Universidad Autónoma de Madrid

Problemas de TOPOLOGÍA **Hoja 2** **Curso 2001/2002**

1. Demostrar que la familia numerable $\mathcal{B}_1 = \{]a,b[\ :\ \ a,b \in \mathbb{Q},\ \ a < b\}$ es una base que genera en $\mathbb{R}$ la topología usual. Probar que, sin embargo, la familia $\mathcal{B}_2 = \{[a,b[\ :\ \ a,b \in \mathbb{Q},\ \ a < b\}$ es base para una topología que no es la de Sorgenfrey (recuérdese que la topología de Sorgenfrey $\mathcal{T}_{[[}$ en $\mathbb{R}$ es la generada por la base $\mathcal{B}_3 = \{[a,b[\ :\ a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$).

2. Encontrar un ejemplo de una topología que no sea ni la discreta ni la trivial en la que los conjuntos abiertos coincidan con los conjuntos cerrados.

3. Demostrar que la clase de los intervalos cerrados $[a,b]$, donde a y b son racionales y $a < b$ no es base de una topología en $\mathbb{R}$. Probar que, sin embargo, la clase de los intervalos cerrados $[a,b]$ donde a es racional, b es irracional y $a < b$ sí es base de una topología en $\mathbb{R}$.

4. Sea $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_u$ la base de los intervalos abiertos acotados de la topología usual e $\mathcal{I}$ la familia de todos los subconjuntos de números irracionales. Sea $\mathcal{T}$ la topología generada por $\mathcal{B}_u \cup \mathcal{I}$. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, encontrar la adherencia del conjunto $]0, \sqrt{2}[$ y el interior del conjunto $[0, \sqrt{2}]$.

5. Si x es un número real y n un número natural, definimos $B_n^x = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < 1/n \quad \text{ó} \quad y > n\}$. Demostrar que $\mathcal{B} = \{B_n^x : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\ \}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$ y comparar ésta con la topología usual. Hallar la adherencia en dicha topología de los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

6. Sea $A =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup [\sqrt{2}, 3[\cup \{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\ \} \cup \{0\}$. Hallar $\operatorname{int} A$, $\overline{A}$ y A' en las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}$:

(i) La usual.
(ii) La cofinita.
(iii) $\mathcal{T}_{[[}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a,b[\ :\ a,b \in \mathbb{R}\}$).
(iv) La que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a,b[\ :\ a,b \in \mathbb{Q}\}$.
(v) $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{]-\infty, a[\ :\ a \in \mathbb{R}\}$).

7. La frontera de un conjunto $A \subset X$ se define como $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Demostrar que:

(i) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$.
(ii) $\operatorname{Fr} A = \emptyset$ si y sólo si A es simultáneamente abierto y cerrado.
(iii) Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ entonces $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$.

8. Demostrar las siguientes afirmaciones cuando sean ciertas para cualquier espacio topológico X y, cuando no lo sean, encontrar un contraejemplo.

(i) Para cada $A \subset X$ se tiene que $\operatorname{int}(\operatorname{Fr} A) = \emptyset$.
(ii) Si $A \neq \emptyset$ es cerrado y $\operatorname{int} A = \emptyset$, existe B tal que $A = \operatorname{Fr} B$.
(iii) Si $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ entonces $\operatorname{int}(\overline{A}) \neq \emptyset$.
(iv) Para cada $A \subset X$, $\overline{A} = \overline{\operatorname{int} A}$.
(v) Si $A \cap \operatorname{Fr}(A) = \emptyset$ entonces A es abierto.
(vi) Si X es Hausdorff, para cada $A \subset X$, el conjunto A' es cerrado
(vii) Si $x \notin A'$ entonces $x \notin (\overline{A})'$.

9. Demostrar que si A es abierto entonces $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. ¿Y si no lo es?

10. Demostrar que si $A \cup B = X$ entonces $\overline{A} \cup \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(A) \cup \overline{B} = X$.

11. Si un espacio topológico Hausdorff tiene un número finito de elementos, ¿cuál es su topología ? Deducir una caracterización para los espacios métricos con un número finito de elementos que venga expresada en términos de su topología .

12. Demostrar que si $\operatorname{Fr} A = B$ y $\operatorname{Fr} B = A$ entonces $A = B$.

13. Sea $(X, <)$ un espacio totalmente ordenado. La topología del orden $\mathcal{T}_<$ se define como la que está generada por la colección $\{]\leftarrow, a[\,:\, a \in X\} \cup \{]b, \rightarrow[\,:\, b \in X\}$. Si $A =]a, b[$, calcular $\operatorname{int} A$, $\overline{A}$, A' y $\operatorname{Fr} A$. Demostrar que dicha topología es Hausdorff. Sea $X = [1, 2[\cup [3, 4]$ con la topología del orden. ¿Es la sucesión $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ convergente? Calcular $\operatorname{Fr}[1, 2[$.