Algunas ideas sobre la fórmula de traza de Selberg

Fernando Chamizo

8 de mayo de 2013

1. Introducción

Este artículo de divulgación es una versión ampliada de la charla del 10 de mayo en el ICMAT. Al igual que ella, está dirigida especialmente para los que no han tenido contacto previo con la fórmula de traza de Selberg. Se verán algunos análogos euclídeos, un poco de la geometría y el análisis del plano hiperbólico y finalmente ideas sobre el enunciado y la prueba de la fórmula de traza de Selberg. La relación con la teoría de números estará presente en todos estos puntos.

El lector que quiera profundizar un poco más sobre el tema sin prácticamente conocimientos previos, seguramente encuentre muy provechosos los artículos [4], [6] y [1, XI], bastante antiguos pero muy interesantes. Para demostraciones completas, una buena referencia es [5].

En el artículo original de A. Selberg [8] la fórmula de traza aparece como un ejemplo destacado (¡sin demostración!) de una técnica que se aplica en variedades riemannianas débilmente simétricas. En esta exposición no seguiremos este planteamiento general pero a modo de motivación introduciremos ciertos análogos en los que los personajes comunes son una variedad riemanniana homogénea y completa M con una distancia d, un subgrupo discreto de isometrías Γ y el operador de Laplace-Beltrami $-\Delta$ (un laplaciano invariante por isometrías, no hace falta saber la definición exacta).

2. Espacio euclídeo de dimensión 1

Vamos a dar una prueba complicada, o más bien pedante, de una fórmula bien conocida que admite una demostración sencilla. La justificación es que introduciremos las ideas básicas de la fórmula de traza de Selberg.

Consideramos $\mathbb{R}$ con las isometrías dadas por las las traslaciones enteras:

$$M = \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x-y|, \quad \Gamma = \{x \mapsto x+n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}, \quad -\Delta f = f''.$$

Tomemos f una función real. Aquí y en lo sucesivo no nos preocuparemos mucho por la regularidad. Con $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ se elimina cualquier problema al respecto. La expresión $f\big(d(x,y)\big)$

es invariante si se aplica la misma isometría (no necesariamente de Γ) simultáneamente en x e y. Ahora forzamos las simetrías de Γ en cada variable considerando el *núcleo automorfo*

$$K(x,y)=\sum_{\gamma\in\Gamma} f\big(d(\gamma x,y)\big)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\big(|n+x-y|\big). \tag{1}$$

Es *automorfo* en el sentido de que $K(\gamma x,y)=K(x,y)=K(x,\gamma y)$ para cualquier $\gamma\in\Gamma$.

El espacio de órbitas $\Gamma\backslash\mathbb{R}$ es el toro unidimensional $\mathbb{T}$ y así K está definido en $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$. Sobre $\mathbb{T}$, el operador $-\Delta$ tiene un espectro discreto con autofunciones $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y autovalores respectivos $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $\phi_n(t)=e^{2\pi it}$ y $\lambda_n=4\pi^2n^2$.

Es fácil comprobar usando la propiedad aditiva $\phi_n(x+y)=\phi_n(x)\phi_n(y)$, que se verifica la siguiente *propiedad fundamental*

$$\int_M f\big(|x-y|\big)\phi_n(x)\;dx=\widehat{f_p}\big(\sqrt{\lambda_n}\big)\phi_n(y) \tag{2}$$

donde f_p es la extensión par de f y $\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\;dx$. A partir de esto, empleando que $M=\mathbb{R}$ es unión de $\gamma\big([0,1)\big)$ con $\gamma\in\Gamma$, se deduce el desarrollo de Fourier de K, que llamaremos *fórmula de pretraza*

$$K(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f_p}\big(\sqrt{\lambda_n}\big)\phi_n(x)\overline{\phi_n(y)}. \tag{3}$$

Si ahora calculamos la traza de K en $\mathbb{T}$, esto es, $\int_{\mathbb{T}} K(x,x)\;dx$ (aquí es equivalente a algo tan sencillo como evaluar en cero), se obtiene la *fórmula de traza*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\big(|n|\big)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f_p}\big(\sqrt{\lambda_n}\big). \tag{4}$$

Esto es una manera complicada de escribir la fórmula de sumación de Poisson. Notemos que $|n|$ proviene de $d\big(\gamma(x),x\big)$ que es la longitud de la geodésica en $\mathbb{R}$ que une x con otro punto en su órbita por Γ, entonces es la longitud de una geodésica cerrada en $\mathbb{T}$ y así el primer sumatorio puede entenderse sobre las longitudes de las geodésicas cerradas en $\mathbb{T}$.

En teoría de números. Aplicando (4) a $f(x)=x^{-s}\operatorname{sen}^2(\pi nx/2)$ se obtiene la ecuación funcional para $\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)$ aunque, siguiendo a Riemann, es más sencillo deducirla para $\zeta(s)$ con $f(x)=e^{-tx^2}$ en (4) tomando después transformadas de Mellin en t. La ecuación funcional de las funciones L de Dirichlet también se obtiene a partir de (4).

3. Espacio euclídeo de dimensión 2

El caso de dimensión 2 es muy similar. Ahora consideramos

$$M = \mathbb{R}^2, \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \Gamma = \{\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{n} \ : \ \vec{n} \in \mathbb{Z}^2\}, \quad -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

El *núcleo automorfo* es

$$K(x, y) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} f\big(\|\vec{n} + \vec{x} - \vec{y}\|\big). \tag{5}$$

Ahora $\Gamma \backslash M$ es $\mathbb{T}^2$ y las autofunciones y autovalores respectivos vienen dados por $\phi_{\vec{n}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \vec{n} \cdot \vec{x}}$ y $\lambda_{\vec{n}} = 4\pi^2 \|\vec{n}\|^2$ con $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2$.

La *propiedad fundamental* es más complicada que antes:

$$\int_M f\big(\|\vec{x} - \vec{y}\|\big) \phi_{\vec{n}}(\vec{x})\, dx = \widetilde{f}\big(\sqrt{\lambda_{\vec{n}}}\big) \phi_{\vec{n}}(\vec{y}) \tag{6}$$

donde $\widetilde{f}$ es una transformada de Hankel

$$\widetilde{f}(x) = \pi \int_0^\infty f(\sqrt{t}) J_0\big(x\sqrt{t}\big)\, dt \qquad \text{donde} \quad J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \cos t)\, dt.$$

Si bien por la propiedad aditiva se obtiene fácilmente $\phi_{\vec{n}}(\vec{y})$ en el segundo miembro de (6), no es obvio que su coeficiente dependa sólo del autovalor. Lo que se está usando aquí es que la transformada de Fourier de una función radial es radial.

Como antes, $M = \mathbb{R}^2$ es unión de $\gamma\big([0,1) \times [0,1)\big)$ con $\gamma \in \Gamma$ y se obtiene la *fórmula de pretraza*

$$K(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \widetilde{f}\big(\sqrt{\lambda_{\vec{n}}}\big) \phi_{\vec{n}}(\vec{x}) \overline{\phi_{\vec{n}}(\vec{y})}. \tag{7}$$

La *fórmula de traza*, que otra vez equivale a evaluar en cero, viene de calcular $\int_{\mathbb{T}} K(\vec{x}, \vec{x})\, d\vec{x}$ con (5) y con (7):

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} f\big(\|\vec{n}\|\big) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \widetilde{f}\big(\sqrt{\lambda_{\vec{n}}}\big). \tag{8}$$

Ésta es la fórmula de sumación de Poisson para funciones radiales en $\mathbb{R}^2$. De nuevo el primer sumatorio puede entenderse como una suma sobre las longitudes de las geodésicas cerradas en $\mathbb{T}^2$ porque $\|\vec{n}\| = d\big(\gamma(\vec{x}), \vec{x}\big)$ es la longitud de la geodésica en $\mathbb{R}^2$ (la recta) que une $\vec{x}$ y $\gamma(\vec{x})$.

En teoría de números. Es fácil reescribir (8) como la siguiente fórmula de Hardy y Landau

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_2(k) f\big(\sqrt{k}\big) = \sum_{k=0}^{\infty} r_2(k) \widetilde{f}\big(2\pi\sqrt{k}\big).$$

Tomando como f aproximaciones regulares de la función característica de $[0,\sqrt{x}]$ se puede obtener con algún esfuerzo

$$\sum_{n\le x} r_2(k) = \pi x + O\big(x^{1/3}\big).$$

El *problema del círculo de Gauss* consiste en averiguar por qué números se puede reemplazar el exponente $1/3$. La conjetura de Hardy es que cualquiera mayor que $1/4$ es válido. Por otro lado se sabe que $1/4$ no lo es. El mejor exponente probado hasta la fecha, debido a M.N. Huxley, es $131/416$ que supone el 22 % del camino entre $1/3$ y $1/4$.

4. Geometría y análisis en en plano hiperbólico

El plano hiperbólico es una variedad de dimensión 2 homogénea y de curvatura constante $K=-1$. Uno de los modelos más sencillo para representarlo es el *semiplano de Poincaré*

$$\mathbb{H} = \big\{x+iy \ : \ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^+\big\} \qquad \text{con la métrica} \quad y^{-2}\big(dx^2+dy^2\big).$$

La distancia $d(z,w)$ correspondiente a esta métrica admite una fórmula explícita relativamente sencilla [5] pero que no mencionaremos aquí, más allá del caso especial

$$d(i,pi) = |\log p| \qquad \text{para } p\in\mathbb{R}^+.$$

Conviene notar para hacerse una idea geométrica que las distancias disminuyen con respecto a la euclídea según subimos y aumentan según bajamos. De hecho $d(z,z+1)$ tiende a 0 y a ∞, respectivamente cuando $\Im z$ tiende a $+\infty$ y a 0^+. También hay una medida $d\mu_z$ asociada a la métrica y a la distancia y que por tanto es invariante por isometrías.

Las isometrías directas G del semiplano de Poincaré están en biyección con el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, salvo identificar I y $-I$, considerando que las matrices actúan sobre $\mathbb{H}$ como transformaciones lineales fraccionarias

$$G = \Big\{g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ : \ a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc=1\Big\}.$$

El operador de Laplace-Beltrami es el laplaciano habitual salvo por un factor:

$$-\Delta = -y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big). \tag{9}$$

Por definición, sólo depende de la métrica y por consiguiente es invariante por isometrías, es decir

$$(-\Delta f)\circ g = -\Delta(f\circ g) \qquad \text{para cualquier } g\in G.$$

La ecuación $g(z)=z$ con $g\in G-\{I\}$ puede tener dos soluciones en $\widehat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, una solución en $\widehat{\mathbb{R}}$ o ninguna (dos soluciones complejas, una de ellas en $\mathbb{H}$). Respectivamente, se dice que g es *hiperbólico*, *parabólico* y *elíptico*. Siempre conjugando podemos hacer que los puntos fijos pasen a ser ∞ y 0; ∞; e i. Lo cual corresponde a las siguientes transformaciones:

$$P(z)=pz, \qquad T(z)=z+v \qquad \text{y} \quad g_\alpha(z)=\frac{z\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{z\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}.$$

Geométricamente, los elementos hiperbólicos corresponden a una traslación a lo largo de una geodésica (que en $\mathbb{H}$ son las semirrectas verticales y las semicircunferencias ortogonales a $\mathbb{R}$), mientras que los elementos elípticos son rotaciones alrededor de un punto de $\mathbb{H}$ y los parabólicos son rotaciones degeneradas con centro en el infinito (de la misma forma que en $\mathbb{R}^2$ una rotación con centro muy alejado aproxima a una traslación, que también es un movimiento).

Hay muchas posibilidades para subgrupos discretos Γ de G pero estamos especialmente interesados en los que el espacio de órbitas $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ sea compacto o que al menos deje de serlo sólo por algunos puntos en el infinito. El subgrupo de G que corresponde a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es un ejemplo de esto último. Estos subgrupos discretos válidos se dice que son Fuchsianos de primera especie. Se puede probar que se caracterizan porque cada punto de $\widehat{\mathbb{R}}$ pertenece al cierre de alguna órbita. Para estos grupos, $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ siempre contiene un número finito de puntos fijados por elementos elípticos, los cuales corresponden a puntos de ramificación. Por otra parte, los puntos fijados por elementos parabólicos de Γ corresponden a los puntos del infinito de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, y también son un número finito; así pues, $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ es compacto si y sólo si Γ no contiene elementos parabólicos.

Si $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ es compacto, $-\Delta$ tendrá un conjunto discreto de autovalores con autofunciones que forman un sistema ortogonal completo. En el caso no compacto (siempre dentro de los grupos Fuchsianos de primera especie), Selberg obtuvo la resolución espectral de $-\Delta$. En resumen, hay un espectro discreto que es dominante en los casos de interés aritmético (aunque se cree que genéricamente ocurre lo contrario) y después un espectro continuo relacionado con unas funciones llamadas series de Eisenstein.

5. La fórmula de traza de Selberg

El contexto geométrico de la fórmula de traza de Selberg es el que corresponde a la sección anterior, esto es, $M=\mathbb{H}$, $d(z,w)$ la distancia inducida por la métrica en el semiplano de Poincaré, Γ un grupo Fuchsiano de primera especie y $-\Delta$ como en (9).

El *núcleo automorfo* es

$$K(z,w)=\sum_{\gamma\in\Gamma}k(\gamma z,w) \qquad \text{con } k(z,w)=f\big(d(z,w)\big). \tag{10}$$

Los problemas empiezan con la *propiedad fundamental*. Lo que queremos probar es que si ϕ es una autofunción de $-\Delta$ en el semiplano de Poincaré con autovalor λ, entonces

$$\int_{\mathbb{H}} k(z,w)\phi(z)\,dx = h(\lambda)\phi(w) \tag{11}$$

para alguna transformada integral h de k.

Demostración. Para cualquier $\gamma \in G$, $\phi \circ \gamma$ es también autofunción con el mismo autovalor. Entonces con el cambio $z \mapsto \gamma z$ y la relación $k(\gamma z, w) = k(z, \gamma^{-1}w)$ nos podemos restringir al caso $w = i$. Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{H}} k(z,i)\phi(z)d\mu_z = \int_{\mathbb{H}} k(z,i)\psi(z)d\mu_z \qquad \text{con } \psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(g_\alpha z)\,d\alpha$$

donde g_α corresponde a una rotación euclídea de ángulo α, que recordemos que dejaba fijo i. Si uno lo prefiere se está integrando sobre el estabilizador de i. La igualdad anterior se sigue de que $k(g_\alpha z, i) = k(g_\alpha z, g_\alpha i) = k(z,i)$. Por construcción, ψ es radial en el sentido de que $\psi(z) = F\big(d(z,i)\big)$. Ahora bien, considerando la ecuación diferencial correspondiente, todas las soluciones radiales de $-\Delta f = \lambda f$ son proporcionales a cierta función $\omega_\lambda(z)$ con $\omega_\lambda(i) = 1$. Entonces $\psi(z) = \phi(i)\omega_\lambda(z)$ y se tiene

$$\int_{\mathbb{H}} k(z,i)\phi(z)d\mu_z = h(\lambda)\phi(i) \qquad \text{con } h(\lambda) = \int_{\mathbb{H}} k(z,i)\omega_\lambda(z)d\mu_z$$

que es lo que queríamos probar. □

En el caso compacto, la *fórmula de pretraza* tiene un aspecto similar al del (3) y (7):

$$K(z,w) = \sum_n h(\lambda_n)\phi_n(z)\overline{\phi_n(w)}. \tag{12}$$

En el caso no compacto a la derecha hay que añadir la contribución del espectro continuo.

Consecuentemente el análogo de (4) y (8), de nuevo en el caso compacto, sería la fórmula de traza

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} k(\gamma z, z)\,d\mu_z = \sum_n h(\lambda_n). \tag{13}$$

El primer miembro no parece tener una interpretación en términos de longitudes de geodésicas. Incluso sin este objetivo, una diferencia básica es que $k(\gamma z, z)$ no depende sólo de γ, éste fenómeno es abeliano. No obstante, como veremos a continuación, Selberg logró salvar la interpretación geométrica de este primer miembro.

Dado $\gamma \in \Gamma$ hiperbólico, consideramos su clase de conjugación $C_\gamma = \{\alpha^{-1}\gamma\alpha \ : \ \alpha \in \Gamma\}$ entonces la contribución a (13) de los elementos de C_γ es

$$\sum_{\beta \in C_\gamma} \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} k(z, \beta z)\, d\mu_z = \sum_{\alpha \in Z_\gamma\backslash\Gamma} \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} k(\alpha z, \gamma\alpha z)\, d\mu_z = \int_{Z_\gamma\backslash\mathbb{H}} k(z, \gamma z)\, d\mu_z,$$

donde Z_γ indica el centralizador es decir, los $\alpha \in \Gamma$ con $\alpha^{-1}\gamma\alpha = \gamma$. Ahora bien, si $\delta \in G$ envía 0 e ∞ a los puntos fijos por γ en $\widehat{\mathbb{R}}$, entonces $\delta^{-1}\gamma\delta(z) = P(z)$ donde $P(z) = pz$, como en la sección anterior. Supongamos con $p > 1$ (el caso $p < 1$ es similar).

La teoría de grupos Fuchsianos dice que siempre $Z_\gamma = \langle \gamma_0^k \rangle$ para cierto γ_0 tal que $\gamma_0^k = \gamma$. Para fijar ideas, supongamos que γ es *primitivo*, esto es, que $\gamma_0 = \gamma$. En ese caso la última integral es

$$\int_{\langle\gamma\rangle\backslash\mathbb{H}} k(\delta^{-1}z, \delta^{-1}\gamma\delta\delta^{-1}z)\, d\mu_z = \int_{\langle P\rangle\backslash\mathbb{H}} k\big(z, P(z)\big)\, d\mu_z = \int_1^p \int_{-\infty}^{\infty} k(z, pz)\, d\mu_z,$$

donde el último paso viene de que a base de multiplicar o dividir por p siempre conseguiremos que un punto $z \in \mathbb{H}$ acabe de manera única en la franja $1 \le |\Im(z)| < p$.

Sabemos que $\log p = d(i, pi) = d\big(i, \delta^{-1}\gamma\delta(i)\big) = d\big(\delta(i), \gamma\delta(i)\big)$. Por tanto, $\log p$ es la longitud de la geodésica que une $\delta(i)$ con $\gamma\delta(i)$ y que se vuelve cerrada al tomar el cociente. Así pues tenemos una fórmula del tipo

$$\sum F\big(\ell_n\big) + \cdots = \sum h(\lambda_n) \tag{14}$$

donde ℓ_n recorre las longitudes de geodésicas cerradas (correspondientes a los elementos hiperbólicos). Incorporar a la discusión los elementos no primitivos, con $Z_\gamma = \langle \gamma_0^k \rangle$, $k > 1$, corresponde a considerar la misma geodésica recorrida varias veces, por tanto podemos entender que en (14) la suma es sobre las geodésicas cerradas recorridas sólo una vez.

Los puntos suspensivos corresponden a la contribución de las clases de conjugación de la identidad y de los elementos elípticos y parabólicos si los hay. La clase de la identidad sólo contiene a ella misma y su contribución da el término principal (el que corresponde a la llamada *ley de Weyl*) cuando h es una función meseta de soporte grande. Hay un número finito de clases de conjugación de elementos elípticos que contribuyen como una suma finita de integrales. Los elementos parabólicos son los que más complican la prueba porque cuando existen, $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ no es compacto y la traza en general ¡da infinito! Para evitar este problema hay que extraer un término que diverge en la integral que da la traza y cancelarlo con otro en el lado espectral.

Para dar un enunciado completo de la fórmula de traza de Selberg, diremos que para grupos Fuchsianos estrictamente hiperbólicos, es decir, los que no contienen ni elementos elípticos ni parabólicos, la fórmula exacta es

$$\frac{1}{2}\sum_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_n \widehat{h}(k\ell_n)}{\operatorname{senh}(k\ell_n/2)} + \frac{A}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} th(t)\tanh(\pi t)\, dt = \sum_n h\big(\sqrt{\lambda_n - 1/4}\big) \tag{15}$$

donde h es una función par que satisface ciertas condiciones de regularidad (holomorfa en $|\Im(z)| < 1/2 + \epsilon$ y $h(z) = O(|z|^{-2-\epsilon})$ en esa región), A es el área de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ y, como antes, ℓ_n indica las longitudes de geodésicas cerradas recorridas una sola vez (la suma en k viene de considerar k vueltas).

En importantes trabajos posteriores [2], [3] se ha mostrado una relación entre autovalores y longitudes de geodésicas cerradas en el contexto de las variedades riemannianas. Sin embargo, la fórmula de traza de Selberg mantiene el atractivo de probar una relación exacta entre estas cantidades en el caso especial de superficies de Riemann.

En teoría de números. La fórmula de la traza de Selberg permite probar la extensión analítica y la ecuación funcional de una función que guarda ciertas analogías con la función ζ de Riemann, sustituyendo los primos por longitudes de geodésicas recorridas una sola vez. Selberg explotó esta analogía para crear un *teorema de las geodésicas primas* en superficies de Riemann. Un hecho bastante sorprendente es que un análogo de la hipótesis de Riemann se sigue de que el operador $-\Delta$ es autoadjunto. Curiosamente esto no da el error óptimo esperado en el teorema de las geodésicas primas.

Una aplicación más genuinamente de teoría de números viene de que a cada forma cuadrática indefinida $Q(x,y)$ se le puede asociar el elemento hiperbólico de $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, bien definido salvo elevar a potencias, que tiene como puntos fijos las soluciones (reales) de $Q(z,1) = 0$. La longitud de la geodésicas cerrada en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ que le corresponde, está relacionada con las soluciones fundamentales de la ecuación de Pell. De esta forma se pueden obtener [7] fórmulas como

$$2\sum_{\epsilon_d^2 \le x} h(d)\log\epsilon_d = x + O\big(x^{3/4}\big) \qquad \text{y} \qquad \sum_{\epsilon_d^2 \le x} h(d) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\big(x^{3/4}\log^2 x\big),$$

donde $h(d)$ es el número de clases para formas cuadráticas primitivas de discriminante $d > 0$ y ϵ_d es la solución fundamental de $x^2 - dy^2 = 4$. Esto es impresionante teniendo en cuenta que ambas cantidades son bastante desconocidas. Ni siquiera se conoce la asintótica de $\sum_{d\le x} h(d)$.

Más que la propia fórmula de traza, lo que ha tenido una gran repercusión en la teoría de números actual ha sido el desarrollo de una teoría espectral de formas automorfas, de la que Selberg fue pionero. Dentro de los aspectos más analíticos, es de destacar la fórmula de Kuznetsov que relaciona la distribución de los inversos cuando el módulo varía, más concretamente sumas de sumas de Kloosterman, con ciertos coeficientes asociados a las autofunciones. Sin llegar este complejo resultado, ya se puede dotar de contenido aritmético a la propia definición del núcleo automorfo, que para elecciones adecuadas de Γ está estrechamente ligado a la autocorrelación del número de representaciones como suma de dos cuadrados.

Referencias

[1] I. Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by B. Randol, With an appendix by J. Dodziuk.

[2] J. Chazarain. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24:65–82, 1974.

[3] J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29(1):39–79, 1975.

[4] D. A. Hejhal. The Selberg trace formula and the Riemann zeta function. *Duke Math. J.*, 43(3):441–482, 1976.

[5] H. Iwaniec. *Spectral methods of automorphic forms*, volume 53 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2002.

[6] H. P. McKean. Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface. *Comm. Pure Appl. Math.*, 25:225–246, 1972.

[7] P. Sarnak. Class numbers of indefinite binary quadratic forms. *J. Number Theory*, 15(2):229–247, 1982.

[8] A. Selberg. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 20:47–87, 1956.