

2. Espacios Topológicos I (Definición y Construcciones)

Por fin Topología

El desarrollo de la teoría ha extendido el concepto de continuidad más allá de los espacios métricos creando los espacios topológicos. A pesar de que, según parece, en el resto de la licenciatura apenas aparecerán espacios topológicos que no sean métricos, no podemos suprimir su definición a no ser que cambiemos el título de la asignatura.

Como ya hemos visto, para hablar de continuidad basta definir cuáles son los abiertos. ¿Pero cómo hacerlo si no sabemos definir los puntos cercanos a uno dado porque no tenemos una distancia con qué medir? Fijémonos en dos propiedades que satisfacen los abiertos en espacios métricos:

- La unión (arbitraria) de abiertos es un abierto.
- La intersección finita de abiertos es un abierto.

La primera es trivial y la segunda se reduce a observar que la intersección finita de bolas abiertas concéntricas es de nuevo una bola abierta.

Pues bien, matemáticos sesudos (por cierto, J.B. Listing, alumno de Gauss, inventó la palabra *Topología* en 1847) llegaron al convencimiento de que esto es lo único que deberían satisfacer ciertos conjuntos para ser dignos de llamarse abiertos de forma que la definición de continuidad sea natural (al menos para ellos). Además, como los abiertos especifican la continuidad y por tanto la forma, dijeron que formaban una topología (= ciencia de la forma).

DEFINICIÓN: Dado un conjunto, X , se dice que \mathcal{T} es una topología definida sobre X si \mathcal{T} es una colección de subconjuntos de X tales que

- a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- b) $U_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \mathcal{T}$
- c) $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Además a los elementos de \mathcal{T} se les llama abiertos y se dice que el par (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico.

Notación: Como en el caso de espacios métricos, muchas veces se abrevia (X, \mathcal{T}) por X si \mathcal{T} se sobreentiende.

Esta definición es tan rara que merece una disculpa. De nuevo debemos confiar en los matemáticos del siglo XX y creer que salvaguarda nuestra intuición de forma y continuidad. Lo mejor es considerarla como un convenio al que recurrimos cuando queremos comprobar que algo es una topología; igual que un fabricante de reglas debe ir a una copia fidedigna del metro patrón. Por mucho que compliquemos la definición de metro (de 1960 a 1986

fue $1'65076373 \cdot 10^6$ longitudes de onda de la radiación emitida por el isótopo ^{86}Kr en su transición entre los estados $2p_{10}$ y $5d_5$) no debemos olvidarnos de que da igual metros que yardas, lo importante es medir. De la misma forma, a través de los ejemplos en espacios métricos desarrollaremos cierta intuición con respecto a la definición de espacio topológico y seguramente si supiéramos muchísima Topología diríamos que la forma de definición no es tan importante sino su significado abstracto. De hecho ha habido varias definiciones a lo largo del tiempo (M. Fréchet 1906, F. Hausdorff 1914, C. Kuratowski 1922 ...) y la dada aquí (P.S. Alexandroff 1925) quizá no es la más intuitiva.

– Necesito que existas y que no cambies. Eres como ese metro de platino que se conserva en alguna parte, en París o en los alrededores. No creo que nadie haya tenido nunca ganas de verlo.

– En eso te equivocas.

– En fin, poco importa; yo no. Bueno, me gusta saber que existe, que mide exactamente la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Lo pienso cada vez que me miden un piso o que me venden tela por metros.

– ¿Ah, sí? – digo fríamente.

– Pero podría muy bien pensar en ti sólo como en una virtud abstracta, una especie de límite.

Algunas definiciones dan prioridad al concepto de complementario de un abierto.

DEFINICIÓN: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Se dice que $F \subset X$ es un cerrado, si su complementario es abierto, esto es, $X - F \in \mathcal{T}$.

Observación: De la definición de topología se deduce que la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado y que la unión finita de cerrados es un cerrado. La notación “ F ” viene de la inicial de “cerrado” en francés. Je ne parle Français non plus.

Ejemplo-definición: Se llama topología discreta sobre X , \mathcal{T}_{dis} a la formada por todos los subconjuntos de X . Por ejemplo, si $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\mathcal{T}_{dis} = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}.$$

Es trivial comprobar que la topología discreta es realmente una topología.

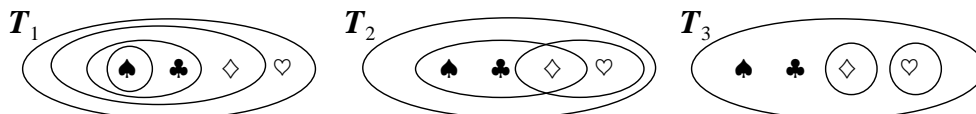
Ejemplo-definición: Se llama topología trivial sobre X a $\mathcal{T}_{tr} = \{\emptyset, X\}$. Es decir, sólo hay dos abiertos (que además son cerrados).

Aunque en ambas sus elementos sean simultáneamente abiertos y cerrados, en cierto sentido estas dos topologías son complementarias: la primera distingue demasiado los elementos de X y la segunda demasiado poco.

Ejemplo: Sea $X = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$. Las colecciones de subconjuntos de X

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{\spadesuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit, \diamond\}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{\diamond\}, \{\diamond, \heartsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit, \diamond\}\}$$

son topologías sobre X (comprobarlo) pero $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{\diamond\}, \{\heartsuit\}\}$ no lo es porque $\{\diamond\}$ y $\{\heartsuit\}$ son abiertos pero su unión no. Dibujando todos los abiertos con diagramas de Venn:



Ejemplo-definición: En cualquier conjunto, X , se define la topología cofinita como aquella tal que sus abiertos son \emptyset, X y todos los subconjuntos de X cuyo complementario tenga un número finito de elementos. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, $(-\infty, 1)$ no es abierto en la topología cofinita porque su complementario, $[1, +\infty)$ no contiene un número finito de puntos; sin embargo, $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ sí es abierto. La definición nos dice que todos los abiertos, aparte de \emptyset y \mathbb{R} , son de la forma $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^N \{x_n\}$.

Observación: En realidad no hemos demostrado que la topología cofinita es siempre una topología. Es muy fácil demostrarlo comprobando las tres propiedades, pero por si acaso, los siguientes ejemplos para $X = \mathbb{R}$ quizá ayuden:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \text{---} \text{)} \text{---} \text{)} \text{---} \text{)} \\ \mathcal{U}_2 &= \text{---} \text{)} \text{---} \text{)} \text{---} \\ \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 &= \text{---} \text{)} \text{---} \\ \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 &= \text{---} \text{)} \text{---} \text{)} \text{---} \text{)} \text{---} \text{)} \end{aligned}$$

Observación: Si X es un conjunto finito, todos sus subconjuntos son abiertos con la topología cofinita, por tanto ésta pierde su interés ya que coincide con la discreta.

En una topología la intersección infinita de abiertos o la unión infinita de cerrados no tiene por qué ser un abierto o un cerrado, respectivamente. Por ejemplo, en la cofinita, tomando los abiertos $\mathcal{U}_x = \mathbb{R} - \{x\}$ se tiene

$$\bigcap_{x \in \mathbb{Q}} \mathcal{U}_x = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \notin \mathcal{T}_{cof}.$$

Una manera crear artificialmente una topología es dividir el conjunto en unos cuantos trozos y hacer todas las intersecciones y uniones necesarias para que se satisfaga la definición de topología.

DEFINICIÓN: Se dice que \mathcal{S} es una subbase si es una colección de subconjuntos de X cuya unión es X , y se llama topología generada por la subbase \mathcal{S} a aquella cuyos abiertos son \emptyset y las uniones (arbitrarias) de intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} .

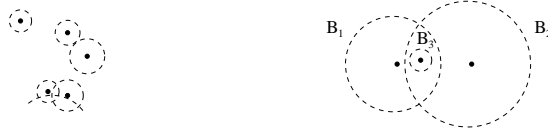
Observación: La demostración de que la topología generada por una subbase es realmente una topología, se reduce a la distributiva para \cup y \cap .

Veamos un ejemplo, pero no insistiremos mucho porque el concepto de subbase no es demasiado relevante aunque la crease N. Bourbaki, el único matemático con varios cerebros.

Ejemplo: En $X = \mathbb{R}$ si imponemos que $\mathcal{U}_1 = (-\infty, 0]$, $\mathcal{U}_2 = (0, 2]$, $\mathcal{U}_3 = [1, +\infty)$, $\mathcal{U}_4 = [2, 3]$, esto es, si consideramos la subbase $\mathcal{S} = \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4\}$ aparecen los abiertos $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 = [1, 2]$, $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_4 = \{2\}$ (las intersecciones de tres o más son vacías) y las uniones de todos ellos.

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, 2], [1, +\infty), [2, 3], [1, 2], \{2\}, (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), [1, 3], (-\infty, 0] \cup \{2\}\}.$$

Para estudiar continuidad y convergencia uno debería saber especificar lo que son los abiertos muy, muy pequeños, por ello se introduce el concepto de base, que es como una subbase en la que podemos empequeñecer los subconjuntos arbitrariamente. Para hacernos una idea intuitiva, podemos visualizar los elementos de la base como las bolas abiertas en \mathbb{R}^2 y las dos propiedades de la definición nos dirán que las bolas abiertas



lo cubren todo y se pueden empequeñecer

Para ser sincero, según fuentes autorizadas, son razones de economía, en el sentido del próximo lema, las que motivan la definición de base, así que el que quiera puede tachar el párrafo anterior aunque su autor lo crea. La racionalidad científica consiste, en gran medida, en inventar justificaciones de todo lo que se dice para sugerir su necesidad.

Por ejemplo, ésta es una caja de cartón que contiene mi frasco de tinta. [...] Es un paralelepípedo rectángulo; se recorta sobre..., es estúpido, no hay nada que decir. Eso es lo que hay que evitar, no hay que introducir nada extraño donde no lo hay. Pienso que éste es el peligro de llevar un diario: se exagera todo, uno está al acecho, forzando continuamente la verdad.

DEFINICIÓN: Dado un conjunto X , se dice que \mathcal{B} es una base si es una colección de subconjuntos de X que satisface

- 1) $\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B} : x \in B$
- 2) $\forall x \in B_1 \cap B_2, \text{ con } B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Si los elementos de las bases son como las bolas abiertas en espacios métricos, entonces podremos definir los abiertos de igual manera.

DEFINICIÓN: Dada una base \mathcal{B} en X la topología generada por \mathcal{B} , es aquella tal que \mathcal{U} es abierto si y sólo si para todo $x \in \mathcal{U}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}$.

Notación-definición: Muchas veces se escribe $\mathcal{U}(x)$ ó $B(x)$ para indicar que \mathcal{U} ó B son entornos de x , esto es, como abreviatura de “ $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tal que $x \in \mathcal{U}$ ” o “ $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ ”. Con esta notación las propiedades que definen base se escriben como

- 1) $\forall x \in X \exists B(x) \in \mathcal{B}$
- 2) $\forall B_1(x), B_2(x) \in \mathcal{B} \exists B_3(x) \in \mathcal{B} : B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x)$.

El siguiente resultado, para el que no se necesita saber que la topología generada por una base cumple la definición de topología, justifica el nombre de *base*. De alguna forma una base contiene los ladrillos necesarios para construir cualquier abierto.

Lema 2.1: *Dada una base, \mathcal{B} , cada uno de sus elementos es abierto en la topología que genera y, de hecho, todo abierto en dicha topología se puede escribir como unión (quizá infinita) de elementos de \mathcal{B} .*

Observación: Evidentemente si \mathcal{T} es una topología también es una base y la topología que genera es ella misma. En contra de lo que ocurre en álgebra lineal las bases no son “minimales” con respecto a su cardinal: podemos añadir más elementos y seguir teniendo

una base. (*Curiosidad para leer y olvidar:* Al menor cardinal de todas las posibles bases de un espacio topológico se le llama densidad de dicho espacio y, como veremos al final del tercer capítulo, algunos matemáticos se ponen muy contentos cuando pueden probar que la densidad es \aleph_0).

Dem.: Tomando $\mathcal{U} = \mathcal{B}$, con $B \in \mathcal{B}$, en la definición anterior, se tiene automáticamente que B es abierto. Por otra parte, para cualquier abierto

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B(x) \subset \mathcal{U}$$

y se sigue que las inclusiones se pueden reemplazar por igualdades. ■

Aunque la notación nos los sugiera como evidente, hay que comprobar que lo generado por una base es una topología.

Proposición 2.2: *La topología generada por una base es realmente una topología.*

Dem.: Comprobaremos ordenadamente las propiedades de la definición de topología.

1) Es trivial.

2) Si \mathcal{U}_α son abiertos en la topología generada por la base \mathcal{B} , queremos comprobar que $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$ también lo es. Pero esto es claro porque si $x \in \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ entonces $x \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ para algún α_0 , y como \mathcal{U}_{α_0} es abierto existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset \mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, con lo cual, $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$ es abierto (revisar paso a paso este trabalenguas).

3) Queremos comprobar que la intersección finita de abiertos en la topología generada por la base \mathcal{B} también es abierto. Basta considerar el caso de dos abiertos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ ya que el caso general es idéntico (o se sigue por inducción, si uno quiere ser pedante).

Si \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 son abiertos no disjuntos y $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ entonces por la definición de abierto en la topología generada por \mathcal{B} , existen $B_1(x), B_2(x)$ tales que $B_1(x) \subset \mathcal{U}_1, B_2(x) \subset \mathcal{U}_2$. Así pues, por la segunda propiedad de base existe $B_3(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x) \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ y se sigue que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ es abierto. ■

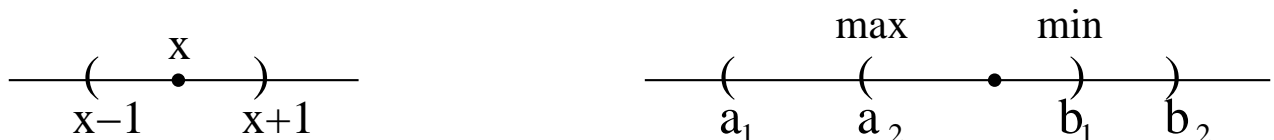
Seguramente es imposible entender todo esto sin algunos ejemplos.

Ejemplo: La colección de todos los intervalos abiertos, $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, es una base en \mathbb{R} . Es obvio que los intervalos abiertos lo cubren todo y que se pueden achicar, pero como excusa para practicar con estos conceptos veamos la demostración detallada:

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \quad x \in (x-1, x+1) \in \mathcal{B}_1$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R} \quad x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \Rightarrow x \in (\max(a_1, a_2), \min(b_1, b_2)) \subset (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2).$$

De hecho la última inclusión es una igualdad.



Ejemplo: La colección $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base en \mathbb{R} . La prueba es similar a la anterior.

DEFINICIÓN: A la topología en \mathbb{R} generada por \mathcal{B}_1 se le llama topología usual y a la generada por \mathcal{B}_2 se le llama topología de límite inferior o topología de Sorgenfrey.

Ejemplo: El conjunto $A = \mathbb{Q}$ no es ni abierto ni cerrado en las topologías usual y de Sorgenfrey, porque no existe ningún intervalo (a, b) ni $[a, b)$, $a < b$, totalmente contenido en \mathbb{R} ni en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Ejemplo: Consideremos los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :

$$\begin{array}{ll}
 A_1 = \{x > 0\} & \text{---} (\text{-----} \\
 A_2 = \{x \geq 0\} & \text{---} [\text{-----} \\
 A_3 = [0, 1] & \text{---} [\text{-----}] \\
 A_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) & \text{---} (\text{---}) (\text{---}) (\text{---})
 \end{array}$$

A_1 es un abierto en la topología usual porque si $x \in A_1$ entonces, por ejemplo, $x \in (x/2, 2x) \in \mathcal{B}_1$. Sin embargo A_2 no es abierto porque no existe ningún intervalo (a, b) tal que $0 \in (a, b) \subset A_2$. Lo mismo ocurre con A_3 . Tanto A_2 como A_3 son cerrados en la topología usual ya que sus complementarios son abiertos.

$$\begin{array}{lll}
 \text{---} (\text{---} \overset{x}{\bullet} \text{---}) \text{---} & \text{---} ([\text{---}] \text{---}) & \text{---} ([\text{---}] \text{---}] \text{---} \\
 0 \quad x/2 \quad 2x & 0 & 0 \quad 1
 \end{array}$$

A_4 también es abierto en la topología usual. En lugar de dar una “fórmula” para un intervalo que contenga a cada x , simplemente podemos decir que $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}_1$ y por tanto $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es abierto y como la unión de abiertos es un abierto, A_4 también lo es.

Con la topología de límite inferior A_1 y A_2 son abiertos porque $x \in A_1$ (ó $x \in A_2$) implica $x \in [x, x+1) \subset A_1$ (ó $\subset A_2$). Pero A_3 no es abierto porque no existe $[a, b)$ tal que $1 \in [a, b)$ y $[a, b) \subset [0, 1]$. De nuevo, A_3 es cerrado.

$$\begin{array}{lll}
 \text{---} (\text{---} \overset{x}{\bullet} \text{---}) \text{---} & \text{---} ([\text{---}] \text{---}) & \text{---} ([\text{---}] \text{---}] \text{---} \\
 0 \quad x/2 \quad 2x & 0 & 0 \quad 1
 \end{array}$$

Según lo anterior, para ver que A_4 es abierto en esta topología basta comprobar que $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es abierto. En general (a, b) es abierto en la topología de límite inferior ya que para cualquier $x \in (a, b)$ se cumple $x \in [x, b) \subset (a, b)$.

De alguna forma los abiertos en la topología usual de \mathbb{R} son aquellos que no contienen a su frontera mientras que los de la topología de límite inferior hacen la “vista gorda” con las fronteras de la izquierda, Por ello hay más abiertos en esta última topología. Demos un nombre a esta situación.

DEFINICIÓN: Dadas dos topologías \mathcal{T} , \mathcal{T}' sobre X , se dice que \mathcal{T} es más fina que \mathcal{T}' (o que \mathcal{T}' es menos fina que \mathcal{T}) si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Si además $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, se dice que \mathcal{T} es estrictamente más fina que \mathcal{T}' (o que \mathcal{T}' es estrictamente menos fina que \mathcal{T}).

Observación: ¿Hay una errata en la definición anterior? ¿El que inventó esta definición era primo del que llamó cosecante al inverso del seno y secante al del coseno? No, la notación es lógica. Si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ entonces \mathcal{T} tiene más abiertos que \mathcal{T}' , por consiguiente los abiertos de \mathcal{T} serán “más pequeños” y \mathcal{T} distinguirá más. En ese sentido es *más fina*.

Con las bases lo vemos más claro: elementos de la base más pequeños \Rightarrow topología más fina.

Proposición 2.3: Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases para las topologías \mathcal{T} y \mathcal{T}' , respectivamente, sobre X . Entonces

$$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X \forall B'(x) \in \mathcal{B}' \exists B(x) \in \mathcal{B} : B(x) \subset B'(x).$$

Dem.:

\Rightarrow) Dados $x \in X$ y $B'(x) \in \mathcal{B}'$ con $x \in B'$, queremos hallar $B(x) \in \mathcal{B}$, $B(x) \subset B'(x)$.

Como $B'(x) \in \mathcal{T}'$, entonces $B'(x)$ también es abierto en la topología \mathcal{T} , y como \mathcal{B} es base de \mathcal{T} , existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset B'(x)$.

\Leftarrow) Sea $U' \in \mathcal{T}'$, queremos demostrar que $U' \in \mathcal{T}$.

Como \mathcal{B}' es base y U' es abierto, para todo $x \in U'$ existe $B'(x) \in \mathcal{B}'$ tal que $B'(x) \subset U'$ y nuestra hipótesis asegura que existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset B'(x) \subset U'$, por consiguiente $U' \in \mathcal{T}$. ■

Ejemplo: La topología de Sorgenfrey en \mathbb{R} es más fina que la usual porque, como dijimos al final del último ejemplo, para cualquier $x \in (a, b) \in \mathcal{B}_1$ podemos tomar $[x, b) \in \mathcal{B}_2$ y se cumple $x \in [x, b) \subset (a, b)$. De hecho es estrictamente más fina, porque $A_2 = [0, +\infty)$ es abierto en la topología de Sorgenfrey pero no en la usual (también se puede decir que no existe (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset [x, x + 1)$).

Si se prueba que una topología es más y menos fina que otra, obviamente son iguales. Este truco se utiliza muchas veces en combinación con la proposición anterior para demostrar que una base es base de cierta topología dada.

Ejemplo: Comprobar que $\mathcal{B} = \{(a, b) : b - a \leq 1\}$ es una base de la topología usual. (Por cierto, la comprobación de que \mathcal{B} es una base es similar a la de que \mathcal{B}_1 lo es).

Sea \mathcal{T}_{usu} la topología usual (generada por \mathcal{B}_1) y sea \mathcal{T} la generada por \mathcal{B} . Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$ y los abiertos son uniones de elementos de la base, se tiene que \mathcal{T}_{usu} es más fina que \mathcal{T} . Por otra parte si $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1$ podemos encontrar un intervalo abierto, B , de longitud menor o igual que uno tal que $x \in B \subset B_1$. Basta tomar, por ejemplo, $B = (x - 0'5, x + 0'5) \cap B_1$. Así pues, según la proposición \mathcal{T} es más fina que \mathcal{T}_{usu} y se deduce que ambas son iguales.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B} & \Rightarrow & \mathcal{T}_{usu} \supset \mathcal{T} \\ \\ \begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \quad \mathcal{B} \\ \text{---} (\text{---} (\bullet) \text{---}) \text{---} \end{array} & \Rightarrow & x \in B \subset B_1 \Rightarrow \mathcal{T}_{usu} \subset \mathcal{T} \end{array}$$

Ejemplo: Demostrar que $\mathcal{B} = \{\mathcal{U} : \mathbb{R} - \mathcal{U} \text{ es un subconjunto acotado de } \mathbb{Z}\}$ genera una topología sobre \mathbb{R} , digamos \mathcal{T} , que es estrictamente menos fina que la cofinita.

Comprobemos primero que \mathcal{B} es de hecho una base:

1) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{n\} \in \mathcal{B}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq x$.

2) $x \in (\mathbb{R} - \{n_1, \dots, n_r\}) \cap (\mathbb{R} - \{m_1, \dots, m_s\}) \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s\} \in \mathcal{B}$.

Desde luego que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{cof}$ así que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{cof}$. Por otra parte, $\mathbb{R} - \{\sqrt{3}\} \in \mathcal{T}_{cof}$ pero no existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset \mathbb{R} - \{\sqrt{3}\}$ así que $\mathbb{R} - \{\sqrt{3}\} \notin \mathcal{T}$ y por tanto $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_{cof}$. Nótese que, de hecho, $\mathcal{T} = \mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

Más ejemplos, por favor

En esta sección veremos varias maneras de crear topologías relevantes. En primer lugar, veamos como fabricar una topología natural en un espacio métrico y así las dos definiciones de abierto que hemos dado (elemento de una topología y ciertos subconjuntos en espacios métricos) coincidirán.

DEFINICIÓN: Dado un espacio métrico (X, d) , se llama topología inducida por d o topología métrica a la generada por la base formada por todas las bolas abiertas.

Observación: Comprobar que las bolas abiertas forman realmente una base requiere demostrar que si $x \in B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$ existe $B(x_3, \epsilon_3)$ tal que $x \in B(x_3, \epsilon_3) \subset B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$.

En un dibujo es claro, pero demostrarlo rigurosamente es un poco más difícil excepto para los que hayan hecho un ejercicio anterior. Sólo hay que tomar

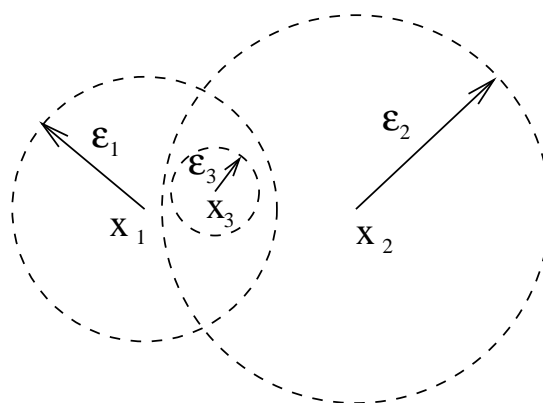
$$x_3 = x$$

$$\epsilon_3 = \min(\epsilon_1 - d(x, x_1), \epsilon_2 - d(x, x_2)).$$

¿Por qué? Nótese que basta probar

$$B(x, \epsilon_i - d(x, x_i)) \subset B(x_i, \epsilon_i)$$

y esto se puede reducir a la desigualdad triangular.

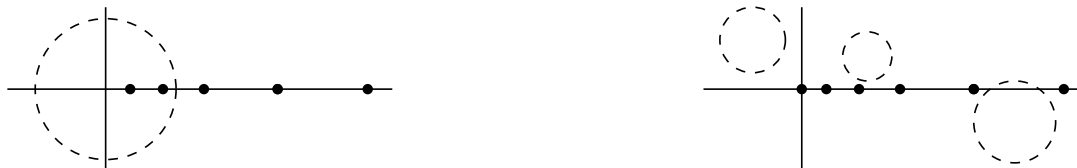


De este modo podemos generalizar la topología usual en \mathbb{R} de la sección anterior.

DEFINICIÓN: Se llama topología usual en \mathbb{R}^n a la inducida por la distancia usual.

Ejemplo: El conjunto $A_1 = \{(1/n, 0) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{Z}^+\}$ no es cerrado en la topología usual de \mathbb{R}^2 pero $A_2 = A_1 \cup \{(0, 0)\}$ sí lo es.

Si A_1 fuera cerrado, $\mathbb{R}^2 - A_1$ sería abierto, y esto no es cierto porque $(0, 0) \in \mathbb{R}^2 - A_1$ pero cualquier bola abierta, B , conteniendo al origen contiene también infinitos puntos de A_1 ; esto es $B \not\subset \mathbb{R}^2 - A_1$. Esta situación no se da en A_2 porque $(0, 0) \notin \mathbb{R}^2 - A_2$. Es claro que alrededor de cualquier otro de los puntos de $\mathbb{R}^2 - A_1$ cabe una bola abierta. Podríamos escribir una fórmula para el posible radio de esta bola pero nos aburriríamos.



En el ejemplo anterior aparece por primera vez uno de los grandes problemas notacionales de este curso: la notación (a, b) significa simultáneamente el intervalo $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ y el punto (o vector) de \mathbb{R}^2 con $x = a, y = b$. A pesar de este lío, los puntos y los intervalos son cosas tan diferentes que es difícil encontrar ejemplos sensatos que den lugar a confusión.

Ejemplo: La distancia usual en \mathbb{R}^2 , d , y la distancia d' definida por

$$d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

inducen la misma topología en \mathbb{R}^2 : la topología usual.

Para demostrarlo hay que ver que la topología inducida por d es más y menos fina que la generada por d' y, según la proposición de la sección anterior, esto se reduce a ver que, alrededor de cada punto, las bolas abiertas en (\mathbb{R}^2, d) se pueden meter dentro de las bolas abiertas en (\mathbb{R}^2, d') y viceversa. Como se tiene



Basta decir que un círculo se puede meter dentro de un cuadrado girado alrededor de cualquier punto y viceversa.



De nuevo, si uno se pusiera pesadísimo podría hallar una fórmula para calcular un posible B dados x y B' , pero es un poco absurdo en vista de la sencillez del dibujo. Ser riguroso no quiere decir ser un pelmazo ni desdeñar la geometría y demostrar ritualmente las cosas evidentes e irrelevantes sólo conduce al aburrimiento, del cual ya tenemos bastante.

Me aburro, eso es todo. De vez en cuando bostezo tan fuerte que las lágrimas me ruedan por las mejillas. Es un aburrimiento profundo, profundo, el corazón profundo de la existencia, la materia misma de que estoy hecho. No me descuido, por el contrario; esta mañana me bañé, me afeité. Sólo que cuando pienso en todos esos pequeños actos cuidadosos, no comprendo cómo pude ejecutarlos; son tan vanos. Sin duda el hábito los ejecuta por mí.

Dos distancias d y d' , como las del ejemplo anterior, tales que d es pequeña cuando d' lo es y viceversa, se dice que son equivalentes; más rigurosamente, lo son cuando para todo $\epsilon, \epsilon' > 0$, existen $\delta, \delta' > 0$ tales que $d(x, y) < \delta$ y $d'(x, y) < \delta'$ implican, respectivamente, $d'(x, y) < \epsilon'$ y $d(x, y) < \epsilon$. Distancias equivalentes generan la misma topología pero el recíproco no siempre se cumple.

Ejemplo: La topología generada por la distancia discreta es la topología discreta. Para comprobarlo basta notar que con la distancia discreta $B(x, 0.5) = \{x\}$, así que cualquier punto es abierto y por tanto, todo es abierto. La distancia obtenida al cambiar 1 por $e^x + e^y$ en la definición de la discreta no es equivalente a ella pero genera la misma topología.

En cualquier espacio métrico (X, d) tal que X sólo tenga un número finito de elementos, tomando ϵ menor que la mínima distancia entre ellos se tiene $B(x, \epsilon) = \{x\}$ y, como

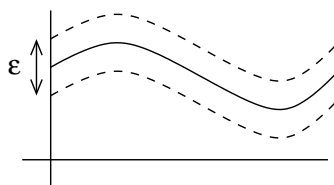
antes, la topología inducida por d es la discreta. En particular, las distancias torre, caballo, dama y rey, introducidas en el primer capítulo, inducen la topología discreta en el tablero de ajedrez. En consecuencia, como en un conjunto finito una topología no discreta no es métrica, no todos los espacios topológicos son métricos (¿sabría el lector dar un ejemplo? Es realmente *trivial*) aunque éstos sean los más comúnmente empleados.

Ejemplo: Sea X el conjunto de funciones continuas en $[0, 1]$ y tomemos las distancias

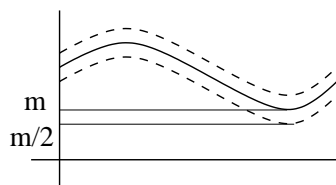
$$d_1(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\} \quad \text{y} \quad d_2(f, g) = \int_0^1 |f - g|.$$

Entonces el conjunto $\mathcal{U} = \{f \in X : f > 0\}$ es un abierto con la topología inducida por d_1 pero no lo es con la inducida por d_2 .

El caso de d_1 es el más fácil porque $B(f, \epsilon)$ no es nada más que el conjunto de funciones con gráfica en una “banda” de radio ϵ alrededor de la de f . Si $f \in \mathcal{U}$ y $m > 0$ es el mínimo de f , entonces $B(f, m/2) \subset \mathcal{U}$ ya que $|f - g| < m/2 \Rightarrow g > f - m/2 > 0$.

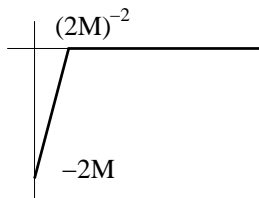


$B(f, \epsilon)$

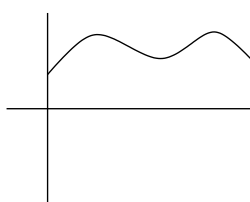


$B(f, m/2)$

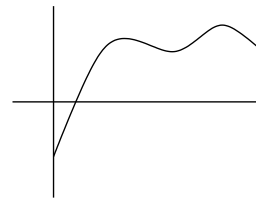
En (X, d_2) las bolas abiertas son muy difíciles de imaginar mediante un dibujo. La idea para probar que \mathcal{U} no es abierto, es que hundiendo una parte muy fina de la gráfica hasta la parte negativa podemos conseguir que la integral apenas varíe. Concretamente, no puede existir $B(f, \epsilon) \subset \mathcal{U}$ porque tomando $g(x) = \min(2M(4M^2x - 1), 0)$ (ver el dibujo) donde M es mayor que ϵ y que el máximo de f , se tiene que $f + g \notin \mathcal{U}$ y sin embargo $d(f + g, f) = \int_0^1 |g| < \epsilon$ (pensarlo hasta que no sea necesario hacer ninguna cuenta).



Gráfica de $g(x) = \min(2M(4M^2x - 1), 0)$



Gráfica de f



Gráfica de $f + g$

Si d define una distancia en un conjunto también la define en cualquiera de sus subconjuntos sin más que restringirla (olvidarse de los puntos entre los que no queremos hallar distancias). Algo parecido podemos hacer en un ámbito más general: si nos quedamos con un trozo de espacio topológico sigue siendo un espacio topológico.

DEFINICIÓN: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Se llama topología del subespacio, topología inducida, topología relativa o topología heredada (de \mathcal{T}) a la topología

sobre A dada por

$$\mathcal{T}_A = \{\mathcal{U} \cap A : \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}.$$

Observación: Lo único que nos dice la definición anterior es que los abiertos en A se obtienen intersecando con A los de X (en particular \mathcal{T}_A hereda las propiedades de topología de las de \mathcal{T}). Lo mismo ocurre con los cerrados y las bases, para practicar podemos demostrarlo, aunque es realmente sencillo.

Lema 2.4: Con la notación anterior

- 1) $B \subset A$ es cerrado en $\mathcal{T}_A \Leftrightarrow B = C \cap A$ donde C es cerrado en \mathcal{T}
- 2) $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}$ es una base de $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ es base de \mathcal{T}_A con $B_\alpha = C_\alpha \cap A$.

Observación: Lógicamente, “cerrado” en \mathcal{T}_A ó \mathcal{T} quiere decir que el complementario pertenece a dichas topologías. Es un buen ejercicio hallar una condición necesaria y suficiente sobre A para que todos los cerrados en \mathcal{T}_A lo sean también en \mathcal{T} .

Dem.: 1) El conjunto B es cerrado en \mathcal{T}_A si y sólo si $A - B \in \mathcal{T}_A$, es decir, si y sólo si $A - B = \mathcal{U} \cap A$ para cierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$, y esto equivale a (pensarlo) $B = (X - \mathcal{U}) \cap A$ con lo que basta tomar $C = X - \mathcal{U}$.

2) Basta notar que para $x \in A$, $x \in C_\alpha \Rightarrow x \in B_\alpha$ y que $x \in C_{\alpha_3} \subset C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_2} \Rightarrow x \in C_{\alpha_3} \cap A \subset (C_{\alpha_1} \cap A) \cap (C_{\alpha_2} \cap A)$. ■

Ejemplo: Sea $A = [0, 2] \cup [3, 5)$. Los conjuntos $\mathcal{U}_1 = (1, 2] \cup [3, 4)$, $\mathcal{U}_2 = [0, 1) \cup (1'5, 2)$ y $\mathcal{U}_3 = [3, 5)$ son abiertos en la topología heredada de la usual en \mathbb{R} porque

$$\mathcal{U}_1 = (1, 4) \cap A, \quad \mathcal{U}_2 = ((-1, 1) \cup (1'5, 2)) \cap A, \quad \mathcal{U}_3 = (2'5, 5) \cap A.$$

Sin embargo $F = [4, 5)$ no es abierto en la topología relativa porque, si lo fuera, existiría un elemento de la base $(a, b) \cap A$ tal que $4 \in (a, b) \cap A \subset F$, y esto es imposible. Es fácil ver que F es cerrado porque $F = [4, 6) \cap A$.

Notación: Para simplificar (o liar) normalmente también se llama *topología usual* en un subconjunto de \mathbb{R}^n a la heredada de la usual en \mathbb{R}^n .

Ejemplo: La topología usual (en el sentido recién introducido) en el conjunto $A = \{1/n : n \geq 2\}$ coincide con la discreta. Para comprobarlo basta ver que cada punto de A es abierto, lo cual se reduce a escribir $\{1/n\} = (1/(n+1), 1/(n-1)) \cap A$. Pero si tomamos $B = A \cup \{0\}$, la topología relativa en B ya no es la discreta, porque es imposible escribir $\{0\} = \mathcal{U} \cap B$ con \mathcal{U} abierto de la usual en \mathbb{R} , ya que si fuera así, tomando (a, b) con $0 \in (a, b) \subset \mathcal{U}$ se tendría $\{0\} = (a, b) \cap B$, lo cual no es posible (¿por qué?).

Ejemplo: La topología inducida en $A = \{-1/n : n \geq 2\} \cup \{0\}$ por la topología de límite inferior es la discreta, ya que

$$\{-1/n\} = [-1/(n-1), -1/(n+1)) \cap A, \quad \{0\} = [0, 1) \cap A.$$

Sin embargo la usual no sería la discreta por la misma razón que en el ejemplo anterior. Con la usual en A , $\mathcal{U} = \{-1/n : n \geq 100\} \cup \{0\}$ es abierto porque $\mathcal{U} = (-1/99, 1) \cap A$ pero $C = \{-1/n : n \text{ es par} \geq 2\} \cup \{0\}$ no es abierto porque cualquier intervalo (a, b) conteniendo al cero contiene infinitos valores $-1/n$ con n impar.

Hemos visto que los intervalos abiertos, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ generan una topología (la usual). Una idea para crear nuevas topologías es cambiar el significado de “<”. Recordemos la definición relevante.

DEFINICIÓN: Se dice que “ \leq ” es una relación de orden lineal en un conjunto X si para todo $a, b, c \in X$ se cumple

$$1) a \leq a, \quad 2) a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b, \quad 3) a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

y además dados $a, b \in X$ siempre se cumple exactamente una de las relaciones $a < b, b > a, b = a$.

Notación: Aquí hemos usado “ $a < b$ ” como abreviatura de “ $a \leq b, a \neq b$ ”. Los “intervalos” se denotan como en \mathbb{R}

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}, \quad \text{etc.}$$

y además a veces se fuerza un poco la notación escribiendo

$$(a, +\infty) = \{x \in X : x > a\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in X : x \leq b\}, \quad \text{etc.}$$

Ejemplo: Si en el conjunto $X = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$ definimos la relación de orden lineal $\spadesuit \leq \clubsuit \leq \diamond \leq \heartsuit$, entonces

$$(\spadesuit, \diamond) = \{\clubsuit\}, \quad (\clubsuit, \heartsuit) = \{\clubsuit, \diamond\}, \quad (\clubsuit, \spadesuit) = \emptyset.$$

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto con una relación de orden lineal. Se llama topología del orden a la generada por los intervalos abiertos (a, b) con $a, b \in X$ y por $[m, b)$ y/o $(a, M]$ si X tuviera un elemento mínimo, m , y/o un elemento máximo, M .

Observación: La demostración de que la base de la topología del orden es realmente una base es tan sencilla como en el caso de la topología usual.

El primero en considerar separadamente estos *espacios ordenados* fue uno de los axiomatizadores de la Topología Algebraica, S. Eilenberg, quien según un rumor no confirmado clasificaba a los matemáticos en tres grupos: a los que les gusta la música, a los que les gusta subir montañas y a los que les gusta beber vino.

Ejemplo: En el ejemplo anterior $m = \spadesuit, M = \heartsuit$ y la topología del orden es la discreta, ya que todo elemento de X es abierto, de hecho es un elemento de la base:

$$\{\spadesuit\} = [\spadesuit, \clubsuit), \quad \{\clubsuit\} = (\spadesuit, \diamond), \quad \{\diamond\} = (\clubsuit, \heartsuit), \quad \{\heartsuit\} = (\diamond, \heartsuit].$$

En general, en cualquier conjunto finito la topología del orden es la discreta (¿por qué?).

Parece irrelevante (y lo es) insistir en que en la definición anterior $a, b \in X$, pero la práctica muestra que al principio hay muchas confusiones al pensar que X está contenido dentro de un conjunto mayor.

Ejemplo (importante): La topología del orden en $X = (-2, 0) \cup [1, 3)$ no coincide con (la inducida por) la usual.

Nótese en primer lugar que X no tiene ni mínimo ni máximo ya que $-2, 3 \notin X$. La base de la topología del orden es $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in X\}$. Por ejemplo

$$(-1, 2) = \{-1 < x < 2 : x \in X\} = (-1, 0) \cup [1, 2).$$

Pero $[1, 2)$ no es un elemento de la base. No se puede decir que es $(0, 2)$ porque $0 \notin X$. En definitiva sólo se consideran intervalos que tengan extremos en X . De hecho $[1, 2)$ no es un abierto en la topología del orden porque no se pueden encontrar $a, b \in X$ tales que

$$1 \in \{a < x < b : x \in X\} \subset [1, 2).$$

Sin embargo $[1, 2) = (0, 2) \cap X$, de modo que sí es abierto en la topología inducida por la usual.

Un ejemplo interesante de orden viene sugerido por la forma en que buscamos en el diccionario. Primero necesitamos una palabra que desconozcamos (a no ser que tengamos diez años y busquemos guarrerías), digamos “*fundíbulo*”, vamos a la letra “*f*”, después buscamos “*fu*” pero todavía hay muchas palabras con este empiece. Con “*fundibul...*” sólo encontramos dos: “*fundibulario*” y “*fundíbulo*”, como la “*a*” va antes que la “*o*” en el alfabeto, aparecerán en el orden aquí escrito.

De pronto me vuelven a la memoria los nombres de los últimos autores que ha consultado: Lambert, Langlois, Larbalétrier, Lasteu, Lavergne. Es una iluminación; he comprendido el método del Autodidacta: se instruye por orden alfabético.

[...] Un día, hace siete años (me ha dicho que estudia desde hace siete años), entró con gran pompa en esta sala. [...] Hoy está en la L. K después de J, L después de K. Pasó brutalmente del estudio de los coleópteros al de la teoría de los cuanta, [...]

Este proceso de ordenar palabras comparando letras hasta encontrar una diferente y en ese caso tomar el orden natural del alfabeto se puede hacer con números en lugar de letras induciendo el llamado orden lexicográfico en \mathbb{R}^n . Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define recursivamente de la forma siguiente

$$\text{En } \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \leq \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < y_1 \\ \text{ó} \\ x_1 = y_1, x_2 \leq y_2. \end{cases}$$

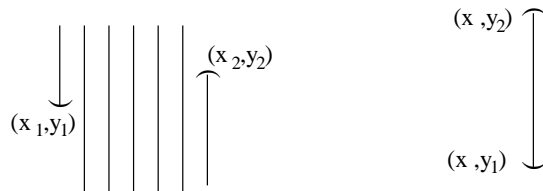
$$\text{En } \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \leq \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_{n-1}) < (y_1, \dots, y_{n-1}) \\ \text{ó} \\ x_i = y_i, i = 1, \dots, n-1, \quad x_n \leq y_n. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que el orden lexicográfico define realmente una relación de orden lineal.

Observación: Lo equívoco de la notación (a, b) llega ahora a su culminación. Nótese que con el orden lexicográfico en \mathbb{R}^2 la notación $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ significa los puntos que están entre el punto (x_1, y_1) y el punto (x_2, y_2) , ambos sin incluir. O sea, que el primer y el último paréntesis indican *intervalo* y los otros *punto*, sin embargo pensándolo un poco no puede haber confusión.

Ejemplo: Según la definición, $\mathcal{B} = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}\}$ es una base para la topología del orden lexicográfico en \mathbb{R}^2 . Veamos que $\tilde{\mathcal{B}} = \{((x, y_1), (x, y_2)) : x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$ también lo es.

Como $\mathcal{B} \supset \tilde{\mathcal{B}}$ la topología generada por $\tilde{\mathcal{B}}$ es menos fina que la del orden lexicográfico. Según la proposición para comparar topologías, para probar la igualdad sólo hay que comprobar que dentro de cada elemento de \mathcal{B} cabe uno de $\tilde{\mathcal{B}}$ conteniendo a un punto dado; y esto es obvio sin más que hacer un dibujo.



Intervalo $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$

Intervalo $((x, y_1), (x, y_2))$

La definición del orden lexicográfico no es exclusiva de \mathbb{R}^n o de las palabras de una lengua, basta que tengamos cierta cantidad de componentes (letras) y alguna forma de compararlas.

Ejemplo: Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$. La topología del orden lexicográfico en X no coincide con la topología inducida en X por la del orden lexicográfico en \mathbb{R}^2 .

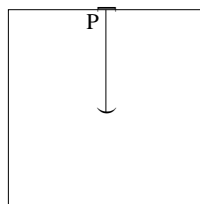
(Antes de seguir conviene leerlo de nuevo hasta conseguir no bizquear). Yendo a las definiciones tenemos que la primera topología de la que nos hablan es la generada por

$$\mathcal{B}_{lex} = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : (x_1, y_1) \in X, (x_2, y_2) \in X\}$$

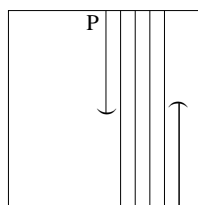
y la segunda es la generada por

$$\mathcal{B}_{ind} = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \cap X : (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Basta encontrar un punto $P \in X$ y un elemento de \mathcal{B}_{ind} que lo contenga de manera que no quepa dentro ningún elemento de \mathcal{B}_{lex} conteniendo a P (¿se entiende?). Tomemos por ejemplo $P = (1/2, 1)$ y $B = ((1/2, 1/2), (1/2, 2)) \cap X$. Se tiene que $B \in \mathcal{B}_{ind}$, $B = ((1/2, 1/2), P]$ y sin embargo cualquier $\tilde{B} = ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathcal{B}_{lex}$ conteniendo a P debe tener $x_2 > 1/2$, así que no está contenido en B .



$B = ((1/2, 1/2), (1/2, 2)) \cap X$



$P \in ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$

Dada una topología sobre X y otra sobre Y hay una forma canónica de crear una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$.

DEFINICIÓN: Sean \mathcal{B}_X y \mathcal{B}_Y bases de topologías sobre X e Y , respectivamente. Se llama topología producto a la topología sobre $X \times Y$ generada por

$$\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y = \{B_X \times B_Y : B_X \in \mathcal{B}_X, B_Y \in \mathcal{B}_Y\}.$$

Nótese que si nos dieran topologías en X e Y pero no nos dijeran cuáles son sus bases, podríamos tomar todos los abiertos, porque el conjunto de todos los abiertos de cada una de ellas cumple obviamente las propiedades de base. Una duda natural es que si escogiéramos bases diferentes, en principio, podríamos obtener definiciones diferentes de la topología producto. Veamos que no es así.

Lema 2.5: Si \mathcal{B}_X y $\tilde{\mathcal{B}}_X$ son bases de una misma topología en X y \mathcal{B}_Y y $\tilde{\mathcal{B}}_Y$ son bases de una misma topología en Y , entonces $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ genera la misma topología en $X \times Y$ que $\tilde{\mathcal{B}}_X \times \tilde{\mathcal{B}}_Y$.

Dem.: Dado $x \in X$, como cualquier $\tilde{B}_X \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ debe ser abierto en la topología generada por \mathcal{B}_X (porque \mathcal{B}_X y $\tilde{\mathcal{B}}_X$ generan la misma topología) existe $B_X \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B_X \subset \tilde{B}_X$. De la misma forma dados $y \in \tilde{B}_Y \subset \tilde{\mathcal{B}}_Y$ existe $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ tal que $y \in B_Y \subset \tilde{B}_Y$. Por tanto, para cada $(x, y) \in X \times Y$ y cada $\tilde{B}_X(x) \times \tilde{B}_Y(y) \in \tilde{\mathcal{B}}_X \times \tilde{\mathcal{B}}_Y$

$$\exists B_X(x) \times B_Y(y) \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y : (x, y) \in B_X(x) \times B_Y(y) \subset \tilde{B}_X(x) \times \tilde{B}_Y(y).$$

Así pues, la topología generada por $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ es más fina que la generada por $\tilde{\mathcal{B}}_X \times \tilde{\mathcal{B}}_Y$. Intercambiando tildes por no tildes en el argumento anterior, se tiene la inclusión contraria. ■

Observación: Igual que se define la topología producto en $X \times Y$, se puede definir en $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. El caso de productos infinitos es importante en ciertos contextos, pero requiere una definición especial muy diferente de la que todos pensaríamos, de otro modo no comparte algunas buenas propiedades del caso finito, concretamente la continuidad de las proyecciones definidas a continuación. Como curiosidad, diremos que si (X, d) es un espacio métrico, entonces el producto infinito (numerable) $X \times X \times X \times \dots$ puede considerarse como el espacio de todas las sucesiones en X y la topología producto coincide con la inducida por la distancia

$$D(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d(x_n, y_n)}{1 + d(x_n, y_n)}.$$

DEFINICIÓN: A la función

$$\begin{aligned} \pi_j : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n &\longrightarrow X_j \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto x_j \end{aligned}$$

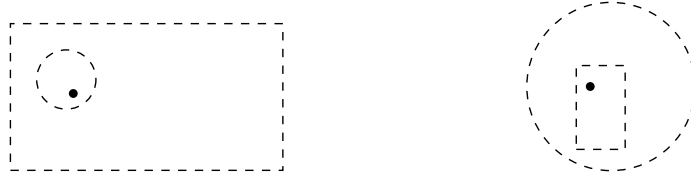
con $1 \leq j \leq n$, se le llama proyección sobre la j -ésima coordenada.

Observación: Para que la definición anterior tenga sentido hay que suponer que los X_j son no vacíos y así lo haremos implícitamente en los resultados que involucren π_j .

Ejemplo: Considerando \mathbb{R} con la topología usual, la topología producto en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ coincide con la usual en \mathbb{R}^n (en símbolos $usual \times \dots \times usual = usual$).

Para demostrarlo hay que comparar la base usual de \mathbb{R}^n , que está formada por las bolas abiertas, con la base de la topología producto que está formada por productos de

intervalos (= rectángulos n -dimensionales). De nuevo es sencillo ver que en \mathbb{R}^n , alrededor de cada punto, se pueden meter rectángulos dentro de bolas y viceversa. El caso $n = 2$ responde al siguiente dibujo



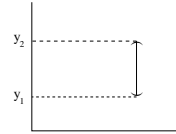
Ejemplo: La topología del orden lexicográfico en $X = [0, 1] \times [0, 1]$ no coincide con la producto de la discreta en $[0, 1]$ por (la inducida por) la usual en $[0, 1]$.

El conjunto $\{1/2\}$ es un abierto de la discreta en $[0, 1]$ y $(1/2, 1]$ lo es en la usual en $[0, 1]$; así que $\mathcal{U} = \{1/2\} \times (1/2, 1]$ es abierto en la producto, pero como ya vimos en un ejemplo anterior, \mathcal{U} no es abierto en la topología del orden lexicográfico porque no *cabe* ningún abierto de la base dentro de él conteniendo al punto $P = (1/2, 1)$.

Ejemplo: La topología del orden lexicográfico en \mathbb{R}^2 coincide con la producto de la discreta en \mathbb{R} por la usual en \mathbb{R} .

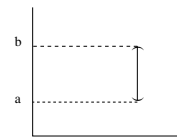
Sabíamos que una base de la topología del orden lexicográfico en \mathbb{R}^2 es

$$\mathcal{B}_{lex} = \{((x, y_1), (x, y_2)) : x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}.$$



Por otra parte, las bases de la discreta y de la usual en \mathbb{R} son $\mathcal{B}_{dis} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{B}_{usu} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, con lo cual una base de la producto es

$$\mathcal{B}_{lex} = \{\{x\} \times (a, b) : x, a, b \in \mathbb{R}\}.$$



Por tanto ambas coinciden. Aquí la confusión de la notación se vuelve un galimatías y es mejor fijarse en los dibujos.

La última manera que veremos de construir topologías es la más complicada teóricamente, porque involucra el conjunto cociente. Afortunadamente (¿?) no se insistirá mucho en ella este curso.

Recuérdese que si en un conjunto X tenemos una relación de equivalencia, \sim , se llama *conjunto cociente*, X/\sim , al conjunto de clases de equivalencia.

DEFINICIÓN: Sea X un espacio topológico, \sim una relación de equivalencia definida en X y $p : X \rightarrow X/\sim$ la función que asigna a cada elemento de X la clase de equivalencia a la que pertenece. Se llama topología cociente sobre X/\sim a la topología en la que un conjunto $\mathcal{U} \subset X/\sim$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X .

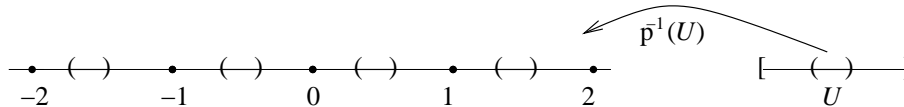
Intuitivamente, el conjunto cociente es aquel que agrupa elementos similares. Así que lo que hace p es *pegar* esos puntos (a veces se la llama *proyección*), y la topología cociente nos dice que algo será abierto si al *despegarlo* lo es en el espacio topológico inicial. Esto es incomprendible pero ayudará a desentrañar los razonamientos del siguiente ejemplo. Otra manera de entender la topología cociente es como la más fina sobre X/\sim tal que p es continua. (Ejercicio para después de leer el ejemplo y dormir un poco: Demostrar que esta propiedad caracteriza a la topología cociente).

Ejemplo: Se considera \mathbb{R} con la topología usual y la relación de equivalencia en \mathbb{R} dada por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Las clases de equivalencia son $\{x\} + \mathbb{Z}$ (con el significado obvio). En cada clase de equivalencia habrá exactamente un número $0 \leq x < 1$, escogiéndolo como representante se tiene que \mathbb{R}/\sim se puede identificar con $[0, 1)$. Es decir

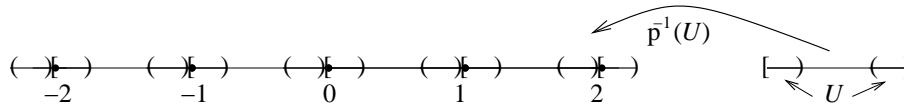
$$p : X \longrightarrow [0, 1) \quad \text{con } p(x) = \text{Frac}(x)$$

donde $\text{Frac}(x)$ significa la parte fraccionaria.

De acuerdo con la definición, si $\mathcal{U} \subset [0, 1)$, \mathcal{U} es abierto en la topología cociente $\Leftrightarrow p^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} + \mathbb{Z}$ es abierto en la usual $\Leftrightarrow \mathcal{U}$ es abierto en la usual (¿por qué? Ver el dibujo).



Por tanto la única diferencia con respecto a la topología usual, si la hubiera, tiene que estar en los abiertos que contienen a $x = 0$. Considerando $\mathcal{U} = [0, b) \cup (a, 1)$, $0 < b < a < 1$ se tiene que es abierto en la topología cociente ya que $p^{-1}(\mathcal{U}) = (a - 1, b) + \mathbb{Z}$ es abierto en la usual.



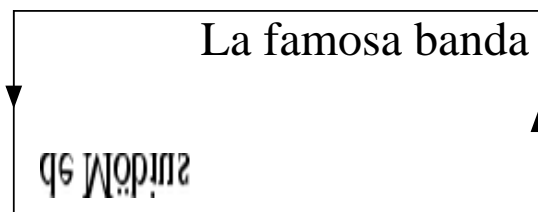
Es decir, que los abiertos pueden *salir* por cero y continuar por detrás del uno. Sin embargo $[0, b)$ no es abierto en la topología cociente. A todos los efectos es como si el cero y el uno estuvieran pegados.

$$\mathbb{R}/\sim \text{ "=" } \longmapsto \text{ con la top. cociente "=" } \circlearrowleft \text{ "=" } S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\} \text{ con la top. usual}$$

En definitiva, \sim pega todos los puntos de \mathbb{R} que se diferencian en enteros, y da lugar a una circunferencia.

¿Para qué sirven estas cosas tan raras? Es siempre peligroso hacerse esta pregunta en Matemáticas y no se puede forzar a nadie a contestar a no ser que tenga que pedir una beca de investigación; por tanto nos contentaremos con unos cuantos dibujos y alguna idea geométrica.

Para mayor comodidad, en un dibujo bidimensional se indica una relación de equivalencia que relaciona dos segmentos poniendo flechas o dobles flechas. Por ejemplo

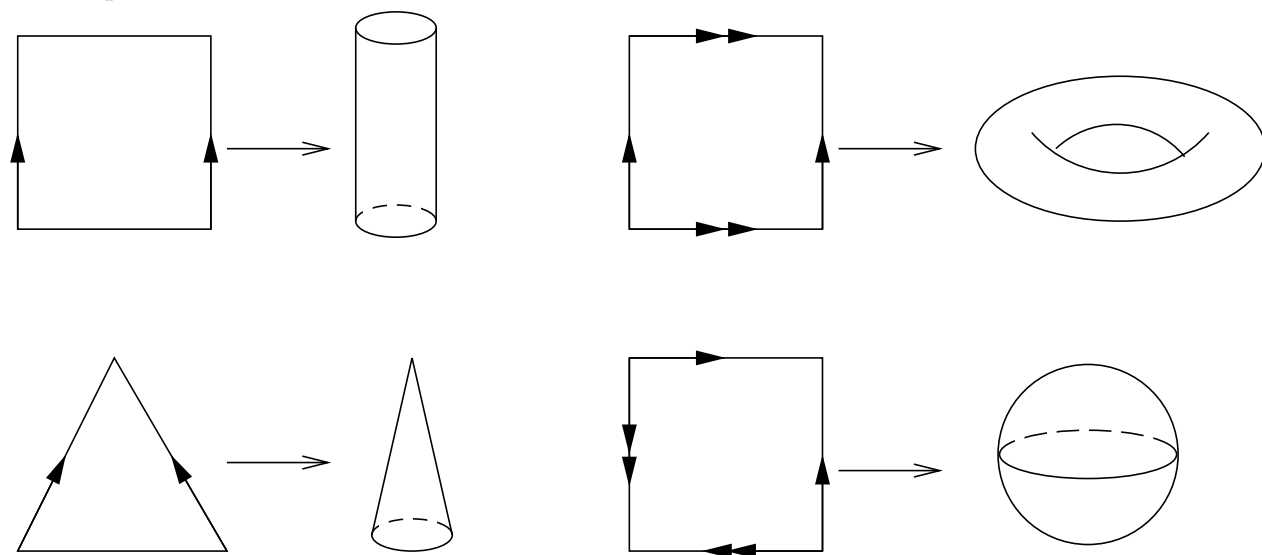


indica que en el rectángulo anterior cada punto del borde derecho está relacionado con el simétrico del lado izquierdo, $(x, y) \sim (-x, -y)$ si $(x, y) \in$ borde derecho. Como en el ejemplo anterior, con la topología cociente los abiertos que salen por la derecha aparecerán dados la vuelta por la izquierda. Es como si pegásemos el rectángulo por las flechas para obtener una banda retorcida, llamada *banda de Möbius*, introducida por A.F. Möbius en 1850 e independientemente por J.B. Listing en su “Panorama de los complejos espaciales” (buen título para una secuela de “An overview to kill” y “Moonraker”).



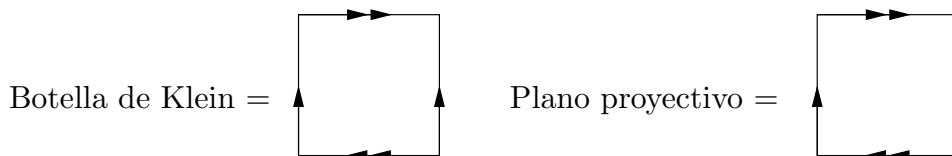
Entre las propiedades más conocidas de la banda de Möbius están que es unilátera (tiene una sola cara) y que al cortarla por su ecuador no se separa en dos.

En general tenemos una manera *bidimensional* de ver objetos que viven en \mathbb{R}^3 , lo cual es útil para estudiarlos.



Un teorema muy importante dice que todas las superficies “cerradas” se obtienen con relaciones de equivalencia en los lados de un polígono. Aunque parezca mentira existen superficies cerradas que no podemos dibujar directamente en \mathbb{R}^3 y sólo las vemos bien con

estos dibujos. Los ejemplos más simples son



La segunda superficie es bien conocida, aunque no tanto con esta representación. La primera la introdujo F. Klein en 1882 y es una botella muy rara porque es unilátera y, por tanto, todo lo que está dentro de ella también está fuera. Como Brasil es un país muy grande y lo de Klein suena a poco, allí la llaman garrafa de Klein.

Realmente es notable que la complicación geométrica de estas superficies admita una representación plana, finita y sencilla, mientras que elude acomodarse al espacioso, infinito y confortable mundo tridimensional.

¡Qué ‘natural’ parece la ciudad a pesar de todas sus geometrías, qué aplastada por la noche! Es tan... evidente, desde aquí: ¿es posible que yo sea el único que lo ve? ¿No hay en ninguna parte otra Casandra, en la cima de una colina, mirando a sus pies una ciudad sumergida en el fondo de la naturaleza?

Quien se atreva a dudar que estos objetos no se pueden construir (sin autointersecciones) en \mathbb{R}^3 , que coja un trapo cuadrado e intente coser los lados correspondientes identificando las direcciones de las flechas. Y el que no tenga ganas que vaya a la biblioteca y mire la portada y la contraportada del libro de M. Spivak, “*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*” Vol. II Publish or Perish 1970.