Cómo aprobar la Topología del curso 2003/2004 (sin esperar al 2004/2005)

Estudiando.

Eso se dice muy fácil, y de todas formas es tarde para ponerse si no lo has hecho ya, con lo cual puede que esta hoja esté dedicada al conjunto vacío. Sin embargo, tal vez haya alguien en la frontera. Si los ojos no te hacen chiribitas cuando lees demostraciones sencillas del curso y puedes seguir las soluciones de la mayoría de los ejercicios (aunque piensas que en muchos casos a ti eso no se te ocurriría), quizá te resulten provechosos los siguientes consejos:

0) <u>Para resolver un problema hay que empezar a pensar</u>. La primera idea puede ser una tontería, que a lo mejor incluso funciona. Si no es así, analiza por qué no y busca otra idea un poco mejor que no caiga en los mismos fallos de la primera. Procede por inducción (eso sí, sin llegar a infinito ni al final del examen).

1) Aunque la asignatura es abstracta, es fundamental <u>desarrollar cierta intuición</u>. Trata de invocarla a través de razonamientos instintivos. Te permitirán guiar la prueba rigurosa que escribirás en el papel, detectar los puntos esenciales y reducir lo que tienes que memorizar. Por ejemplo, si uno piensa que $\overline{A}$ representa los puntos que están infinitamente cerca de A, y que un punto es de acumulación si está infinitamente cerca de elementos de A distintos de él mismo, la igualdad $\overline{A} = A \cup A'$ pasa de ser algo que viene en la página 37 de los apuntes, a ser algo natural. Si imaginamos los subespacios simplemente conexos como los que no tienen agujeros, es más fácil que se nos ocurra que la unión de simplemente conexos puede no ser simplemente conexa (ejercicio n de la hoja 6), tomando por ejemplo las mitades norte y sur de una corona circular.

2) <u>No menosprecies los dibujos ni las ideas geométricas</u> para extender tu intuición y anticiparte a los resultados, especialmente con la topología usual. Por ejemplo, está claro que a partir de la varilla $[0,1]$ no podemos obtener un aro sin cortar ni pegar, y que si a S^2 le hacemos un orificio, estirando y aplastando podemos conseguir un disco plano D. Esto sugiere que $[0,1]$ y S^1 no son homeomorfos y que $S^2 - \{\text{polo norte}\}$ y D sí lo son.

3) Ya te enfrentes a un problema mecánico o a otro creativo, es importante <u>ordenar las ideas y redactarlas de un modo lógico y matemáticamente irreprochable</u>. Intenta siempre que tu expresión matemática sea clara y breve, haciendo notar cuáles son las hipótesis, las conclusiones y los resultados teóricos a los que apelas.

Como ejemplo, veamos algunos problemas no mecánicos de exámenes anteriores:

I) (Septiembre 2000) Sea $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto tal que sus únicos subconjuntos conexos (no vacíos) son puntos, ¿es K necesariamente finito?

II) (Junio 2001) Sea $x \in X$, probar que $\overline{\{x\}} = X$ si y sólo si x pertenece a la intersección de todos los abiertos no vacíos de X.

III) (Junio 2003) Demostrar que $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ es homeomorfo a $D_1 = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ pero no existe ningún homeomorfismo que deje el origen fijo.

I) **En mi cabeza**	**En el papel**
Según el enunciado, cada trozo de una pieza que forma K no es más grande que un punto. Esto es como decir que K está formado por una unión de puntos que no están pegados. Tampoco podemos separarlos mucho (como en $\mathbb{Z}$), porque K debe ser acotado (en $\mathbb{R}^n$, con la usual, *compacto = cerrado y acotado*). Entonces los puntos de K se deben amontonar, digamos como en $\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$. Pero este conjunto no sirve porque no es cerrado, así que le añadimos el punto límite que falta para alcanzar su cierre. Está claro que cada par de puntos está separado, simplemente cortando con un cuchillo $\mathbb{R}$ por un lugar entre ambos puntos que no esté en K, por ejemplo un irracional.	No, un contraejemplo es $K = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$, que es cerrado y acotado, y por tanto compacto con la topología usual. Las componentes conexas son los puntos, ya que si existiera un conexo $A \subset K$ con $x, y \in A$, digamos $x < y$, $A = (-\infty, i) \cap A \cup (i, \infty) \cap A$ sería una separación para cualquier irracional $x < i < y$ (ya que $A \subset K \subset \mathbb{Q}$). Para lucirse: El contraejemplo se generaliza fácilmente a $\mathbb{R}^n$ como $K \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$.

II) **En mi cabeza**	**En el papel**
$X = \overline{\{x\}}$ significa que todos los puntos de X están infinitamente cerca de x, es decir, que x está en cualquier entorno de cualquier punto. Esto es lo mismo que decir que está en todos los abiertos.	$y \in \overline{\{x\}} \Leftrightarrow \forall \mathcal{U}(y)$, se cumple $\mathcal{U}(y) \cap \{x\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \mathcal{U}(y)$, $x \in \mathcal{U}(y)$. $X = \overline{\{x\}}$ equivale a que y es arbitrario, y por las implicaciones anteriores, a que x deba estar en cualquier abierto que contenga a cualquier punto, esto es, en cualquier abierto no vacío.

III) **En mi cabeza**	**En el papel**
El dibujo es ... (hacerlo). Está claro que puedo pasar de D a D_1 empujándolo (trasladándolo). Si el origen se quedase fijo, un punto del interior pasaría a la frontera. Eso parece imposible, y en clase dijeron que tenía que ver con el grupo fundamental. Está claro que si quito el origen de D y de D_1 en el primero queda un agujero y en el segundo no. El grupo fundamental me permite detectar agujeros en $\mathbb{R}^2$ y saldría distinto en ambos casos, así que los resultados después de quitar estos puntos no son homeomorfos.	Tanto $h(x, y) = (x+1, y)$ como $h^{-1}(a, b) = (a - 1, b)$ son continuas en $\mathbb{R}^2$, y evidentemente h aplica D en D_1 (porque $((x+1) - 1)^2 = x^2$), por tanto son homeomorfos. Si tuviéramos $H : D \longrightarrow D_1$ con $H(O) = O$, $O = (0, 0)$, homeomorfismo; se tendría que $D - \{O\}$ y $D_1 - \{H(O)\} = D_1 - \{O\}$ son homeomorfos (por la restricción de H) pero esto es imposible porque el grupo fundamental de $D - \{O\}$ es $\cong \mathbb{Z}$ (se puede retraer a S^1) y el de $D_1 - \{O\}$ es trivial (por ser un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$, o retrayéndolo a un punto).