Euler y Hadamard

Fernando Chamizo

6 de mayo de 2018

Un polinomio P con $P(0) \neq 0$ y raíces $\pm r_1$, $\pm r_2$,..., $\pm r_n$, es de la forma

$$(1)\quad p_{2n}(x-r_1)(x+r_1)\cdots(x-r_n)(x+r_n) = p_{2n}(x^2-r_1^2)\cdots(x^2-r_n^2) = p_{2n}x^{2n}+\cdots+p_2x^2+p_0.$$

Comparando coeficientes se cumple

$$(2)\qquad p_2 = (-1)^{n-1}p_{2n}\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_{n-1}} r_{k_1}^2 r_{k_2}^2\cdots r_{k_{n-1}}^2 \qquad \text{y} \qquad p_0 = (-1)^n p_{2n}\prod_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Entonces se tiene la siguiente fórmula sencilla:

$$(3)\qquad -\frac{p_2}{p_0} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k^2}.$$

Euler empleó el desarrollo de Taylor del seno para escribir

$$(4)\qquad S(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \qquad \text{con} \quad S(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Lo que se dijo es que S tiene "raíces" $\pm k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}^+$ y si se aplica (3) con $p_0 = 1$ y $p_2 = -1/3!$ se deduce

$$(5)\qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Este resultado es ¡correcto! como demostraría después el propio Euler pero el argumento carece de sentido porque se está aplicando una identidad sobre polinomios a una función trascendente.

Por un lado, que (5) sea cierto parece demasiada casualidad como para que el argumento sea totalmente incorrecto pero por otra parte si lo aplicamos a $(1-x^2)e^{-x^2}$ se llega a $2 = 1$ y los resultados correctos parecen la excepción. Una teoría desarrollada por Hadamard muestra que las funciones enteras que, en cierto modo, crecen menos que e^z se pueden factorizar como polinomios y si crecen más pero no desbocadamente también lo hacen salvo multiplicar por exponenciales de polinomios.

Para una función entera denotaremos con $\mathcal{Z}$ al multiconjunto[1] de sus ceros en $\mathbb{C} - \{0\}$ repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Así los simples aparecen una sola vez, los dobles dos veces, etc.

Teorema (Teorema de factorización de Hadamard)**.** *Sea f una función entera tal que existe cierto $\rho \in \mathbb{R}^+$ con*

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)|e^{-|z|^\rho} = 0. \tag{6}$$

Entonces se cumple

$$f(z) = z^k e^{P(z)} \prod_{c\in\mathcal{Z}} \Big(1 - \frac{z}{c}\Big) e^{Q(z/c)} \tag{7}$$

donde k es el orden del posible cero en $z = 0$, P es un polinomio de grado menor o igual que ρ y Q es la parte de $z/1 + z^2/2 + z^3/3 + \dots$ de grado menor o igual que ρ.

En particular si $\rho < 1$ se tiene $Q = 0$ y e^P es constante, esto es,

Corolario. *Si* (6) *se verifica para algún $\rho < 1$, entonces*

$$f(z) = Az^k \prod_{c\in\mathcal{Z}} \Big(1 - \frac{z}{c}\Big) \tag{8}$$

para cierta constante $A \in \mathbb{C}$.

Las funciones enteras que cumplen (6) para algún ρ se dice que son *de orden finito*. No todas las funciones enteras lo son, un contraejemplo es $\cos e^z$. La convergencia del producto infinito en estos resultados es uniforme sobre compactos y por tanto asegura que el resultado es una función holomorfa así como que se pueden hacer sin peligro reordenaciones o derivadas logarítmicas (ver [2]).

Para $f(z) = \operatorname{sen} z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$ la condición (6) se cumple por ejemplo con $\rho = 1.1$, lo cual asegura que existen constantes $A, B \in \mathbb{C}$ tales que

$$\operatorname{sen} z = ze^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{\pi n}\Big) e^{z/\pi n} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{\pi n}\Big) e^{-z/\pi n} = ze^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{9}$$

[1] Un multiconjunto es un conjunto en el que se admiten repeticiones de los elementos.

La función S en (4) es entera completando su definición en la singularidad evitable $z = 0$ con $S(0) = \lim_{z\to 0} S(z) = 1$. En la fórmula anterior, $S(0) = 1$ implica $B = 0$ y la simetría $S(z) = S(-z)$ implica $A = 0$. Por tanto hemos probado la fórmula de factorización del seno que convenientemente empleada justifica el argumento de Euler:

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{10}$$

Otra forma de proceder es considerar la función entera $f(z) = 1 - z/3! + z^2/5! - z^3/7! + \dots$ que coincide con $S(\sqrt{z})$ sea cual sea el signo elegido para la raíz, por tanto sus ceros son $\pi^2 n^2$ con $n \in \mathbb{Z}^+$. Satisface (6) para cualquier $\rho > 1/2$ y por tanto el Corolario implica

$$f(z) = A \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{11}$$

y cambiando z por z^2 se obtiene (10).

Euler llegó a probar (10) sin la variable compleja del siglo XIX con un bello argumento basado en que los polinomios $(1 + iz/n)^n$ tienden a e^{iz}. El original se puede encontrar en [1] y es totalmente legible, aunque a un lector moderno la falta de rigor respecto a la convergencia le inquiete un poco.

Referencias

[1] L. Euler. *Introducción al análisis de los infinitos.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”, Seville; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2000. Translated from the Latin by J. L. Arantegui Tamayo, Annotated by A. J. Durán Guardeño, With introductory material by J. Ordóñez, M. Martínez Pérez and Durán Guardeño, Edited by Durán Guardeño and F. J. Pérez Fernández.

[2] J. L. Fernández Pérez. *Variable Compleja IIϵ.* 2018. La versión preliminar de algunos capítulos se pueden descargar de `www.uam.es/fernando.chamizo`.