

**TOPOLOGIA (Matemáticas) , Examen Final , Junio 2004**

Apellidos, nombre

Grupo

1. (a) Demostrar que  $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$  define una distancia en  $\mathbb{R}$ .  
(b) Comparar la topología generada por  $d$  con la topología usual.
2. Demostrar brevemente o dar un contraejemplo, según convenga:
  - a) Si  $Y$  no es conexo y  $f : X \rightarrow Y$  es continua y sobre entonces  $X$  no es conexo.
  - b) Si  $f : X \rightarrow S^1$  es continua y sobre entonces  $X$  es compacto.
  - c) Si  $A \subset \mathbb{R}$  no es vacío pero tiene interior vacío, entonces  $A$  no puede ser conexo.
  - d) Todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  con la topología cofinita es compacto.
3. Estudiar si son homeomorfos los siguientes espacios:  
 $A = [0, 1)$     $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = \sin \frac{1}{x}\}$     $C = S^1$     $D = S^1 \times S^1$
4. Decidir si es conexo el siguiente conjunto:  
 $\{(1/n, t) : n \in \mathbb{Z}, t \in [-1, 1]\} \cup \{(t, 1) : -1 \leq t < 0\} \cup \{(s, -1) : 0 < s \leq 1\} \cup \{(0, 0)\}$