  $A = \sum_{i < j} a_{ij} X_{ij}$  y usando la relación de conmutación  $[X_{ij}, X_{rs}] = X_{is}\delta_{jr} + X_{jr}\delta_{is} - X_{ir}\delta_{js} - X_{js}\delta_{ir}$  habría que demostrar que  $Z \mapsto [X_{ij}, [X_{kl}, Z]]$  tiene traza  $(N - 2)\text{Tr}(A^2) = (N - 2) \sum_{i,j} a_{ij}^2$ .

Por ejemplo, para  $SU(2)$  con  $c = 4$ , que es lo que corresponde a la forma de Killing, unos cálculos largos pero factibles a mano, prueban que con la parametrización (42) la métrica es

$$(73) \quad \eta = 8 \cos^2 \varphi d\theta_1^2 + 8 \sin^2 \varphi d\theta_2^2 + 8 d\varphi^2,$$

que coincide con la de  $\sqrt{8}S^3$  en coordenadas esféricas, ampliando lo que habíamos dicho de que  $SU(2)$  es topológicamente  $S^3$ , resulta que también lo es métricamente.

Es bien conocido en geometría diferencial [3, §1.2] que una métrica riemanniana tiene asociada una forma de volumen que en coordenadas da lugar a la medida

$$(74) \quad d\mu = |\eta|^{1/2} dx_1 \cdots dx_n \quad \text{con} \quad |\eta| = \det(\eta_{ij}),$$

donde  $\eta_{ij}$  son, como antes, las componentes de la métrica en el sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . Esta medida es invariante por el grupo y por tanto debe coincidir con la medida de Haar salvo una constante de escala. De acuerdo con (73) tenemos la fórmula explícita  $d\mu = 8\sqrt{2} |\sin(2\varphi)|$  para la medida de Haar (que podría calcularse con otros métodos más sencillos [19, §4]).

Una vez que hay una métrica riemanniana, se puede introducir un operador de Laplace-Beltrami como la divergencia del gradiente, lo que implica la fórmula

$$(75) \quad \Delta f = |\eta|^{-1/2} \sum_{i,j} \partial_i (|\eta|^{1/2} \eta^{ij} \partial_j f),$$

donde  $(\eta^{ij})$  es la matriz inversa de  $(\eta_{ij})$  y  $\partial_i$  indica una derivada parcial respecto a la  $i$ -ésima variable. La métrica (73) da lugar al operador de Laplace-Beltrami en  $SU(2)$  mencionado en (43). Más adelante veremos una forma equivalente construida directamente a partir del álgebra de Lie.

Una última observación es que, dependiendo de los autores, puede ser más natural considerar (71) o un producto escalar proporcional, por ejemplo dado por  $\text{Tr}(XY)$  lo que causa que a veces los cálculos de (75) difieran en una constante multiplicativa ya que dividir la métrica por una constante se traduce en multiplicar  $\Delta$  por ella según (75).

## 9. Pesos, raíces y algunos ejemplos

Recordemos una vez más que deseamos estudiar las representaciones irreducibles de  $G$  a través de un subgrupo abeliano grande, un toro maximal  $T$ . Por ahora sabíamos que la irreducibilidad está perfectamente reflejada en el álgebra de Lie y que la restricción de un representación irreducible de  $G$  a  $T$  la determina, pues contiene elementos en todas las clases de conjugación y por tanto define unívocamente el carácter asociado.

Como  $T$  es abeliano, sus representaciones vienen dadas, salvo equivalencias, por matrices diagonales compuestas de caracteres abelianos, es decir, de funciones  $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}$  tales que

$\chi(t_1 t_2) = \chi(t_1) \chi(t_2)$ . El tercer diagrama conmutativo de (64) muestra que tales caracteres satisfacen  $\chi(\exp(H)) = e^{2\pi i \ell(H)}$  con  $\ell$  una forma lineal real. Si  $\exp(H) = I$  entonces se debe tener  $\ell(H) \in \mathbb{Z}$ , como ya habíamos comentado. Este  $2\pi i \ell$  es lo que se llama un peso. La definición habitual en la bibliografía es un poco más misteriosa: Dada una representación  $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ , se dice que  $\mu \in \mathfrak{t}^*$  es un *peso* para la representación  $\pi$  si

$$(76) \quad V_\mu = \{v \in V : d\pi(H)v = \mu(H)v \text{ para todo } H \in \mathfrak{t}\} \neq \{0\}.$$

Para reconciliar esto con la idea anterior, hay que recordar que  $\mathfrak{t}^*$  es la notación para el dual de  $\mathfrak{t}$  (las formas lineales) y que (65) implica que para  $t = \exp(H)$  se cumple  $\pi(t)v = e^{\mu(H)}v$  cuando  $v \in V_\mu$ , es decir, que en  $V_\mu$  la representación se comporta como la multiplicación por el  $\chi(\exp(H))$  antes mencionado, además  $\exp(H) = I$  obliga a  $\mu(H) \in 2\pi i \mathbb{Z}$ . La diagonalización de  $\pi|_T$  da lugar a la descomposición

$$(77) \quad V = \bigoplus_{\mu} V_\mu$$

donde, por supuesto, el conjunto de pesos en el que  $\mu$  varía es finito y depende de la representación. Según lo dicho, no todas las formas de  $\mathfrak{t}^*$  provienen de una representación. Añadiendo la condición aritmética, se define el conjunto de *pesos analíticamente enteros*

$$(78) \quad A = \{\mu \in \mathfrak{t}^* : \mu(H) \in 2\pi i \mathbb{Z} \text{ cuando } \exp(H) = I \text{ con } H \in \mathfrak{t}\}.$$

No es difícil ver [14, §6.3.2] que están en biyección con las representaciones irreducibles del toro maximal  $T$ . En particular, para cualquier representación irreducible  $\pi$  de  $G$  se tendrá que  $d\pi|_T$  tendrá asociada una colección finita de pesos en  $A$ . También es cierto (aunque esto no se deriva de lo anterior) que cualquier elemento de  $A$  aparece en alguna representación irreducible  $\pi$  de  $G$ . El problema es entonces saber cómo se agrupan los elementos de  $A$  en colecciones para que haya una biyección. La respuesta a grandes rasgos es que una forma de agruparlos es válida si respeta unas relaciones entre los subespacios en (77) que generalizan el truco analítico empleado en (40) para  $\text{SU}(2)$  y que llevan implícitas las simetrías exigidas por el grupo de Weyl (58).

Las relaciones análogas a (40) viene de diagonalizar simultáneamente todos los corchetes de Lie asociados a elementos de  $\mathfrak{t}$ . Se dice que  $\alpha \in \mathfrak{t}^* - \{0\}$  es una *raíz* de  $\mathfrak{g}$  si

$$(79) \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : [H, Z] = \alpha(H)Z \text{ para todo } H \in \mathfrak{t}\} \neq \{0\}.$$

En realidad esto es un caso particular de (76) en el que usamos la representación adjunta,  $\text{ad}$ , en lugar de  $\pi$ . La notación  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  indica que consideramos el álgebra de Lie sobre  $\mathbb{C}$ , en lugar de sobre  $\mathbb{R}$ . Enseguida veremos por qué. El caso  $\alpha = 0$  que hemos excluido correspondería a  $\mathfrak{t}$  y entonces el análogo de (77) es

$$(80) \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

donde  $R$  es el conjunto de raíces que por supuesto es finito y solo depende de  $\mathfrak{g}$ , en principio no tiene nada que ver con las representaciones de  $G$ . Introducir  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  parece extraño porque si  $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ , en general  $\exp(X)$  no tiene sentido como elemento del grupo  $G$ . Por ejemplo,  $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$  y consecuentemente  $e^{i\alpha} \in U(1)$  si  $\alpha$  es real pero esto no es cierto si  $\alpha$  es imaginario. El motivo para que  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  aparezca en (79) es que  $\alpha(H)$  es imaginario puro, lo cual se deduce usando una base ortonormal con la relación (69), de donde también se deduce que si  $\alpha$  es raíz,  $-\alpha$  también lo es. Es la misma situación que ocurre cuando diagonalizamos una matriz real antisimétrica, aunque sea real todos los autovectores de autovalores no nulos están en  $\mathbb{C}^n$  y no en  $\mathbb{R}^n$ . Por cierto, la irreducibilidad de una representación de  $\mathfrak{g}$  no cambia al extenderla a  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  [14, §6.1.2].

Se puede probar [19, §35] que  $\dim \mathfrak{g}_{\alpha} = 1$ , es decir, que estos subespacios están generados por un solo elemento  $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . La gracia de las raíces es que permiten moverse de un peso a otro. Lo relevante es la siguiente identidad sencilla que [6] no se cansa de anunciar como el “cálculo fundamental”: Para  $H \in \mathfrak{t}$  y  $v \in V_{\mu}$

$$(81) \quad d\pi(H)d\pi(E_{\alpha})v = d\pi(E_{\alpha})d\pi(H)v + d([H, E_{\alpha}])v = \mu(H)d\pi(E_{\alpha})v + \alpha(H)d\pi(E_{\alpha})v.$$

Esto prueba que

$$(82) \quad d\pi(E_{\alpha})v \in V_{\mu+\alpha} \quad \text{para todo } v \in V_{\mu},$$

donde se sobreentiende  $V_{\mu+\alpha} = \{0\}$  si  $\mu + \alpha$  no es un peso de la representación. Con ello “subimos” vectores de  $V_{\mu}$  a  $V_{\mu+\alpha}$  y cambiando  $\alpha$  por  $-\alpha$  podemos “bajar” vectores  $V_{\mu+\alpha}$  a  $V_{\mu}$ , en analogía con (40). En gran medida lo que complica la teoría es que si el rango del álgebra de Lie no es uno, hay muchas direcciones y hay que precisar qué significa exactamente subir y bajar.

La idea geométrica queda clara, como veremos, dibujando las raíces y los elementos de  $A$ . ¿Cómo dibujar formas lineales? Muy fácil, dibujando sus coeficientes, una vez fijada una base. Más adelante necesitaremos hablar de ángulos y simetrías por ello las bases fijadas serán ortonormales con el producto (71) o proporcionales a ellas (para que los ángulos se conserven).

Comencemos con  $\text{SO}(3)$ , digamos que consideramos que  $\mathfrak{t}$  está generado por ejemplo por  $X_1$  en (51) (no podemos añadir más matrices que conmuten). Si imponemos que  $Z = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$  es autovector de  $\text{ad}(X_1)$ , obtendremos tras un pequeño cálculo con las relaciones (52), dos autovectores<sup>5</sup>

$$(83) \quad [X_1, E_+] = iE_+ \quad \text{y} \quad [X_1, E_-] = -iE_- \quad \text{con} \quad E_{\pm} = X_2 \mp iX_3.$$

Es decir, las raíces son las formas caracterizadas por  $\alpha_{\pm}(X_1) = \pm i$ . Por otra parte,  $\exp(aX_1) = I$  si y solo si  $a \in 2\pi\mathbb{Z}$ , por tanto los elementos de  $A$  son las formas con  $\mu_k(X_1) = ik$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

---

<sup>5</sup>Por razones que en breve quedarán claras, en física  $E_+$  y  $E_-$  se conocen como *raising operator* y *lowering operator* [8, §3.2].

Cuando quitamos la  $i$ , las raíces aplicadas a la base  $\{X_1\}$  de  $\mathfrak{t}$  dan  $\pm 1$  y los elementos de  $A$  dan  $k \in \mathbb{Z}$ . Si dibujamos en  $\mathbb{R}$  las primeras como vectores y los segundos como pequeños círculos, se tiene la figura

$$(84) \quad \text{SO}(3) \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ$$

Dada una representación irreducible  $\pi$ , digamos que  $n$  es el mayor elemento de  $\mathbb{Z}$  en el diagrama que corresponde a un peso de  $\pi$ . Por consideraciones sobre el grupo de Weyl,  $-n$  también debería estar. Aplicando a  $\mu_{-n}$  sucesivas veces  $\alpha_+$  parece que deberíamos tener la colección de pesos  $\{\mu_{-n}, \mu_{-n+1}, \dots, \mu_n\}$ . Vamos a comprobar que todos ellos aparecen realmente en la representación  $\pi$ . Si no fuera así y algún  $\mu_r$  con  $r > -n$  mínimo no estuviera, entonces  $V_{\mu_{r-1}+\alpha_+} = V_{\mu_r} = \{0\}$  y el subespacio  $V' = \bigcup_{t < r} V_{\mu_t}$  sería invariante por  $d\pi(E_+)$  y por  $d\pi(E_-)$  gracias a (82). Además lo es por  $d\pi(H)$  para  $H \in \mathfrak{t}$  por la definición (76). Teniendo en cuenta la descomposición (80), se contradice que  $d\pi$  sea irreducible pues deja un subespacio propio invariante.

Elaborando un poco más el argumento se puede probar que esta asignación de una colección de pesos consecutivos a una representación irreducible es inyectiva, es decir que dos representaciones irreducibles no equivalentes no pueden dar la misma colección [14, Th.7.3(g)]. La idea a grandes rasgos es que una vez que tenemos un vector que genera  $V_{\mu_n}$  (se puede probar que es de dimensión uno), el resto están totalmente determinados, de la misma forma que en (40). Elegir ese vector se traduce en la libertad de hacer un cambio de base en  $V$  e implica la equivalencia de las representaciones.

Como  $\text{SU}(2)$  comparte la estructura del álgebra de Lie con  $\text{SO}(3)$ , sus raíces son las mismas. Por otro lado, recordando la definición de  $X_1$  en (53), en  $\text{SU}(2)$  se cumple  $\exp(aX_1) = I$  si y solo si  $a \in 4\pi\mathbb{Z}$ , por tanto los elementos de  $A$  son las formas con  $\mu_k(X_1) = \frac{1}{2}ik$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . El dibujo correspondiente es:

$$(85) \quad \text{SU}(2) \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ$$

Si llamamos  $\mu_k$  al peso correspondiente a una elección de  $k$ , tendremos una colección como antes entre  $k = -n$  y  $k = n$  para cierto  $n$  pero ahora los posibles índices son  $k = n - 2j$  con  $0 \leq j \leq n$  lo cual está en perfecta sintonía con (41). También concuerda con lo visto hasta ahora que cada colección de pesos en  $\text{SO}(3)$  dé lugar ahora a dos posibles listas, una con índices pares y otra con impares porque  $\text{SU}(2)$  debería tener el “doble” de representaciones, según sugería (66).

En términos geométricos, cabe interpretar lo anterior diciendo que a una representación irreducible  $\pi$  le podemos asignar en  $\text{SO}(3)$  un entero positivo, correspondiente a la coordenada de un “punto” de  $A$ , señalado con doble círculo en la primera figura, y el subconjunto de  $A$  correspondiente  $\pi$  será bajar con el vector de la raíz negativa desde él hasta su simétrico. En

SU(2) la situación es la misma pero el punto de partida puede ser entero o semientero y por tanto hay configuraciones que contienen al origen y otras que no.

$$(86) \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \circ \\ \text{SO}(3) \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \text{SU}(2) \end{array}$$

Ahora pasaremos a ver las complicaciones geométricas que aparecen cuando el rango se incrementa. El ejemplo habitual es SU(3), el grupo más importante tras SU(2) en física de partículas, que tiene rango 2.

La base más común de SU(3) está formada por las llamadas *matrices de Gell-Mann* [8, §7.1]. Tomamos de entre ellas, adecuadamente escaladas, la base de  $\mathfrak{t}$  compuesta por las matrices

$$(87) \quad H_1 = \frac{i\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad H_2 = \frac{i}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes se han elegido para que  $\{H_1, H_2\}$  sea ortonormal con el producto escalar (71) que deriva de la forma de Killing  $6 \text{Tr}(XY)$ .

Si  $E_{jk}$  con  $j \neq k$  es la matriz que tiene un uno en el lugar  $jk$  y ceros en el resto, es fácil ver que, con la notación de (55),  $[H, E_{jk}] = i(\theta_j - \theta_k)E_{jk}$ . En nuestro caso tenemos seis raíces  $\alpha_{jk}$  correspondientes a  $E_{12}, E_{13}, E_{23}, E_{21}, E_{31}, E_{32}$  que completan el espacio en (80) y por consiguiente no puede haber más. Las imágenes de  $H_1$  y  $H_2$  por  $\alpha_{jk}$  están recogidas en la siguiente tabla:

$$(88) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \hline H_1 & i\sqrt{3}/3 & i\sqrt{3}/6 & -i\sqrt{3}/6 & -i\sqrt{3}/3 & -i\sqrt{3}/6 & i\sqrt{3}/6 \\ \hline H_2 & 0 & i/2 & i/2 & 0 & -i/2 & -i/2 \end{array}$$

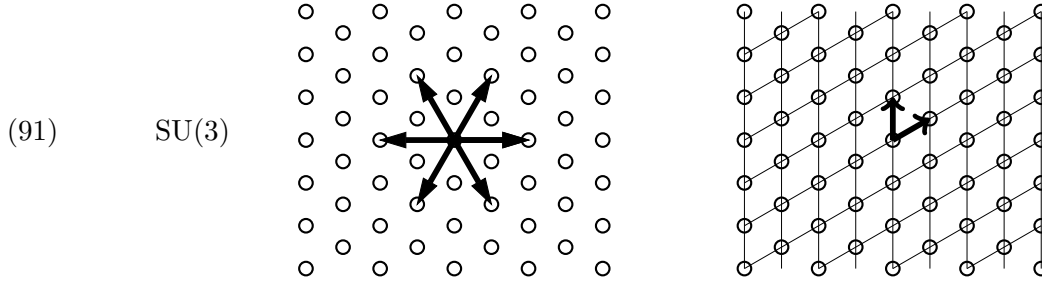
Los vectores en las columnas, sin la  $i$ , apuntan a los vértices de un hexágono regular. Con un cálculo se comprueba que los elementos  $H \in \mathfrak{t}$  que cumplen  $\exp(H) = I$  son justamente aquellos de la forma

$$(89) \quad H = 4\pi k\sqrt{3}H_1 + 2\pi l(-\sqrt{3}H_1 + 3H_2) \quad \text{con } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Al imponer  $\mu(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ , o equivalentemente al hallar el retículo dual del generado por  $2\sqrt{3}H_1$  y  $-\sqrt{3}H_1 + 3H_2$ , se deduce que  $\mu \in A$  si y solo si  $\mu(H_1) = iu\sqrt{3}/6$  y  $\mu(H_2) = i(u + 2v)/6$  con  $u, v \in \mathbb{Z}$ . Es decir,  $A$  es el retículo

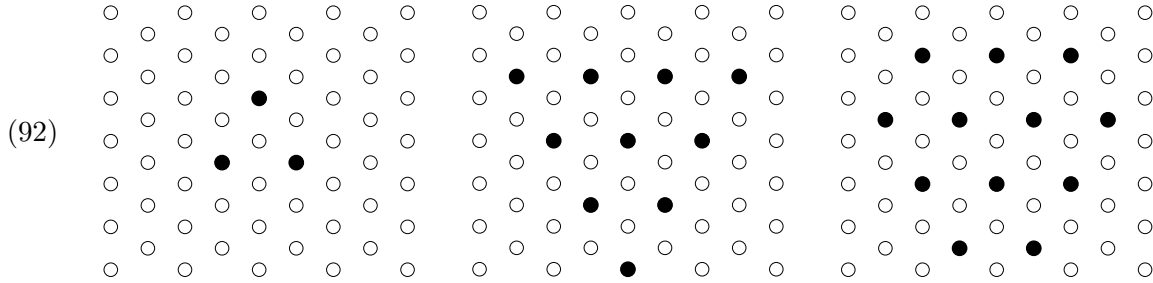
$$(90) \quad A = \left\{ uw_1 + vw_2 : u, v \in \mathbb{Z}, w_1 = i\left(\frac{\sqrt{3}}{6}H_1^* + \frac{1}{6}H_2^*\right), w_2 = \frac{i}{3}H_2^* \right\}.$$

Dibujando, como antes, las raíces como vectores y los elementos de  $A$  como círculos, se obtiene el esquema de la primera figura. En la segunda figura se indican los generadores  $w_1$  y  $w_2$  de  $A$  en (90).



Ahora no está claro cuál es el análogo de las tiras simétricas (86) de pesos que correspondían a cada representación irreducible. El problema fundamental es que la elección del “mayor  $n$ ” o del “menor  $n$ ” no tiene sentido cuando hay seis direcciones en que movernos. La situación se agrava cuando el rango crece, pues aumenta la dimensión del espacio ambiente.

Para ilustrar la complicación que albergan los ejemplos, en las siguientes figuras se han resaltado los pesos de tres representaciones irreducibles:



En todos los casos el origen está en el centro de la figura. Como curiosidad, la primera es la que Gell-Mann hizo corresponder a las antipartículas de los tres hipotéticos quarks y la segunda de la que conjeturó la existencia de la partícula  $\Omega^-$ , que está asociada al vértice inferior [8, §11.3, §11.4].

Los detalles específicos de los cálculos de raíces y pesos en  $SO(3)$ ,  $SU(2)$  y  $SU(3)$  quizá den la impresión de que cada caso es diferente y son difícilmente generalizables pero no es así, los conjuntos  $R$  y  $A$  son conocidos para los grupos clásicos [16, VIII.9, IX.8] y es asequible hallarlos. A modo de ejemplo, vamos a ver que tras un estudio preliminar de  $SO(4)$ , es posible abordar el caso  $SO(2n)$ .

En  $SO(4)$ , con la elección del toro maximal como en (56), lo natural es trabajar con bloques  $2 \times 2$ . Una base natural de  $\mathfrak{t}$ , proporcional a una ortonormal, es  $\{e_1, e_2\}$  con

$$(93) \quad e_1 = \begin{pmatrix} J & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad y \quad e_2 = \begin{pmatrix} O & O \\ O & J \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El problema de autovalores para calcular las raíces,  $[e_1, Z] = \alpha(e_1)Z$ ,  $[e_2, Z] = \alpha(e_2)Z$ , conlleva algunos cálculos y se obtienen soluciones de la forma:

$$(94) \quad Z = \begin{pmatrix} O & B \\ -B^t & O \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

que dan  $\alpha(e_1) = \pm i$ ,  $\alpha(e_2) = \pm i$  con todas las combinaciones de signos. Así pues, en términos de la base dual, las raíces son  $\epsilon_1 e_1^* + \epsilon_2 e_2^*$  con  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-i, i\}$ . Los pesos analíticamente enteros son mucho más sencillos, porque  $\exp(a_1 e_1 + a_2 e_2) = I$  claramente equivale a  $a_1, a_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$  y por tanto los pesos en  $A$  son  $\mu = ib_1 e_1^* + ib_2 e_2^*$  con  $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ .

En  $\text{SO}(2n)$  con  $n > 2$  no hay diferencias mayores porque siempre podemos trabajar en pares de bloques  $2 \times 2$ . La base de  $\mathfrak{t}$  es  $\{e_1, \dots, e_n\}$  donde  $e_l$  tiene una  $J$  en el bloque  $l$  de la diagonal. Una vez seleccionada una pareja de bloques en los lugares  $j$  y  $k$ , el cálculo de las raíces para  $\text{SO}(4)$  es válido simplemente rellenando  $Z$  con ceros en los bloques no usados y se obtiene  $\epsilon_1 e_j^* + \epsilon_2 e_k^*$  donde se impone  $j < k$  para no repetir raíces. Los pesos no requieren nuevas consideraciones pues  $\exp(\sum a_j e_j) = I$  se desacopla en  $\exp(a_j e_j) = I$  y así  $a_j \in 2\pi\mathbb{Z}$ . En definitiva, se concluye que para  $\text{SO}(2n)$

$$(95) \quad R = \{\epsilon_1 e_j^* + \epsilon_2 e_k^* : \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-i, i\}, 1 \leq j < k \leq n\}, \quad A = \left\{ i \sum_{j=1}^n b_j e_j^* : b_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

El número de raíces es  $2n(n-1)$ , lo que sumado a la dimensión  $n$  de  $\mathfrak{t}$  da  $2n^2 - n$  que coincide con la primera fórmula de (46) para  $N = 2n$ , en consonancia con (80).

## 10. El teorema del peso más alto

El objetivo es utilizar las raíces para caracterizar las propiedades que debe tener un subconjunto finito de  $A$  para que corresponda unívocamente a una representación irreducible. Antes de ello vamos a ver con un ejemplo un problema técnico que surge al considerar grupos no semisimples.

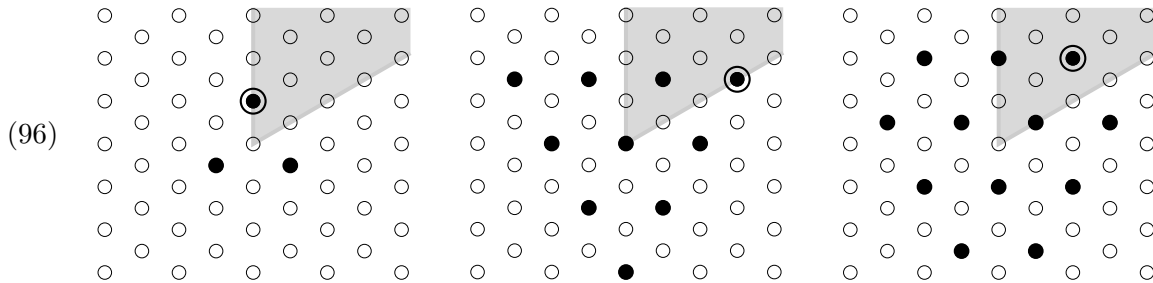
Una base de  $\text{U}(2)$  proporcional a una ortonormal con el producto escalar (71) es (53) añadiendo  $X_0 = \frac{1}{2}iI$ . El toro maximal  $T$  de las matrices diagonales imaginarias puras tiene álgebra de Lie  $\mathfrak{t}$  generada por  $X_0$  y  $X_1$ . Al calcular las raíces,  $X_0$  no aporta nada ya que  $[X_0, Z] = 0$ , obtenemos entonces las dos raíces  $\alpha_{\pm}$  de  $\text{SU}(2)$ , que están alineadas porque  $\alpha_- = -\alpha_+$ , sin embargo  $A$  sigue siendo un retículo en dos dimensiones porque todas las combinaciones enteras de  $2\pi(X_0 + X_1)$  y  $2\pi(X_0 - X_1)$  se aplican en  $I$  por exp. Esta diferencia de dimensión, manifestada en que las raíces viven en una línea y los pesos en un plano, tiene que ver con que el elemento  $X_0$  correspondiente al centro commute con todo: hay una raíz que no vemos porque se ha anulado. El problema no es grave y se resuelve en el grupo trabajando con  $\text{U}(2)/T \cong \text{SU}(2)$  o en el álgebra considerando  $\mathfrak{g}'$  tal que  $\mathfrak{g} = \langle X_0 \rangle \oplus \mathfrak{g}'$ . Esto funciona en



general en nuestro caso porque los grupos de Lie compactos siempre tienen álgebras *reductivas* [14, §5.2.2], lo cual significa que una vez que se han separado los que conmutan con todos, obtenemos un álgebra semisimple. De todas formas, para evitar complicaciones supondremos en esta sección directamente que el álgebra de Lie es semisimple, lo cual asegura que las raíces generan un retículo de la misma dimensión que la de  $\mathfrak{t}$  [14, §6.1.4].

Recordemos que el grupo de Weyl (58) daba unas simetrías que debían satisfacer los caracteres abelianos de  $\pi|_T$  o equivalentemente los pesos (76). Tal grupo se definía a través de la conjugación, la cual es un movimiento para el producto escalar por (68), lo que sugiere que siempre que usemos bases ortonormales, o proporcionales a ellas, tendremos que el diagrama de pesos de una representación es invariante por ciertos movimientos euclídeos. Tales movimientos son justamente las simetrías especulares por los hiperplanos perpendiculares a las raíces. En el caso de  $\text{SO}(3)$  o  $\text{SU}(2)$  esto está claro porque corresponde a la simetría  $\mu_n \leftrightarrow \mu_{-n}$  que ya habíamos visto, la simetría por el origen en (84) o en (85). La prueba general, que puede consultarse por ejemplo en [14, §6.4.4] o [16, VIII.8], se puede reducir a este caso usando que  $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \cong \mathfrak{su}(2)_\mathbb{C}$ , haciendo allí la simetría y dejando el resto de los sumandos en (80) fijos.

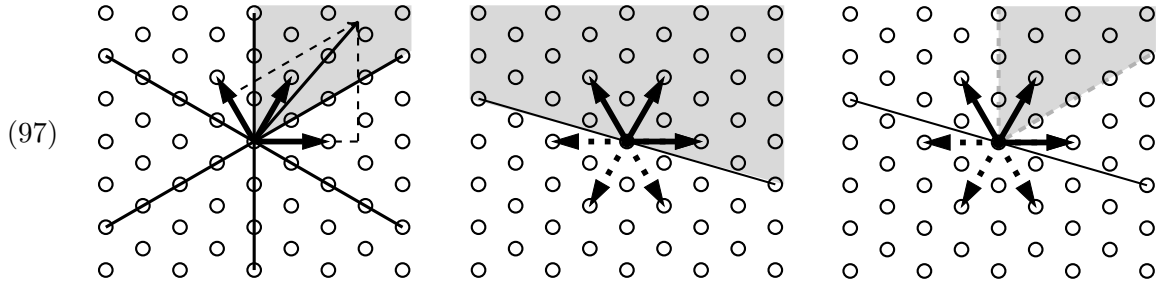
Al trazar todos hiperplanos por los que se hacen las simetrías, el espacio queda dividido en diferentes pirámides no acotadas (conos con caras planas) llamadas *cámaras de Weyl* (curiosamente parece que tales objetos no fueron introducidos por Weyl sino por Cartan [11, §12.6]). Conociendo los puntos de  $A$  en una de esas cámaras que corresponde a una representación, podemos hallar el resto por reflexiones en las caras. Por ejemplo, para  $\text{SU}(3)$  las cámaras serían sectores, se ha sombreado una de ellas en los siguientes diagramas que ilustran que las representaciones de (92) son invariantes por simetrías. El peso destacado en la cámara de Weyl seleccionada se comentará más adelante.



El grupo de Weyl impone una cantidad notable de simetrías al retículo contenido en  $A$  generado por las raíces y eso le dota de propiedades que aparecen en áreas insospechadas<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Por ejemplo, el problema de hallar el número máximo de bolas disjuntas tangentes a una fijada, todas del mismo radio, permanece abierto excepto para seis valores de la dimensión:  $d = 1, 2, 3, 4, 8$  y  $24$ . En los cinco primeros, tomando la esfera fijada en el origen, se pueden poner las otras esferas en los lugares indicados por las raíces para  $\mathfrak{su}(2)$ ,  $\mathfrak{su}(3)$ ,  $\mathfrak{su}(4)$ ,  $\mathfrak{so}(8)$  y  $E_8$ , una de las álgebras de Lie esporádicas.

Cualquier vector apuntando al interior de una cámara de Weyl tendrá proyección positiva sobre los vectores de las raíces cuyos planos de simetría forman las fronteras de la cámara, como muestra la primera de las siguientes figuras. Estas raíces se llaman a menudo *raíces simples* y forman una base. Claramente cualquier raíz en el mismo semiespacio tendrá coordenadas no negativas en esta base (de hecho enteras [14, §6.4.3]) y por tanto también cada punto interior de la cámara de Weyl correspondiente tendrá proyección positiva sobre ellas. Es posible y conveniente proceder en sentido contrario eligiendo un semiespacio arbitrario, sin raíces en la frontera, como en la segunda figura, y denominar *raíces positivas* a las raíces contenidas en él y *negativas* al resto, que son sus opuestas. Una vez seleccionado el conjunto  $R^+$  de raíces positivas, se le puede hacer corresponder el subconjunto de vectores con proyección positiva sobre cada raíz de  $R^+$  y con ello se obtiene el interior de la cámara de Weyl (tercera figura).



Una vez que hemos seleccionado una cámara de Weyl y equivalentemente un conjunto  $R^+$  de raíces positivas, definimos el *peso más alto*  $\lambda$  de una representación como el que corresponde a un punto en la cámara de Weyl y de forma que  $\lambda + \alpha$  no sea peso para ninguna raíz  $\alpha \in R^+$ . Los puntos resaltados en (96) son pesos más altos de las representaciones consideradas porque no podemos saltar a otros puntos con las raíces positivas de (97).

El teorema del peso más alto [10, §7.2] [14, §7.1] afirma que, una vez fijado  $R^+$  (y su cámara de Weyl), una representación irreducible tiene un único peso más alto  $\lambda$ , todos los pesos son de la forma  $\lambda - \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha \alpha$  con  $n_\alpha$  enteros no negativos y el peso más alto de una representación la determina salvo equivalencias.

La última parte lo que establece es una aplicación inyectiva

$$(98) \quad \mathcal{F} : \widehat{G} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{con} \quad \mathcal{H} = \{\mu \in A \text{ en la cámara de Weyl}\}.$$

Recordemos que  $\widehat{G}$  era una colección de representantes de las clases de equivalencia de las representaciones irreducibles de  $G$ . Más adelante veremos que es una biyección, es decir, salvo equivalencias, las representaciones irreducibles están en correspondencia uno a uno con los puntos del retículo  $A$  en la cámara de Weyl. Por ejemplo, las elecciones de los puntos marcados en (96) determinan completamente la configuración. en este sentido, la primera parte del teorema

se puede apurar un poco más [4, §4.10], no solo los pesos son de la forma  $\lambda - \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha \alpha$  sino que todos los pesos se obtienen considerando los que hay de este tipo en la cámara de Weyl y aplicándoles todas las simetrías del grupo de Weyl. Pensando un poco sobre las figuras (96), se deduce que los esquemas de puntos correspondientes a una representación irreducible de  $SU(3)$  tienen genéricamente forma hexagonal invariante bajo giros de  $120^\circ$  y degeneran en triángulos cuando el peso más alto está justamente en la frontera de la cámara de Weyl.

La demostración del teorema del peso más alto es muy parecida a los argumentos empleados con  $SO(3)$ . Por ejemplo, para  $\pi$  representación irreducible con peso más alto  $\lambda$ , considerando  $V' = \bigcup V_\mu$  con  $\mu$  de la forma  $\lambda - \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha \alpha$  (lo que incluye a  $\lambda$ ), se tiene que  $V'$  es invariante por  $d\pi(E_{-\alpha})$  con  $\alpha \in R^+$  gracias a (82) y también por  $d\pi(E_\alpha)$  ya que  $V_{\lambda+\alpha} = \{0\}$ . En virtud de (80),  $V'$  es un subespacio invariante por  $\pi$  y al ser  $d\pi$  irreducible,  $V'$  es todo el espacio y por (77) esto implica que en  $V'$  están todos los  $V_\mu$  de los pesos. La unicidad e incluso  $\dim V_\mu = 1$  son subproductos de esta prueba porque en otro caso podríamos encontrar subespacios propios de  $V'$  invariantes.

Sin entrar en detalles, la prueba de que el peso más alto de una representación irreducible la determina, se basa en la idea de que tomando un vector  $\vec{v}$  que genere  $V_\lambda$ , un conjunto de vectores que genera  $V$  está determinado, como antes, por las sucesivas aplicaciones de  $d\pi(E_{-\alpha})$  sobre  $\vec{v}$ . Al considerar otra representación, esencialmente solo se cambian de nombre a estos vectores conservando su estructura. Para la verdadera demostración, véase por ejemplo [10, §7.2].

Para rangos 1, 2 o 3, los diagramas nos brindan ayuda visual para identificar las cámaras de Weyl y con ello las posibilidades para los pesos más altos. Aunque la generalización a rangos superiores parezca difícil, no lo es tanto para los grupos clásicos [16, VIII.9]. Veamos aquí el caso  $SO(2n)$  con  $n > 1$  en el que ya habíamos calculado raíces y pesos en (95).

Tenemos que “decretar” primero cuáles son las raíces positivas y negativas. Digamos que las positivas son las que, prescindiendo del factor  $i$ , dan valores positivos al ser aplicadas sobre  $ne_1 + (n-1)e_2 + \dots + 2e_{n-1} + e_n$  (esto es natural teniendo el caso de  $U(N)$  en mente [19] y en cualquier caso otras elecciones valdrían), con lo que resulta

$$(99) \quad R^+ = \{i(e_j^* + e_k^*) : 1 \leq j < k \leq n\} \cup \{i(e_j^* - e_k^*) : 1 \leq j < k \leq n\}.$$

La cámara de Weyl como región del espacio es  $x_j + x_k \geq 0$ ,  $x_j - x_k \geq 0$  para todo  $j < k$  pero hay mucha redundancia en estas condiciones. Equivalen al siguiente subconjunto de desigualdades:

$$(100) \quad x_1 - x_2 \geq 0, \quad x_2 - x_3 \geq 0, \quad \dots, \quad x_{n-1} - x_n \geq 0 \quad \text{y} \quad x_{n-1} + x_n \geq 0.$$

Para comprobarlo basta emplear las siguiente identidades

$$(101) \quad x_j - x_k = \sum_{l=j}^{k-1} (x_l - x_{l+1}) \quad \text{y} \quad x_j + x_k = x_{n-1} + x_n + \sum_{l=j}^{n-2} (x_l - x_{l+1}) + \sum_{l=k}^{n-1} (x_l - x_{l+1}).$$

Las dos últimas desigualdades de (100) indican  $x_{n-1} \geq |x_n|$ . En definitiva, el conjunto de pesos más altos para representaciones irreducibles de  $\mathrm{SO}(2n)$  es, de acuerdo con el análisis anterior y (95),

$$(102) \quad \mathcal{H} = \left\{ i \sum_{j=1}^n b_j e_j^* : b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1} \geq |b_n|, b_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por ejemplo, en  $\mathrm{SO}(4)$  se puede indicar un peso más alto mediante un par de la forma  $(n, m)$  o  $(n, -m)$  con  $n$  y  $m$  enteros no negativos.

Uno podría ser más ambicioso y preguntarse si, en los grupos clásicos, hay una manera de construir, al menos teóricamente, representaciones irreducibles a partir de un peso más alto. En este sentido hay construcciones basadas en tensores que esencialmente incorporan como operaciones básicas tomar productos tensoriales, simetrizar, antisimetrizar y contraer. En [6] hay algunas ideas en este sentido y más concretas en [16, IX]. Por ejemplo, el espacio de polinomios homogéneos sobre el que hacíamos actuar las representaciones  $\pi_n$  de  $\mathrm{SU}(2)$  en (37) puede entenderse como el espacio de tensores en  $\mathbb{C}^2$  simétricos y  $n$  veces covariantes mediante la aplicación  $T \mapsto \sum T_{i_1 \dots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$  con  $i_j \in \{1, 2\}$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ .

## 11. La fórmula de los caracteres de Weyl

Dada una representación irreducible  $\pi$  potencialmente podemos calcular su peso más alto que será un elemento de  $\mathcal{H}$  en (98) y además ese elemento determina la representación pero falta probar que cualquier elemento de  $\mathcal{H}$  proviene en realidad de una representación irreducible, es decir, que la  $\mathcal{F}$  de (98) es biyectiva. Weyl obtuvo una fórmula explícita para  $\chi_\pi|_T$ , donde  $\chi_\pi$  es el carácter de la representación irreducible  $\pi$ , de lo cual se deriva esta conclusión. En principio esto suena ilógico porque lo que necesitamos es encontrar una representación con cierto peso más alto, no hallar caracteres de las que conocemos. La clave estará en el teorema de Peter-Weyl y en un ingrediente auxiliar que entra en juego. Otra consecuencia de la fórmula de Weyl es una expresión sencilla para la dimensión de una representación irreducible en términos del peso más alto y las raíces.

Antes de nada, introduzcamos los elementos que aparecen en la fórmula. El *denominador de Weyl* es la función  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$(103) \quad \Delta_{R^+}(H) = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha(H)/2} - e^{-\alpha(H)/2}).$$

El grupo de Weyl  $W(G)$  actúa sobre los pesos y raíces como simetrías sucesivas. Es conveniente asignar a cada  $w \in W(G)$  un signo  $\mathrm{sgn}(w) \in \{-1, 1\}$  dependiendo de si el movimiento es directo

o inverso, esto es, si el número de simetrías es par o impar. Por último es conveniente definir también  $\rho$  como la semisuma de las raíces positivas

$$(104) \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha.$$

Como muestra  $\text{SO}(3)$ ,  $\rho$  no es necesariamente un peso [22, §2.5].

La *fórmula de los caracteres de Weyl* afirma que si  $\pi$  es una representación irreducible con peso más alto  $\lambda$ , entonces el carácter  $\chi_\pi$  de  $\pi$  satisface

$$(105) \quad \chi_\pi(\exp(H)) = \frac{1}{\Delta_{R^+}(H)} \sum_{w \in W(G)} \text{sgn}(w) e^{w(\lambda + \rho)(H)} \quad \text{para } H \in \mathfrak{t}.$$

Realmente esta expresión falla en algunos puntos como  $H = 0$  porque  $\Delta_{R^+}(H) = 0$  pero en ellos se puede definir por continuidad (en rigor habría que escribir “para  $H \in \mathfrak{t}$  regular” [14, §7.2]), como veremos en la fórmula para la dimensión. A pesar de que (105) evalúa  $\chi_\pi$  solo en el toro maximal, ya sabemos que este contiene elementos de todas las clases de conjugación y por tanto  $\chi_\pi$  queda determinado en todo el grupo. La notación  $w(\lambda + \rho)$  de refiere a la actuación antes indicadas de  $W(G)$  sobre pesos y raíces, el resultado es una forma lineal en  $i\mathfrak{t}^*$ .

La prueba de (105) está basada en otra fórmula de Weyl más básica que tiene interés propio y da relevancia a (103). Al igual que por ejemplo integrar una función radial en  $\mathbb{R}^3$  es lo mismo que integrarla en  $\mathbb{R}^+$  pero cambiando la medida de  $dx$  a  $4\pi r^2 dr$ , la *fórmula de integración de Weyl* expresa la integral de una función de clase (constante en cada clase de conjugación) en un grupo de Lie como la integral en el toro maximal con otra medida, concretamente

$$(106) \quad \int_G f(g) d\mu_G = \frac{1}{|W(G)|} \int_T f(g) |\Delta_{R^+}(H_g)|^2 d\mu_T$$

donde  $\mu_G$  y  $\mu_T$  son las medidas de Haar en  $G$  y  $T$  (normalizadas para que integren uno) y  $\exp(H_g) = g$ . Véase [14, §7.3.1] para comprobar que diferentes elecciones de  $H_g$  no afectan al resultado y [16, IX.3] para una prueba de (106) que muestra que es esencialmente la fórmula del cambio de variable con  $|\Delta_{R^+}(H_g)|^2$  el jacobiano.

Las líneas en la demostración de (105) son las siguientes: Sabemos que  $\chi_\pi(\exp(H))$  es de la forma  $\sum n_j e^{\lambda_j(H)}$  con  $n_j$  enteros positivos, de hecho esta es la motivación del concepto de peso, como se mencionó antes de (76). Al operar  $\chi_\pi(\exp(H)) \Delta_{R^+}(H)$  se obtiene una suma de exponenciales de la forma  $e^{(\mu + \rho)(H)}$  con coeficientes enteros. Por la antisimetría de  $\Delta_{R^+}$  frente al grupo de Weyl,  $\chi_\pi(\exp(H)) \Delta_{R^+}(H)$  debe ser combinación lineal de expresiones como las del numerador en (105) cambiando  $\lambda$  por otros pesos. Algo del tipo

$$(107) \quad \chi_\pi(\exp(H)) \Delta_{R^+}(H) = \sum m_\mu N_\mu \quad \text{con } m_\mu \in \mathbb{Z}.$$

Por la extensión de (18) al caso continuo,  $\int_G |\chi_\pi|^2 d\mu_G = 1$  pero según (106) esto es lo mismo que integrar  $|\chi_\pi(g)|^2 |\Delta_{R^+}(H_g)|^2$  en  $T$  y una ortogonalidad que hay entre diferentes  $N_\mu$  (debida a sus simetrías) permite concluir  $\sum m_\mu^2 = 1$ . Es decir, la suma en (107) se reduce a  $\pm N_{\mu_0}$ . Finalmente, comprobando que en el primer miembro  $e^{(\lambda+\rho)(H)}$  aparece con coeficiente uno, se llega a que  $\mu_0 = \lambda$  y a que el signo es positivo. Los detalles de la prueba se pueden consultar en en [14, §7.3.2]. Es instructivo leer primero el caso de  $U(N)$  en [22, §2.3] que apenas requiere maquinaria (allí se hace incluso antes de introducir los pesos) e involucra los ingredientes principales.

Ahora estamos preparados para obtener en resultado fundamental de que  $\mathcal{F}$  en (98) es realmente biyectiva. Si no lo fuera, tomemos un  $\lambda \in \mathcal{H}$  que no es el peso más alto de ninguna representación irreducible y llamemos  $f(g)$  al lado derecho de (105) evaluado en  $H_g$ . Por (106), para una representación irreducible arbitraria  $\pi$  con peso más alto  $\lambda' \neq \lambda$

$$(108) \quad \int_G f(g) \overline{\chi_\pi}(g) d\mu_G = \frac{1}{|W(G)|} \int_T f(g) \Delta_{R^+}(H_g) \overline{\chi_\pi(g)} \overline{\Delta_{R^+}(H_g)} d\mu_T.$$

Por (105) y por la definición de  $f$ , el integrando es una suma de exponenciales cuyos exponentes son formas lineales del tipo  $\tau = w(\lambda + \rho) - w'(\lambda' + \rho)$  aplicadas a  $H_g$ . No es difícil ver que  $w(\rho) - w'(\rho)$  siempre es un peso analíticamente entero (78), esto es, que pertenece a  $A$  [14, §7.3.1], por tanto  $\tau \in A$  y  $e^{\tau(H_g)}$  define un carácter abeliano  $\chi(g)$  en  $T$ . Por la ortogonalidad su integral es cero excepto si  $\tau = 0$  y eso es imposible porque  $\lambda + \rho$  y  $\lambda' + \rho$  son distintos y están en la misma cámara de Weyl. La conclusión es que  $f$  es ortogonal a todos los  $\chi_\pi$  con  $\pi \in \widehat{G}$ , contradiciendo el teorema de Peter-Weyl en la forma (26).

Vamos a ilustrar con un ejemplo la fórmula de los caracteres de Weyl y a mostrar que nos da información más precisa que los diagramas de puntos que habíamos utilizado.

En  $SU(3)$  habíamos visto en (90) que  $A$  era un retículo generado por dos pesos  $w_1$  y  $w_2$ . También sabíamos que las tres primeras raíces en la tabla (88) eran las raíces positivas  $\{r_1, r_2, r_3\}$  para nuestra elección de la cámara de Weyl. Las coordenadas de estos objetos en la base  $\{H_1^*, H_2^*\}$  son

$$(109) \quad w_1 = i \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}, \quad w_2 = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad r_1 = i \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_3 = i \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad r_2 = r_1 + r_3.$$

De aquí se tiene

$$(110) \quad r_1 = 2w_1 - w_2, \quad r_2 = w_1 + w_2 \quad \text{y} \quad r_3 = -w_1 + 2w_2.$$

El denominador en la fórmula de Weyl es

$$(111) \quad \Delta_{R^+} = (e^{r_1/2} - e^{-r_1/2})(e^{r_2/2} - e^{-r_2/2})(e^{r_3/2} - e^{-r_3/2}).$$

Para abreviar, escribamos  $x = e^{w_1}$  e  $y = e^{w_2}$ . Operando este producto y sustituyendo (110), se obtiene

$$(112) \quad \Delta_{R^+} = xy - x^{-1}y^{-1} - x^2y^{-1} + x^{-2}y - x^{-1}y^2 + xy^{-2}.$$

Sean  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  las simetrías por las rectas perpendiculares a las respectivas raíces. Estas simetrías generan el grupo de Weyl y actúan sobre las raíces. Por ejemplo,  $s_1(r_1) = -r_1$  y  $s_1(r_3) = r_2 = r_1 + r_3$ . Según (59), el grupo es isomorfo a  $S_3$ , correspondiendo los 3-ciclos por ejemplo a  $s_1s_2$  y  $s_1s_3$ . la acción de los seis elementos del grupo sobre las raíces  $r_1$  y  $r_3$  en términos de ellas mismas es:

$$(113) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & I & s_1s_2 & s_1s_3 & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline r_1 & r_1 & -r_1 - r_3 & r_3 & -r_1 & -r_3 & r_1 + r_3 \\ \hline r_3 & r_3 & r_1 & -r_1 - r_3 & r_1 + r_3 & -r_1 & -r_3 \end{array}$$

Consideremos ahora el tercer esquema en (96). El peso más alto es  $\lambda = 2w_1 + w_2$ , como se deduce del aspecto de  $w_1$  y  $w_2$  en la segunda figura de (91). Tras (109), esto es igual a  $(5r_1 + 4r_3)/3$  y

$$(114) \quad \lambda + \rho = \frac{5r_1 + 4r_3}{3} + \frac{r_1 + r_2 + r_3}{2} = \frac{8}{3}r_1 + \frac{7}{3}r_3.$$

Con la tabla (113) y (110) obtenemos la acción del grupo de Weyl sobre  $\lambda + \rho$  en términos de  $w_1$  y  $w_2$ :

$$(115) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & I & s_1s_2 & s_1s_3 & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline \lambda + \rho & 3w_1 + 2w_2 & 2w_1 - 5w_2 & -5w_1 + 3w_2 & -3w_1 + 5w_2 & -2w_1 - 3w_2 & 5w_1 - 2w_2 \end{array}$$

Con ello el numerador de la fórmula de Weyl es

$$(116) \quad x^3y^2 + x^2y^{-5} + x^{-5}y^3 - x^{-3}y^5 - x^{-2}y^{-3} - x^5y^{-2}.$$

Los términos con signo negativo corresponden a  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$ . Esta expresión debe ser divisible por (112), en otro caso la fórmula de Weyl no tendría sentido. El resultado de la división es

$$(117) \quad x^2y + x^{-1}y^{-2} + x^3y^{-1} + xy^{-3} + y^2 + x^{-2} + x^{-2}y^3 + x^{-3}y^2 + x^2y^{-2} + 2x + 2y^{-1} + 2x^{-1}y.$$

Como un carácter se define como la traza de la representación a la que está asociado, al aplicarlo al elemento neutro da la dimensión (por eso los coeficientes en la fórmula anterior son enteros positivos). Recordando  $x = e^{w_1}$ ,  $y = e^{w_2}$ , vemos que la dimensión de la representación  $\pi$  que corresponde a la tercera figura en (96) es igual a evaluar (117) en  $x = y = 1$ , de este modo se deduce  $d_\pi = 15$ . En (117) hay información más fina: los tres últimos términos corresponden al triángulo invertido central y por tanto para ellos  $\dim V_\mu = 2$  mientras que para el resto

$\dim V_\mu = 1$ . Al ser  $SU(3)$  un grupo importante en física de partículas, el fenómeno está muy estudiado y lo que ocurre en general es que en el borde del diagrama de puntos que corresponde a una representación irreducible de  $SU(3)$ , las dimensiones son 1 y aumentan de unidad en unidad según nos movemos hacia el interior por hexágonos paralelos hasta que degeneran en triángulos y la dimensión se estabiliza [8, §10.11].

Si hubiéramos tratado de abreviar el cálculo de la dimensión en el ejemplo anterior sustituyendo  $x = y = 1$  en (116) y (112) para dividir números en lugar de polinomios, nos encontraríamos con una indeterminación  $0/0$ . Esto no es una mala casualidad en  $SU(3)$ , la fórmula para  $\Delta_{R^+}$  muestra que siempre se anula con orden alto en el origen. Sorprendentemente, aproximando por infinitésimos (una suerte de regla de L'Hôpital), es posible obtener una fórmula sencilla y totalmente general. Para enunciarla es conveniente definir el producto escalar en  $i\mathfrak{t}^*$  de la manera obvia olvidándonos de la  $i$ : Dada una forma  $f \in i\mathfrak{t}^*$  se escribe como  $f = i \sum f_j H_j^*$ ,  $f_j \in \mathbb{R}$  donde  $\{H_1^*, \dots, H_r^*\}$  es la base dual de una base ortonormal fijada de  $\mathfrak{t}$ . Llamemos  $H_f$  a  $\sum f_j H_j$ , que realiza el isomorfismo  $i\mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{t}$ , entonces se define el producto escalar de  $f, g \in i\mathfrak{t}^*$  como el producto escalar de  $H_f, H_g \in \mathfrak{t}$ , esto es,

$$(118) \quad \langle f, g \rangle = \langle H_f, H_g \rangle = \sum f_j g_j \quad \text{cuando} \quad f = i \sum f_j H_j^* \quad \text{y} \quad g = i \sum g_j H_j^*.$$

Con esta notación, si  $\lambda$  es el peso más alto de una representación irreducible  $\pi$ , la fórmula para la dimensión afirma

$$(119) \quad d_\pi = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\langle \rho, \alpha \rangle}.$$

Tomemos la representación  $\pi$  de  $SU(3)$  del ejemplo anterior. Tenía peso más alto  $\lambda = 2w_1 + w_3$  y con (109) se sigue que  $\lambda + \rho$  tiene coordenadas  $(i\sqrt{3}/2, 7i/6)$  en la base  $\{H_1^*, H_2^*\}$ . Sustituyendo en (119),

$$(120) \quad d_\pi = \frac{1/2 \cdot 5/6 \cdot 1/3}{1/6 \cdot 1/3 \cdot 1/6} = 15,$$

lo que constituye un notable ahorro de trabajo respecto al cálculo hecho antes.

Para demostrar (119) usaremos la identidad  $w(\lambda + \rho)(H_\rho) = w^{-1}(\rho)(H_{\lambda + \rho})$  que es el análogo de  $\vec{x} \cdot (M\vec{y}) = (M^{-1}\vec{x}) \cdot \vec{y}$  en  $\mathbb{R}^n$  cuando  $M$  es un movimiento [14, §7.3.4]. Por esta identidad y la fórmula de los caracteres (105),

$$(121) \quad d_\pi = \chi_\pi(\exp(0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \chi_\pi(\exp(tH_\rho)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_{R^+}(tH_\rho)} \sum_{w \in W(G)} \text{sgn}(w) e^{tw^{-1}(\rho)(H_{\lambda + \rho})}.$$



Podemos cambiar  $w^{-1}$  por  $w$  ya que  $\text{sgn}(w^{-1}) = \text{sgn}(w)$ . La representación trivial que aplica cada  $g \in G$  en la matriz identidad  $1 \times 1$  tiene peso más alto nulo, sustituyendo  $\lambda = 0$  en (105), se obtiene una igualdad que permite reescribir la expresión anterior como

$$(122) \quad d_\pi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta_{R^+}(tH_{\lambda+\rho})}{\Delta_{R^+}(tH_\rho)} = \lim_{t \rightarrow 0} \prod_{\alpha \in R^+} \frac{e^{t\alpha(H_{\lambda+\rho})} - e^{-t\alpha(H_{\lambda+\rho})}}{e^{t\alpha(H_\rho)} - e^{-t\alpha(H_\rho)}} = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\alpha(H_{\lambda+\rho})}{\alpha(H_\rho)},$$

donde en el último paso se ha usado  $\sinh(at)/\sinh(bt) \rightarrow a/b$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Recordando la definición de  $H_f$ , este último producto es justamente el que aparece en (119).

## 12. El laplaciano y sus autovalores

En geometría de variedades, los vectores se consideran como *derivaciones* [3] y así el espacio tangente en cada punto está formado por una colección de operadores diferenciales lineales que actúa sobre (gérmenes de) funciones. El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de un grupo de Lie  $G$  la habíamos definido inicialmente como  $T_I(G)$ . En este contexto, para cada  $X \in \mathfrak{g}$  el operador diferencial asociado es [7]

$$(123) \quad X(f)(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(g \exp(tX))$$

donde  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g \in G$ , lo cual es un análogo de (63). Dentro de  $\mathfrak{g}$ , operaciones como  $XY$  para  $X, Y \in \mathfrak{g}$  carecen de sentido pero sí lo tienen como el operador diferencial  $f \mapsto X(Y(f))$ . Con todos los posibles operadores diferenciales se construye un álgebra llamada el *álgebra envolvente universal*, un artificio para dar sentido a los productos que no se pueden hacer en  $\mathfrak{g}$  pero nosotros aquí solo estamos interesados en un caso muy particular. Dada una base ortonormal  $\{X_1, \dots, X_n\}$  con un producto escalar que cumpla (68), se define el *operador de Laplace-Beltrami*

$$(124) \quad \Delta = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

donde  $X_j^2$  aplicado a  $f$  significa  $X_j(X_j(f))$ . No es difícil ver que  $\Delta$  es independiente de la base ortonormal elegida<sup>7</sup>. Con una definición algo más complicada [13, §42], incluso se puede evitar la referencia a una base ortonormal.

Vamos a ilustrar la situación calculando con (124) el operador de Laplace-Beltrami en  $SU(2)$ . Tomamos la base  $\{X_1, X_2, X_3\}$  que resulta de dividir las matrices de (53) por  $\sqrt{2}$  que es ortonormal con el producto escalar  $\langle X, Y \rangle = -4\text{Tr}(XY)$  que deriva de la forma de Killing. Los elementos  $g \in SU(2)$  se parametrizan a través de (42) como  $g = g(\theta_1, \theta_2, \varphi) = U_{\theta_1\theta_2\varphi}$ . Con

<sup>7</sup>Un comentario al margen es que  $\sum x_j X_j \rightarrow \exp(\sum x_j X_j)$  corresponde a una parametrización de  $G$  en coordenadas normales basadas en  $I$  y en esas coordenadas (75) se reduce a  $\sum \partial_j^2 f$  en el origen, lo que concuerda con (124). La invariancia permite pasar de unos puntos a otros.

esta elección de coordenadas, una función  $f : \text{SU}(2) \rightarrow \mathbb{C}$  se puede indicar con una función de tres variables reales  $F(\theta_1, \theta_2, \varphi) = f(g(\theta_1, \theta_2, \varphi))$ . Veamos la acción sobre  $F$  inducida por la de  $X_1$  sobre  $f$ . De acuerdo con (123), debemos calcular la derivada en  $t = 0$  de

$$(125) \quad f(g(\theta_1, \theta_2, \varphi) \exp(tX_1)) = f\left(\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \cos \varphi & e^{i\theta_2} \sin \varphi \\ -e^{-i\theta_2} \sin \varphi & e^{-i\theta_1} \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ict} & 0 \\ 0 & e^{-ict} \end{pmatrix}\right) = f(g(\theta_1 + ct, \theta_2 - ct, \varphi))$$

donde se ha abreviado  $c = 1/\sqrt{8}$ . La última expresión es  $F(\theta_1 + ct, \theta_2 - ct, \varphi)$  y por la regla de la cadena, el efecto de derivar en  $t = 0$  es el mismo que el de aplicar a  $F$  el operador diferencial

$$(126) \quad \mathcal{X}_1 = c \frac{\partial}{\partial \theta_1} - c \frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad \text{que cumple} \quad 8\mathcal{X}_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}.$$

De la misma manera, con mucha paciencia uno puede deducir que el operador  $\mathcal{X}_2$  que corresponde a  $X_2$  cumple

$$(127) \quad 8\mathcal{X}_2^2 = s_1^2 t^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + s_1^2 t^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} + (1 - s_1^2) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} + 2s_1^2 \cot(2\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathcal{Z}$$

donde se han utilizado las abreviaturas  $s_1 = \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$ ,  $s_2 = \text{sen}(2\theta_1 - 2\theta_2)$ ,  $t = \tan \varphi$  y

$$(128) \quad \mathcal{Z} = s_2 t \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \varphi} + s_2 t^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \partial \varphi} + s_2 t^2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - s_2 t^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta_2}.$$

Se observa que la acción de  $X_3$  es la misma que la de  $X_2$  cambiando  $\theta_1 \mapsto \theta_1 + \pi/2$  [17], por ello todos los términos de  $\mathcal{Z}$  se cancelan al calcular  $\mathcal{X}_2^2 + \mathcal{X}_3^2$  y resulta

$$(129) \quad 8(\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2 + \mathcal{X}_3^2) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} + \frac{2 \cos(2\varphi)}{\sin(2\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

lo que prueba la fórmula (43).

En (32) probamos que los elementos de las matrices de las representaciones irreducibles  $\pi \in \widehat{G}$  son las autofunciones del operador de Laplace-Beltrami bajo la única hipótesis de la invariancia (27) por la acción del grupo, por ello en primer lugar hay que verificar tal invariancia con la definición (124). Recordemos que en (27) el operador  $R(g)$  actuaba sobre funciones como  $R(g)f(x) = f(xg)$ . De la igualdad  $\exp(tX) = g \exp(tg^{-1}Xg)g^{-1}$  se sigue

$$(130) \quad R(g)(X(f))(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x \exp(tX)g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(xg \exp(tg^{-1}Xg)) = (g^{-1}Xg)(R(g)(f))(x).$$

Por tanto  $R(g)\Delta f = \sum (g^{-1}X_j g)^2 (R(g)(f))$  pero, por (68),  $g^{-1}X_j g$  es también una base ortonormal y se concluye que (124) verifica (27).

Los elementos  $\pi_{ij}(x)$  de la matriz de una representación  $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$  tienen sentido solo una vez que hemos fijado una base de  $V$ . Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  es un producto escalar en  $V$  tal que los elementos  $\vec{e}_j$  de dicha base son ortonormales, entonces  $\pi_{ij}(x) = \langle \vec{e}_i, \pi(g)\vec{e}_j \rangle_V$  y al aplicar (123), se tiene

$$(131) \quad X(\pi_{ij}(g)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \vec{e}_i, \pi(g)\pi(\exp(tX))\vec{e}_j \rangle_V = \langle \vec{e}_i, \pi(g)d\pi(X)\vec{e}_j \rangle_V.$$

Repetiendo la aplicación de  $X$ ,

$$(132) \quad \Delta\pi_{ij}(g) = \langle \vec{e}_i, \pi(g)C_\pi\vec{e}_j \rangle_V \quad \text{con} \quad C_\pi = \sum_k d\pi(X_k)d\pi(X_k).$$

Este operador  $C_\pi$  define un endomorfismo de  $V$  y se denomina *operador de Casimir* (cuadrático) asociado a la representación  $\pi$ . La fórmula (132) es notable porque establece una relación entre el operador diferencial  $\Delta$ , algo que en coordenadas adquiere una expresión tan complicada como (75), y una aplicación lineal en un espacio vectorial de dimensión finita. A continuación veremos que cuando  $\pi \in \widehat{G}$  tal aplicación es extremadamente sencilla.

Como los  $X_j$  forman una base ortonormal de  $\mathfrak{g}$ , para  $X \in \mathfrak{g}$  arbitrario se tiene

$$(133) \quad [X_j, X] = \sum_k \langle X_k, [X_j, X] \rangle X_k \quad \text{y} \quad [X_k, X] = \sum_j \langle [X, X_k], X_j \rangle X_j.$$

Usando (69) se deduce que los productos escalares dentro de ambos sumatorios coinciden. Para abreviar, escribamos  $M_l = d\pi(X_l)$  y  $M = d\pi(X)$ . La siguiente identidad es trivial con  $M_l$  y  $M$  cualesquiera:

$$(134) \quad C_\pi M = M C_\pi + \sum_j M_j [M_j, M] - \sum_k [M, M_k] M_k.$$

Recordando  $d\pi[X, Y] = [d\pi(X), d\pi(Y)]$ , por ser representación de  $\mathfrak{g}$ , la igualdad de los coeficientes en (133) implica que los sumatorios se cancelan y por tanto  $C_\pi$  conmuta con  $d\pi(X)$  para todo  $X$ . Si  $\pi$  es irreducible, una forma del lema de Schur concluye que  $C_\pi$  es un múltiplo del operador identidad en  $V$ . Comparando (132) y (32) se obtiene que los autovalores de  $-\Delta$  son exactamente

$$(135) \quad \{\lambda_\pi : -C_\pi v = \lambda_\pi v \text{ para todo } v \in V \text{ con } \pi \in \widehat{G}\}.$$

Para evaluar  $C_\pi v$  normalmente se emplean algunas propiedades métricas de los generadores  $E_\alpha$  de los espacios  $\mathfrak{g}_\alpha$  en (80). Como estos elementos están fuera de  $\mathfrak{g}$ , lo habitual es introducir una extensión a  $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$  del producto escalar [16, VIII.5]. En lugar de ello aquí vamos a hacer un razonamiento más elemental y directo para nuestros propósitos. Fijemos una base

ortonormal  $\{H_1, \dots, H_r\}$  de  $\mathfrak{t}$ . Para cada  $H_j$  el operador  $\text{ad}(H_j)$  es antiautoadjunto por (69) y, como ya hemos notado, es esta antisimetría la que causa que sus autovectores se salgan fuera del álgebra real  $\mathfrak{t}$ . Por álgebra lineal básica (las matrices antisimétricas tienen pares de autovectores conjugados) se puede escribir

$$(136) \quad E_{\pm\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\alpha \pm iY_\alpha) \quad \text{con } X_\alpha, Y_\alpha \in \mathfrak{t} \quad \text{y} \quad \langle X_\alpha, X_\alpha \rangle = 1.$$

De  $[H_j, E_{\pm\alpha}] = \pm\alpha(H_j)E_{\pm\alpha}$ , donde  $\alpha = i \sum \alpha_j H_j^*$ , se deduce

$$(137) \quad [H_j, X_\alpha] = -\alpha_j Y_\alpha \quad \text{y} \quad [H_j, Y_\alpha] = \alpha_j X_\alpha.$$

Estas relaciones solo involucran elementos de  $\mathfrak{t}$ . Por (69) se tiene

$$(138) \quad -\alpha_j \langle Y_\alpha, Y_\alpha \rangle = \langle [H_j, X_\alpha], Y_\alpha \rangle = -\langle X_\alpha, [H_j, Y_\alpha] \rangle = -\alpha_j \langle X_\alpha, X_\alpha \rangle,$$

por tanto  $\langle Y_\alpha, Y_\alpha \rangle = 1$ , ya que  $\alpha_j$  para algún  $j$ . Un cálculo similar prueba  $-\alpha_j \langle Y_\alpha, X_\alpha \rangle = 0$  y por tanto  $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$  es ortonormal y una base de  $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Además para diferentes raíces las bases serán ortogonales entre sí y a las  $H_j$  (de nuevo por álgebra lineal: corresponden a autovalores distintos). Por tanto

$$(139) \quad C_\pi = \sum_j d\pi(H_j)d\pi(H_j) + \sum_{\alpha \in R^+} (d\pi(X_\alpha)d\pi(X_\alpha) + d\pi(Y_\alpha)d\pi(Y_\alpha)).$$

Usando la definición de  $X_\alpha$  e  $Y_\alpha$  en (136) se comprueba que el término entre paréntesis es  $d\pi(E_\alpha)d\pi(E_{-\alpha}) + d\pi(E_{-\alpha})d\pi(E_\alpha)$ . Tras esta sustitución aplicamos  $C_\pi$  a un vector  $v \in V_\mu$  con  $\mu = i \sum \mu_j H_j^*$  el peso más alto de  $\pi$ . Por definición,  $v$  está en el núcleo de  $d\pi(E_\alpha)$  y entonces

$$(140) \quad C_\pi v = - \sum_j \mu_j^2 v + \sum_{\alpha \in R^+} d\pi(E_\alpha)d\pi(E_{-\alpha})v = - \sum_j \mu_j^2 v + \sum_{\alpha \in R^+} d\pi([E_\alpha, E_{-\alpha}])v.$$

Sabemos que  $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}$ , esto es consecuencia de (82) por la representación del álgebra  $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$  en sí misma por  $\text{ad}(E_\alpha)$ . Un cálculo con (136) muestra  $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -i[X_\alpha, Y_\alpha]$ , así que  $[X_\alpha, Y_\alpha] \in \mathfrak{t}$ . Además, de nuevo por (69) y (137)

$$(141) \quad \langle [X_\alpha, Y_\alpha], H_j \rangle = -\langle Y_\alpha, [X_\alpha, H_j] \rangle = -\alpha_j \langle Y_\alpha, Y_\alpha \rangle = -\alpha_j.$$

Así pues  $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = i \sum \alpha_j H_j$  y sustituyendo en (140) se obtiene

$$(142) \quad C_\pi v = - \sum_j \mu_j^2 v - \sum_{\alpha \in R^+} \sum_j \alpha_j \mu_j v.$$

Con el producto escalar en  $i\mathfrak{t}^*$  definido por (118), volviendo a (135) se concluye que los autovalores del operador  $-\Delta$  son

$$(143) \quad \lambda = \langle \mu, \mu \rangle + 2\langle \rho, \mu \rangle$$

donde  $\mu$  recorre los pesos analíticamente enteros en una cámara de Weyl, esto es  $\mu \in \mathcal{H}$  en (98) y  $\rho$  es (104).

Como ejemplo vamos a escribir la fórmula que da la función contadora de autovalores  $\mathcal{N}$  que aparece en la ley de Weyl para  $\text{SO}(2n)$ ,  $n > 1$ . Recordemos que las raíces positivas venían dadas por (99), por tanto

$$(144) \quad \rho = \frac{i}{2} \sum_{j < k} (e_j^* + e_k^*) + \frac{i}{2} \sum_{j < k} (e_j^* - e_k^*) = i \sum_{j=1}^n (n-j) e_j^*.$$

La base  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  es la dual de la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathfrak{t}$  con  $e_k$  la matriz con elementos nulos excepto por el  $k$ -ésimo bloque diagonal  $2 \times 2$  que es  $J$  como en (93). Esta base es proporcional a una ortonormal pero no es exactamente ortonormal, usando (71). Para que lo sea, escogemos  $\langle X, Y \rangle = -K(X, Y)/(4n-4)$ , así que con el producto escalar que deriva exactamente de la forma de Killing el operador de Laplace-Beltrami y los autovalores estarían divididos por  $4n-4$ . Por supuesto estos cambios de escala no afectan a (119).

Para  $\mu = i \sum b_j e_j^*$ , la fórmula (143) da

$$(145) \quad \lambda = \sum_{j=1}^n b_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n (n-j) b_j = \sum_{j=1}^n (b_j + n-j)^2 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Los  $b_j$  que corresponden a representaciones irreducibles están sujetos a las restricciones impuestas en (102), por tanto definimos

$$(146) \quad \mathcal{B}_\lambda = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{Z}^n : b_1 \geq \dots \geq b_{n-1} \geq |b_n|, \sum_{j=1}^n (b_j + n-j)^2 \leq \lambda + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right\}.$$

Por (33) y (119)

$$(147) \quad \mathcal{N}(\lambda) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}_\lambda} \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\langle \mu + \rho, \alpha \rangle^2}{\langle \rho, \alpha \rangle^2}.$$

En el producto aparecen los dos tipos de raíces de (99), lo que sugiere agrupar los términos por parejas:

$$(148) \quad \frac{\langle \mu + \rho, i(e_j^* + e_k^*) \rangle^2 \langle \mu + \rho, i(e_j^* - e_k^*) \rangle^2}{\langle \rho, i(e_j^* + e_k^*) \rangle^2 \langle \rho, i(e_j^* - e_k^*) \rangle^2} = \frac{((b_j + n-j)^2 - (b_k + n-k)^2)^2}{((n-j)^2 - (n-k)^2)^2}.$$

En definitiva,

$$(149) \quad \mathcal{N}(\lambda) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}_\lambda} \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{k=j+1}^{n-1} \frac{((b_{n-j} + j)^2 - (b_{n-k} + k)^2)^2}{(j^2 - k^2)^2}.$$

donde se ha hecho el cambio  $j \mapsto n-j$  y  $k \mapsto n-k$ .

### 13. Guía de lectura (opiniones)

Los textos de matemáticas alrededor de grupos de Lie y sus representaciones que he hojeado (que son bastantes) me han parecido en general muy herméticos, sobre todo por la falta de motivación, ejemplos y de referencias históricas. Aunque es una opinión, no creo que abunden los matemáticos que piensen que es natural levantarse un día y ponerse a estudiar un tipo de álgebras no asociativas por el placer de hacerlo. Esto es más llamativo todavía si pensamos que la teoría surgió ligada a otros temas, especialmente las ecuaciones diferenciales y la geometría. Los textos de física de partículas “aplican” estas cosas pero de una forma que no me resulta tampoco muy ilustrativa. Por un lado se centran en unos pocos grupos y después parece que la filosofía es haz representaciones porque lo ha dicho Wigner o Gell-Mann sin quedar muy clara ni la teoría ni los motivos subyacentes.

Una vez que me he quejado, mencionaré algunos libros con los que he aprendido algo por si son de utilidad para algún principiante que aborde el tema tan perdido como yo, al que ruego que escriba unas notas mejores que estas si logra entender un poco más (por supuesto, lo ideal sería que las escribiera un experto). Me abstengo de juzgar libros en los que solo he pasado páginas pero aviso que en algunos de los que menciono, mi lectura en profundidad se ha restringido a una parte muy concreta, con lo cual mis opiniones no son una crítica autorizada y deben tomarse con precaución.

Dos libros, un poco al margen del tema principal de estas notas, que me parecen una maravilla de exposición son [18] y [21]. El primero se ocupa de la parte más básica de los grupos de Lie, casi rudimentaria, y uno se queda con ganas de mucho más. El segundo, como el nombre indica, se ocupa solo de la parte analítica y en grupos finitos, es tremendamente bueno en lo que hace pero no toca los grupos de Lie. Lo menciono sobre todo para el que desee aprender lo más básico de representaciones en relación con el análisis de Fourier finito. También [9] es ameno y muy diferente de los textos al uso. Una precisión: me extrañaría que los “ingenieros y químicos” que se mencionan en el subtítulo le saquen mucho provecho, más bien me parece dirigido sobre todo a físicos y algo menos a matemáticos no rigoristas. Incluso a los que encajamos en esta última categoría, nos deja a veces una sensación ambigua con afirmaciones que no se sabe si son teoremas o un comportamiento habitual.

De los libros específicos de grupos de Lie destinados a un público matemático, al que le he sacado más provecho es a [14]. Su nivel es asequible, tanto en la teoría como en los ejercicios, y las explicaciones son claras. Es el que me parece más recomendable para partir de cero. Una vez más, a mi juicio, debería motivar el tema. Concentrarse en grupos de Lie compactos en un libro introductorio, me parece un acierto porque ya el tema es bastante extenso. Uno de los textos que parece tener más acogida entre los que comenzamos a estudiar grupos de Lie es [10]. Es mucho más claro que la mayoría de los libros introductorios que he visto, tiene explicaciones más básicas y además hace ejemplos aunque prefiero [14]. Hay incluso una breve sección titulada “¿Por qué estudiar representaciones?” pero no es muy informativa. He manejado también [16] que esencialmente dedica la mitad de su extensión a grupos finitos y la

otra a grupos compactos. Es el libro que más he utilizado después de [14]. Es concreto y muchas veces da ideas pero en mi opinión es más difícil de seguir que los textos antes mencionados. Se agradece mucho que al principio de cada sección indique cuál es el plan y el objetivo, aunque solo sea por ello, conviene tenerlo a mano. Los resultados finales se establecen solo para grupos simples y no he llegado a entender dónde aparece tal restricción.

Un libro a mi juicio duro que miro con respeto es [6]. A pesar del título, indudablemente equívoco, en su mayor parte está dedicado a grupos y álgebras de Lie. El sesgo es eminentemente algebraico y con pocas concesiones a la motivación pero da la impresión de que con tiempo y esfuerzo se puede entender y se agradecen secciones como la §14.1, útiles para “cualquier matemático encallado en una isla desierta”, según se dice al final, o un capítulo sobre  $\mathfrak{sl}(3)$  llamado “Principalmente montones de ejemplos”. Otro libro avanzado que quiero mencionar es [22]. En realidad no me he adentrado apenas en él pero lo cito porque los dos primeros capítulos dan ideas muy ilustrativas con un mínimo de teoría y demostraciones.

Los libros específicamente para físicos los he abandonado en general después de unos vistazos por las razones aducidas al principio. Uno al que he dedicado más tiempo es [8], que empieza de manera muy alentadora pero enseguida se mete en cuestiones que me son difíciles de seguir. Seguramente con más conocimientos de física se le podría sacar más provecho. A medio camino entre la física y las matemáticas, he encontrado algunas buenas explicaciones de puntos concretos en [23] que, al parecer, se convertirá en breve en un libro. El texto [13], también se mueve a medio camino entre la física y las matemáticas. Yo diría que está más dirigido a un público matemático que tiene inquietudes físicas pero no necesariamente grandes conocimientos. Hace lo que debería ser la norma: mostrar a los grupos de Lie en acción fuera de la propia teoría.

A menudo me han resultado mucho más útiles que cualquier monografía, las notas, algunas muy breves, escritas por algunos profesores para sus alumnos. En especial, [17], [1] y [7]. Las segundas, con pocas fórmulas, marcaron el punto en que comencé a entender qué significaban los pesos y las raíces (aunque estas no se mencionan). Este tipo de exposición es lo que echo de menos en las introducciones de la bibliografía “seria” que he manejado. Entre las notas que tienen formato y extensión de libro, me han parecido muy interesantes [19]. He aprendido bastante con ellas y son muy recomendables sobre todo si uno tiene una orientación más analítica. Del mismo autor, no puedo dejar de mencionar unas pocas páginas muy ilustrativas sobre grupos de Lie en un apéndice de [20].

Fuera del tema de las notas, las representaciones desempeñan un papel importante, en parte conjetural, en teoría de números. El pináculo es lo que se llama genéricamente *programa de Langlands*. Esencialmente propone que podemos leer propiedades aritméticas relacionadas con representaciones del grupo de Galois en ciertas representaciones que generalizan a las formas modulares clásicas. Para la relación entre formas automorfas y representaciones, [2] está dentro de lo que me ha parecido más asequible, aunque no he profundizado demasiado en él. La última sección de [12] contiene una descripción en pocas palabras y, sobre todo, unas cuantas buenas

referencias para adquirir una idea general.

Un añadido final es que recientemente ha caído en mis manos [11] que está dedicado a la historia de los grupos de Lie. No he tenido tiempo de tener una opinión medianamente fundamentada y apenas he leído algunas secciones pero con este breve contacto me parece que puede ser muy iluminador para entender qué tenían en mente los creadores de la teoría.

## Referencias

- [1] J. Baez. Lie theory through examples (Lectures 1–5). <http://math.ucr.edu/home/baez/qg-fall2008/>, 2008.
- [2] D. Bump. *Automorphic forms and representations*, volume 55 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [3] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [4] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk. *Lie groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [5] P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwendner, D. Vaintrob, and E. Yudovina. *Introduction to representation theory*, volume 59 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. With historical interludes by Slava Gerovitch.
- [6] W. Fulton and J. Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [7] P. Garrett. Invariant differential operators (Lie algebras, Lie groups). <http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/lie/>, 2010.
- [8] H. Georgi. *Lie algebras in particle physics*, volume 54 of *Frontiers in Physics*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1982. From isospin to unified theories, With an introduction by Sheldon L. Glashow.
- [9] R. Gilmore. *Lie groups, physics, and geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. An introduction for physicists, engineers and chemists.
- [10] B. C. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations*, volume 222 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003. An elementary introduction.



- [11] T. Hawkins. *Emergence of the theory of Lie groups*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer-Verlag, New York, 2000. An essay in the history of mathematics 1869–1926.
- [12] D. Raboso. When the modular world becomes non-holomorphic. In *Trends in number theory*, volume 649 of *Contemp. Math.*, pages 221–244. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [13] D. H. Sattinger and O. L. Weaver. *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry, and mechanics*, volume 61 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [14] M. R. Sepanski. *Compact Lie groups*, volume 235 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007.
- [15] J.-P. Serre. *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.
- [16] B. Simon. *Representations of finite and compact groups*, volume 10 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [17] F. Spinu. Lecture notes of the course Math 423: Lie groups. <http://www.math.jhu.edu/~fspinu/423.html>, 2006.
- [18] J. Stillwell. *Naive Lie theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008.
- [19] M. Taylor. Lectures on Lie groups. AMS Open Math Notes: Works in Progress; Reference #OMN:201701.110677, 2017.
- [20] M. E. Taylor. *Partial differential equations. I*, volume 115 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. Basic theory.
- [21] A. Terras. *Fourier analysis on finite groups and applications*, volume 43 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [22] V. S. Varadarajan. *An introduction to harmonic analysis on semisimple Lie groups*, volume 16 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [23] P. Woit. Quantum theory, groups and representations: An introduction. <http://www.math.columbia.edu/~woit/>, 2017.



## Índice alfabético

- Ado, teorema de, 17
- álgebra, 15
  - envolvente universal, 41
  - reductiva, 32
- Baker-Campbell-Hausdorff, fórmula de, 22
- bosón, 2
- carácter, 5, 6
- Cartan, É. (1869–1951), 23
  - Cartan, subálgebra de, 19
- Casimir, operador de, 42
- centro, 17
- clase de conjugación, 8
- Clebsch-Gordan, coeficientes de, 4
- color, 4
- derivación, 16, 40
- Dynkin, E. (1924–2014), 22
- exponencial, aplicación, 16
- fermión, 2
- Fourier, desarrollo de, 7
- función de clase, 8
- función de ondas, 2
- Gell-Mann, M. (1929), 2
  - matrices de, 29
- grupo unimodular, 8
- grupos clásicos, 8
- Haar, medida de, 5
- hamiltoniano, 16
- Jacobi, identidad de, 17
- Killing, W. (1847–1923), 19
  - forma de, 23
- ladder operators*, 3
- Langlands, programa de, 47
- Laplace-Beltrami, operador de, 9, 41
- Lie, S. (1842–1899)
  - álgebra de, 15, 17
  - grupo de, 8
  - tercer teorema de, 17
- lowering operator*, 28
- métrica bi-invariante, 23
- peso, 10, 26
  - analíticamente entero, 26
  - más alto, 33
- Peter-Weyl, teorema de, 8
- producto tensorial, 4
- quark, 4
- raíz, 27
  - negativa, 33
  - positiva, 33
  - simple, 33
- raising operator*, 28
- rango, 19
- recubridor universal, 22
- relaciones de ortogonalidad, 5
- representación, 1
  - adjunta, 23
  - irreducible, 3
  - reducible, 3
  - unitaria, 6
- rotaciones infinitesimales, 17
- sabor, 4
- Schur, lema de, 6
- semisimple, 24
- simple, 24

suma directa, 4

toro maximal, 12, 18

Weyl, H. (1885–1955)

cámara de, 32

denominador de, 36

fórmula de integración de, 37

fórmula de los caracteres de, 36

grupo de, 20

ley de, 10

Wigner, E.P. (1902–1995), 45

teorema de, 2