TOPOLOGÍA

(La Topología de segundo no es tan difícil)

Versión revisada. Año 2002

Estas notas son una versión ligeramente revisada del original fechado el 9 de septiembre de 1999. Verdaderamente los únicos cambios son el formato de los dibujos, la supresión del prefacio (que claramente había caducado) y la corrección de las pocas erratas detectadas. Aparte de ello, las notas han permanecido igual preservándose incluso la paginación.

Índice

1. Espacios Métricos

¿Cuál es la diferencia entre cerca y lejos?

"Ahora estoy cerca", "Ahora estoy lejos". Así nos lo explicaba *Coco* en *Barrio Sésamo* al tiempo que se situaba a menor o mayor distancia de la cámara. Desde luego que nosotros, para hacer Matemáticas, tenemos que concretar nuestra intuición en números, letras y funciones, así que como primera aproximación convendremos que la distancia es una función que a cada par de objetos distintos (por ejemplo, la cámara y *Coco*) le asigna un número real positivo (su "separación"). Sin embargo basta considerar unos ejemplos para concluir que esta función no puede ser arbitraria. Por ejemplo, si pudiéramos definir la distancia $d(x,y) = |x-2y|$ en el conjunto de números reales, ocurrirían cosas demasiado raras para que las permitamos: La distancia entre 100 y 50 sería cero pero la de 50 a 100 sería 150, es decir, 100 estaría muy cerca, infinitamente cerca, de 50, pero 50 estaría lejos de 100. Y si pudiéramos tomar $d(x,y) = (x-y)^2$ resulta que para ir de 0 a 2 tendríamos que caminar 4 unidades pero si vamos de 0 a 1 y después de 1 a 2 caminamos menos, ya que $d(0,1)+d(1,2) = 2$ pero ¿cómo puede tardar menos el autobús cuantas más paradas haga? Estas dificultades sugirieron a los matemáticos de principios del siglo XX, especialmente a M. Fréchet, la siguiente definición general y rigurosa que se ajusta a las necesidades intuitivas y matemáticas y evita casos extraños como los anteriores.

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto. Se dice que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ define una distancia (o métrica) en X si se cumplen las propiedades

1) $d(x,y) \ge 0$ con igualdad si y sólo si $x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ (Desigualdad triangular).

En estas condiciones, se dice que el par (X,d) es un espacio métrico.

Notación: Con el abuso de notación obvio, muchas veces se dice que X, en vez de (X,d), es un espacio métrico si se da por supuesto cuál es la distancia d. Por otra parte, cuando se habla de una función definida en el espacio métrico (X,d) uno se refiere a una función definida en X, pero queriendo hacer énfasis en que se va a utilizar la distancia d (por ejemplo para estudiar la continuidad).

Ejemplo-definición: La distancia más común en $\mathbb{R}$ es la definida por $d(x,y) = |x-y|$ y se llama distancia usual.

Es fácil comprobar todas las propiedades. La desigualdad triangular se vuelve tan obvia como $|a+b| \le |a| + |b|$ tomando $a = x-y$, $b = y-z$.

Ejemplo-definición: En $\mathbb{R}$ hay infinidad de distancias posibles. Aunque pudiera extrañar a Cervantes, la más tonta es la distancia discreta, llamada así porque separa igualmente cada par de puntos, y está definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \ne y. \end{cases}$$

Ejemplo: La distancia usual se generaliza a $\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = ||\vec{x}-\vec{y}||.$$

Si uno prefiere ser menos sintético,

$$d\big((x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)\big) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots(x_n-y_n)^2}.$$

Comprobar las propiedades 1) y 2) es trivial, pero probar 3) es realmente difícil sin conocer la llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz(-Buniakowski)

$$\big(\sum_{i=1}^n a_ib_i\big)^2 \le \sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2, \qquad \text{esto es,} \qquad (\vec{a}\cdot\vec{b}\,)^2 \le ||\vec{a}||^2\cdot||\vec{b}||^2.$$

Dándola por supuesto, demostrar la desigualdad triangular para esta distancia se reduce al truco anterior de escribir $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$. Tras elevar al cuadrado y efectuar algunas simplificaciones, la triangular es equivalente a Cauchy-Schwarz.

Por razones de completitud damos aquí una demostración de esta última desigualdad. Para cualquier $x\in\mathbb{R}$ y suponiendo $\vec{b}\ne\vec{0}$, se tiene

$$0\le ||\vec{a}-x\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 - 2x\,\vec{a}\cdot\vec{b} + x^2||\vec{b}||^2 = \big(||\vec{b}||x - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||}\big)^2 + \frac{||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{||\vec{b}||^2}.$$

Tomando $x = \vec{a}\cdot\vec{b}/||\vec{b}||^2$ se obtiene $0\le ||\vec{a}||^2\cdot||\vec{b}||^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.

Ejemplo: En cualquier conjunto, por raro que sea, se puede definir la distancia discreta, con la misma definición dada en $\mathbb{R}$. En $X=\{\odot,\ominus,\otimes\}$ se tendría

$$d(\odot,\odot)=0, \qquad d(\ominus,\ominus)=0, \qquad d(\otimes,\otimes)=0$$
$$d(\odot,\ominus)=1, \qquad d(\odot,\otimes)=1, \qquad d(\ominus,\otimes)=1.$$

Ejemplo: Dados dos mensajes de la misma longitud se define su *distancia de Hamming*, d_H, como el número de letras correspondientes desiguales (¿por qué es una distancia?). Por ejemplo

$$d_H(\text{No quiero verte más}\,,\ \text{Yo quiero verte más}) = 1$$

de modo que distancia pequeña no implica significados parecidos, lo que puede llevar a graves confusiones. Para evitar errores en la transmisión, sobre todo si el canal no es muy fiable, se intenta aumentar la distancia de Hamming de mensajes parecidos. La forma más obvia, empleada por muchas madres y pedigüeños, es repetir varias veces el mensaje; otra manera consiste en añadir alguna nueva letra obtenida a partir de las otras con alguna operación sencilla (el *byte* de paridad en informática). Métodos matemáticos mucho más complicados de la Teoría de Códigos, permiten detectar y corregir cientos de miles de errores cuando oímos un disco compacto (véase en la hemeroteca: J.H. van Lint "*Mathematics and the Compact Disc*" Nieuw Archief voor Wiskunde 16 N.3 pp. 183-190, 1998).

Ejemplo: En $\mathbb{R}$, $d_1(x,y)=\min(|x-y|,1)$ define una distancia sin embargo $d_2(x,y)=\max(|x-y|,1)$ no la define.

Es evidente que d_2 no cumple la primera propiedad porque $d_2(x,x) \neq 0$. Por otro lado, la única propiedad que no es obvia para d_1 es la triangular. Si $|x-y| \geq 1$ ó $|y-z| \geq 1$ entonces $d_1(x,z) \leq d_1(x,y)$ o $d_1(x,z) \leq d_1(y,z)$ con lo cual se satisface. En otro caso, si $|x-y| < 1$ y $|y-z| < 1$, se tiene

$$d_1(x,y) + d_1(y,z) = |x-y| + |y-z| \geq |x-z| \geq d_1(x,z).$$

Veamos un ejemplo muy interesante desde el punto de vista matemático.

Ejemplo: En el conjunto de funciones continuas $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fórmula

$$d(f,g) = \Big(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \Big)^{1/2}$$

define una distancia. Comprobar la propiedad triangular requiere el análogo integral de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\Big(\int_0^1 f(x)g(x)dx \Big)^2 \leq \int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx \cdot \int_0^1 \big(g(x)\big)^2 dx$$

que se prueba de forma similar.

¿Por qué la distancia anterior no define realmente una distancia en el conjunto de *todas* las funciones de cuadrado integrable? (Truco: Considérese una función discontinua igual a una continua en *casi todos* los puntos).

Como anticipo de la teoría que se creará alrededor de esta distancia en cursos superiores, consideremos las funciones

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad \text{con } g_n(x) = \frac{\cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2}.$$

Ambas funciones son continuas en $[0,1]$. Despreocupándonos de cuestiones de convergencia, podemos efectuar $|f-g|^2$ y reordenar el resultado de la siguiente forma:

$$|f-g|^2 = \sum_n \sum_{m \neq n} (g_n g_m) + 2 \sum_n (g_n^2 - g_n f) + (f^2 - \sum_n g_n^2).$$

Cada uno de los paréntesis tiene integral nula (para los dos primeros bastan métodos de integración elemental y en el tercero se usa además la fórmula $\sum (\pi n)^{-4} = 1/90$ probada por L. Euler). Por tanto $d(f,g) = 0$ y hemos demostrado

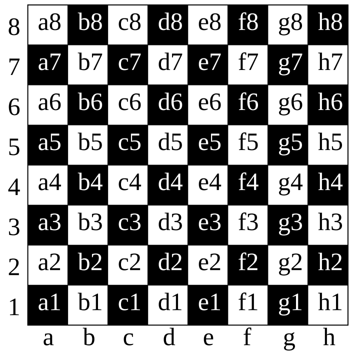
$$x^2 - x + \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Imitando a Euler, podemos distraernos sustituyendo algunos valores racionales sencillos para obtener la suma de algunas series de aspecto impresionante.

Esta fórmula no es más que la punta de iceberg de un hecho importantísimo en Física y Matemáticas: "Toda onda (función) se puede obtener como superposición de tonos fundamentales (senos y cosenos)".

Por último, veamos un ejemplo anecdótico.

Ejemplo: Sea X el conjunto de casillas de un tablero de ajedrez que nombraremos con la notación algebraica usada habitualmente por los ajedrecistas, según se muestra en el dibujo. La torre, el caballo, la dama y el rey definen sendas distancias en X que denotaremos por d_T, d_C, d_D y d_R respectivamente. Éstas vendrán definidas por el número mínimo de movimientos que debe emplear la pieza seleccionada para trasladarse entre dos casillas dadas.



La torre y la dama son piezas de acción a larga distancia

$$d_T(a1, f8) = d_D(a1, f8) = 2.$$

El caballo bastante ágil al esquivar obstáculos pero se cansa en trayectos largos

$$d_C(a1, f8) = 4.$$

Y el rey es demasiado viejo

$$d_R(a1, f8) = 7.$$

El alfil no define una distancia en X porque sólo puede acceder a la mitad de las casillas ($d_A(a1, a2) =?$) pero sí la define en X_1 =cuadros blancos o en X_2 =cuadros negros. En X_2 se tendría

$$d_A(a1, f8) = 2.$$

Los anteriores ejemplos parecen indicar que en todas partes hay definidas distancias. Frases como *Soy tan alto como mi hermano*, *Tu ADN* (¿asociación nacional de disléxicos?) *se parece al de tus padres*, *El ovni pasó a diez metros de mi barco*...se pueden expresar en términos de distancias en espacios de personas, cromosomas u objetos volantes y flotantes. Esto no debiera extrañarnos, porque casi todas las cosas perceptibles, por fantasmagóricas que sean, guardan relaciones de cercanía con el resto de los objetos. Una distancia es una manera relativa de situar los objetos, una forma leve de coordenadas.

Aunque el mismo San Dionisio entrara con su cabeza en las manos, tendría que entrar por la derecha, marcharía entre los estantes dedicados a la literatura francesa y la mesa reservada a las lectoras. Y si no tocara tierra, si flotara a veinte centímetros del suelo, su cuello ensangrentado estaría exactamente a la altura del tercer estante de libros. De modo que esos objetos sirven por lo menos para fijar los límites de lo verosímil.

En los sucesivo necesitaremos considerar simultáneamente todos los puntos que están suficientemente cerca, a menos de una distancia dada, de otro punto dado. Con la distancia usual estos puntos definen un intervalo (en $\mathbb{R}$), un círculo (en $\mathbb{R}^2$), una esfera (en $\mathbb{R}^3$),...

DEFINICIÓN: Si (X, d) es un espacio métrico, se llama <u>bola abierta</u> centrada en $x \in X$ y de radio $\epsilon > 0$ al conjunto

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < \epsilon\}.$$

Análogamente, se llama <u>bola cerrada</u> centrada en $x \in X$ y de radio $\epsilon > 0$ al conjunto

$$\overline{B}(x, \epsilon) = \{y \in X \ : \ d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

Observación: Curiosamente, las bolas cerradas tendrán en este curso una importancia secundaria con respecto a las abiertas.

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ se tiene

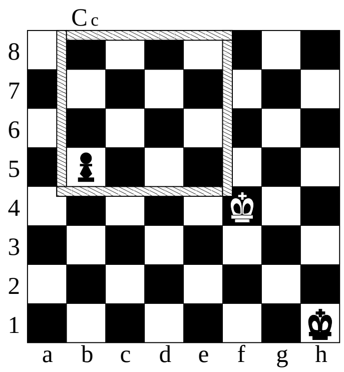
$$
\begin{aligned}
B(0,1/2) = \overline{B}(0,1/2) = \{0\} &\qquad \text{Con la distancia discreta.}\\
B(0,1/2) = (-1/2,1/2) &\qquad \text{Con la distancia usual.}\\
\overline{B}(0,1/2) = [-1/2,1/2] &\qquad \text{Con la distancia usual.}\\
B(0,1/2) = \overline{B}(0,1/2) = \mathbb{R} &\qquad \text{Con la distancia } d(x,y) = \min(|x-y|, 0'2).
\end{aligned}
$$

Para simular que las Matemáticas sirven para algo, veamos una ilustración de estos conceptos aplicable a finales de ajedrez.

Si un peón está a n casillas de su casilla de coronación, C_c y el rey contrario está en la casilla C_R, en ausencia de otras piezas, ¿cuándo puede evitar la coronación? Obviamente, con el lenguaje anterior, esto ocurrirá cuando en el espacio (X, d_R) se tenga

$$C_c \in \overline{B}(C_R, n).$$

Estudiando la forma de las bolas cerradas en el espacio (X, d_R) (lo cual es un ejercicio sencillo) se deduce la siguiente regla, llamada *regla del cuadrado*, bien conocida por los ajedrecistas para ciertos finales rey-peón-rey: "Un peón puede coronar sin la ayuda de su rey si y sólo si el rey opuesto no está incluido en un cuadrado cuya arista está limitada por el peón y la casilla de coronación".



Si el turno es de las blancas sólo el movimiento $f4-e5$ evita la coronación al ingresar el rey en el cuadrado. Si el turno es de las negras llegan a coronar porque el rey no puede entrar en el cuadrado.

Si el rey ayuda al peón la teoría es mucho más compleja. Por ejemplo, con turno de las blancas, rey blanco en $d4$, rey negro en $d6$ y peón blanco en $c3$ es tablas, pero con el peón en $c2$ es victoria. ¿es posible exponer elegantemente la teoría de finales rey-peón-rey usando d_R? Quizá hasta sea interesante.

Para terminar esta primera sección, un pequeño digestivo para tragar este curso y los venideros:

La variedad de ejemplos sugiere que una gran ventaja de los espacios métricos así como de otras estructuras (grupos, anillos, módulos, espacios vectoriales, cuerpos, topologías,...) que se han visto y verán en la Licenciatura de Matemáticas, es la generalidad. Cualquier teorema que hagamos se transforma en infinitos, uno por cada ejemplo. Así la *regla del cuadrado* corresponde a la *regla del círculo* para dos ratones igual de veloces que corren en $\mathbb{R}^2$ hacia el mismo queso, o una consecuencia del "Teorema de Lagrange" en Teoría de Grupos nos dice que $(7^{12}-1)/13 \in \mathbb{Z}$ si lo aplicamos en $\mathbb{Z}_{13}^*$ mientras que en el cubo de Rubik se traduce en que ninguna serie de movimientos aplicada 13 veces vuelve a la posición inicial. Paradójicamente, también es la generalidad una desventaja, porque los teoremas deben ser lo suficientemente débiles para que se cumplan en tableros de ajedrez y en $\mathbb{R}^n$.

En esta tensión dinámica entre lo particular y lo general burbujean las estructuras matemáticas que se han multiplicado en los últimos 150 años, tratando de no quedarse en el fondo conteniendo un solo átomo ejemplo y de no ascender demasiado hasta evaporarse en nada.

Muy, muy cerca: Continuidad y convergencia

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en a si valores muy, muy cercanos a a se transforman en valores muy, muy cercanos a $f(a)$. Dicho de otro modo, por muy exigentes que seamos con lo pequeña que deba ser la distancia entre $f(x)$ y $f(a)$ siempre la podemos reducir imponiendo que x esté suficientemente cerca de a. Se recuerda aquí la definición rigurosa:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta\ :\ |x-a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

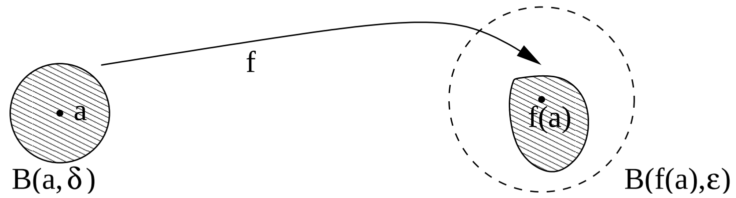
En $\mathbb{R}$ medimos habitualmente cerca y lejos con $d(x, y) = |x-y|$, así cuando cambiamos nuestra forma de medir, parece lógico generalizar esta definición de la forma siguiente:

Definición: Sean (X_1, d_1), (X_2, d_2) espacios métricos. Se dice que $f : X_1 \longrightarrow X_2$ es continua en $a \in X_1$ si

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta\ :\ d_1(x, a) < \delta\ \Rightarrow\ d_2(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Un poco más abreviadamente se puede escribir

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta\ :\ f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon).$$



De la misma forma se puede generalizar el concepto de convergencia, que para sucesiones reales es

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{Z}^+\ :\ n > N\ \Rightarrow\ |x_n - l| < \epsilon.$$

Definición: Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico (X, d) converge a $l \in X$, si

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{Z}^+\ :\ n > N\ \Rightarrow\ x_n \in B(l, \epsilon).$$

Notación: Se suele escribir $x_n \to l$, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ o $\lim x_n = l$ y se dice que l es el límite de la sucesión considerada.

A los que se hayan caído de espaldas con el simbolismo fanático usado en esta sección, quizá les ayude a incorporarse la siguiente traducción de la definición anterior: "Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico (X, d) converge a $l \in X$, si dado $\epsilon > 0$ existe un número natural, N, tal que

$$d(x_n, l) < \epsilon$$

para todo $n > N$". Geométricamente, $x_n \in B(l, \epsilon)$ para todo $n > N$.

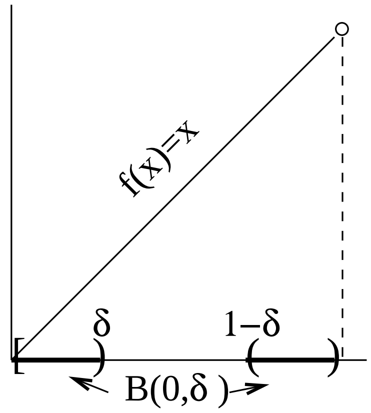
Evidentemente los conceptos de continuidad y convergencia dependen de la distancia escogida.

Ejemplo: Sean $d(x, y) = |x - y|$ y $d_*(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$. Ambas son distancias en $X = [0, 1)$. La función inclusión, $f(x) = x$ es continua considerada como

$f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$ (esto es obvio porque d es la distancia usual), pero no lo es considerada como $f : (X, d_*) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$. Concretamente, vamos a ver que f no es continua en $a = 0$. Para ello basta comprobar (pensarlo unos momentos)

$$\forall \delta > 0 \ \exists x \in X \text{ tal que } d_*(x, 0) < \delta \text{ pero } d(x, 0) \geq 0'1.$$

Volverlo a pensar: queremos elegir $\epsilon = 0'1$ y ver que para ningún δ se cumple $f(B(0, \delta)) \subset f(B(0, 0'1))$. Tomando $x \in (1 - \delta, 1) \cap [0'1, 1)$ se tiene que $d_*(x, 0) < \delta$ y sin embargo $d(x, 0) = |x - 0| = |x| \geq 0'1$. Por tanto f no es continua. Desde luego que $0'1$ no tiene poderes mágicos, cualquier otro número pequeño es válido.



Lo que ha sucedido es que d_* es una distancia muy rara en $[0, 1)$ para la que los números de la forma $0'00\ldots$ están muy próximos a los de la forma $0'99\ldots$ y por ello, para que una función sea continua tiene que valer casi lo mismo en ellos. Por ejemplo $f(x) = x(1 - x)$ sí sería continua como función $f : (X, d_*) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$.

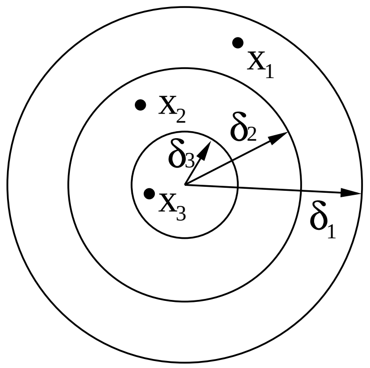
Estos comentarios y lo que sabemos de un primer curso de cálculo nos hacen sospechar nuestro primer resultado de este curso.

Proposición 1.1: *Sea $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$ una función entre espacios métricos. La función f es continua en $x \in X_1$ si y sólo si para toda sucesión x_n convergiendo a x se cumple que $f(x_n)$ converge a $f(x)$.*

Dem.: $\Rightarrow$) Queremos demostrar que $f(x_n) \to f(x)$ sabiendo que f es continua y que $x_n \to x$.

Dado cualquier $\epsilon > 0$, por la definición de continuidad sabemos que existe $B(x, \delta)$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$. Como x_n converge, para $n > N$ se tiene que $x_n \in B(x, \delta)$, y por consiguiente $f(x_n) \in B(f(x), \epsilon)$, esto es, $f(x_n) \to f(x)$.

$\Leftarrow$) Suponiendo que f no es continua en x queremos hallar una sucesión $x_n \to x$ tal que $f(x_n)$ no converja a $f(x)$.



Si f no es continua en x entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ $f(B(x, \delta)) \not\subset B(f(x), \epsilon)$. Tomemos $\delta = \delta_1 = 1$ y x_1 tal que $x_1 \in B(x, \delta_1)$ pero $f(x_1) \notin B(f(x), \epsilon)$. Tomemos, en general, $\delta = \delta_n = \min(d(x, x_{n-1}), 1/n)$ y $x_n \in B(x, \delta_n)$ con $f(x_n) \notin B(f(x), \epsilon)$. Desde luego que se tiene $x_n \to x$ pero como, $f(x_n)$ no pertenece a la bola $B(f(x), \epsilon)$, $f(x_n)$ no converge a $f(x)$. ■

Quizá el lector se pregunte por qué no hemos escogido simplemente $\delta_n = 1/n$ en la demostración anterior, si es así, que trate de responderse.

Ejemplo: Una de las funciones "más discontinuas" que conocemos es la función de Dirichlet, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Usando la distancia usual se tiene que $x_n = \sqrt{2}/n \to x = 0$ sin embargo $f(x_n) = 0 \not\to f(x) = 1$, por tanto f no es continua en $x = 0$, de hecho no lo es en ningún punto. No obstante, con la distancia

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{si } x - y \in \mathbb{Q} \\ 1 + |x - y| & \text{si } x - y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

el contraejemplo anterior no vale ya que $x_n \not\to 0$, porque con esta distancia la bola $B(0, 0'1)$ no contiene a ninguno de los x_n. Como toda sucesión $x_n \to 0$ debe ser racional a partir de cierto término (ejercicio), la proposición asegura que f es continua en cero. Lo mismo se aplica al resto de los puntos.

¿Pero es la función de Dirichlet continua o no? Aunque hemos visto que no hay respuesta posible, si hubiéramos preguntado al profesor de Cálculo del curso pasado nos habría contestado con un rotundo "no". Esta paradoja se explica porque habitualmente se supone la hipótesis natural de que se emplea la distancia usual. En otros contextos podemos no considerarla conveniente y refutar o probar la continuidad a nuestro antojo.

> *Bueno, sí, pudo hacer todo esto, pero no está probado; comienzo a creer que nunca se puede probar nada. Son hipótesis honestas que explican los hechos, pero veo tan bien que proceden de mí, que son simplemente una manera de unificar mis conocimientos.* [...] *Lentos, perezosos, fastidiados, los hechos se acomodan en rigor al orden que yo quiero darles; pero éste sigue siéndoles exterior. Tengo la impresión de hacer un trabajo puramente imaginativo.*

La continuidad y convergencia son conceptos básicos en Análisis Matemático que cuando se extienden a espacios de funciones dan lugar a conceptos tan importantes como la convergencia uniforme.

Para ilustrar la situación supongamos que cierta sucesión de funciones, f_n, "converge" a f en el sentido de que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in [0, 1],$$

si hubiera justicia en el mundo debiera tenerse, para funciones integrables,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f.$$

Pues bien, esto no es cierto: basta tomar $f \equiv 0$ y como f_n la función que vale n en $(0, 1/n]$ y cero en el resto. Ni siquiera f tiene por qué ser continua si las f_n lo son, como observó por primera vez N.H. Abel en 1826 (si alguien ha conseguido sobreponerse a "Oliver Twist" y a "Corazón" que lo intente con la biografía de este matemático). Los libros afirman que esto ocurre porque la convergencia no es uniforme, y eso es lo mismo que decir que si usáramos la distancia $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$ para definir la convergencia todo iría bien. Para la integración en intervalos infinitos la situación sigue siendo complicada. ¿Dónde está el error en el siguiente razonamiento?

El cambio $x = t/n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ implica

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t/n)}{t} dt,$$

además el valor de la integral es $\pi/2$ porque lo dice la página 109 de Tsipkin & Tsipkin "*Fórmulas Matemáticas*" Ed. Mir, 1988; entonces

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t/n)}{t} dt = \int_0^\infty \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(t/n)}{t} dt = 0.$$

Como consuelo frente a la difícil relación entre convergencia e integración tenemos que las operaciones habituales: suma, resta, multiplicación y división (con divisor no nulo) conservan la continuidad de las funciones de un espacio métrico en $\mathbb{R}$ (con la distancia usual). La demostración es idéntica a la vista en un primer curso de Cálculo para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Otro concepto relativo a la convergencia de importancia en Análisis es la completitud (¿incluirán alguna vez esta palabra en el diccionario?). Esencialmente lo que se quiere exigir es que cualquier sucesión cuyos términos se *amontonen* tengan un límite.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio métrico (X,d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente, esto es,

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Desde el punto de vista topológico, la compacidad, que definiremos y estudiaremos en un próximo capítulo, es una propiedad más fuerte y más natural, así que aquí no comprobaremos la completitud de ningún espacio y nos limitaremos a establecer un conocido resultado, probado en 1922 por S. Banach, y dar un ejemplo sin profundizar en los detalles.

Teorema 1.2: (de la aplicación contractiva) *Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $f : X \longrightarrow X$ una función contractiva (esto es, tal que existe $0 < C < 1$ con $d(f(x), f(y)) \le C\, d(x,y)$ para $x, y \in X$), entonces para cualquier $x_0 \in X$ la sucesión*

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad x_4 = f(x_3), \quad \ldots\ldots$$

converge al único punto de X que queda fijo por f.

Dem.: Si existe un punto fijo debe ser único, porque si hubiera dos, digamos x e y, $d(x,y) \le C\, d(f(x), f(y)) = C\, d(x,y)$ lleva a que coinciden.

Si $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge, entonces $x = \lim x_n$ debe ser el punto fijo porque

$$d(f(x), x_{n+1}) \le C\, d(x, x_n)$$

implica, tomando límites, $\lim x_{n+1} = f(x)$ (ejercicio) y por tanto $f(x) = x$.

Como X es completo basta demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y la convergencia estará asegurada. Sean $n, m \in \mathbb{Z}^+$, digamos $n \geq m$ con $n = m + k$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) =& d((f \circ \overset{n)}{\cdots} \circ f)(x_0), (f \circ \overset{n)}{\cdots} \circ f)(x_k)) \leq C^n d(x_0, x_k) \\ \leq& C^n (d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{k-1}, x_k)) \qquad \text{(Desig. triang.)} \\ \leq& C^n d(x_0, x_1)(1 + C + C^2 + C^3 + \ldots) \\ \leq& \frac{C^n}{1 - C} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Así pues $d(x_n, x_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$ y la sucesión es de Cauchy. ■

Ejemplo: Si en una calculadora de bolsillo, en modo $\boxed{\text{Rad}}$, escribimos un número real entre 2 y 4 y pulsamos la secuencia $\boxed{+}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{=}$ repetidas veces, el resultado se acercará increíblemente rápido a una constante bien conocida.

Explicación: $X = [2, 4]$ con la distancia usual es completo ($[a, b]$ lo es, según resultados del cuarto capítulo). La función $f : X \longrightarrow X$ dada por $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ es contractiva porque el teorema del valor medio implica

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq f'(2)|x - y| \leq 0'6|x - y|.$$

Así pues, el teorema anterior asegura que, para $x_0 \in X$, $x_{n+1} = x_n + \operatorname{sen} x_n$ converge al único $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

El teorema de la aplicación contractiva es la base de muchos métodos iterativos en Cálculo Numérico. Además se puede emplear en la demostración de importantes resultados teóricos como el "Teorema de la función inversa". Para apreciar la ya citada ventaja de la generalidad, diremos que aplicado en cierto espacio métrico, cuyos elementos no son puntos sino subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, el teorema anterior se puede usar para aproximar conjuntos de naturaleza fractal con un ordenador. Como ejemplo de uno de ellos, si no hay nada en la *tele* uno puede ocuparse de traducir el siguiente programa en BASIC arcaico a su lenguaje de programación favorito y asombrarse con el resultado.

```
 escala=200.0:x=0.0:y=0.0
for j=1 to 6000
 i=INT(3.0*RND)
  if i=1 then x=x+1.0
  if i=2 then x=x+0.5:y=y+0.866
 x=x/2.0:y=y/2.0
 plot escala*x, escala*y
next j
stop
```

(La función `RND` genera un número aleatorio entre 0 y 1 y el comando `plot` dibuja un punto en la pantalla dadas sus coordenadas). El "límite" del resultado se llama *Triángulo de Sierpiński* y es más misterioso que el de las Bermudas porque, según se dice, no es ni unidimensional ni bidimensional sino que tiene dimensión $\log 3 / \log 2 = 1'58496\ldots$

Un mundo abierto hacia la continuidad

La Topología esencialmente estudia transformaciones que son continuas en todos los puntos, esto es, se centra en la *continuidad global*. Sin embargo la definición de continuidad en espacios métricos habla de la *continuidad local* (en cada punto). Nuestro objetivo en esta sección será eliminar los puntos a y $f(a)$ en la definición de continuidad, transformándola de la siguiente manera:

$$\forall a \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta\ :\ f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\epsilon)$$

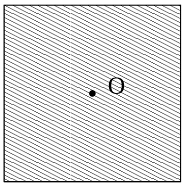
$$\forall a \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta\ :\ B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\epsilon))$$

$$\forall a \in X\ \forall \epsilon > 0\quad f^{-1}(B(f(a),\epsilon)) = \text{conjunto que ``rodea'' al punto } a$$

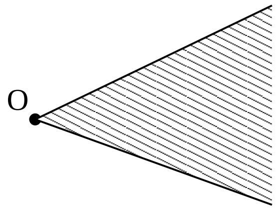
$$\forall a \in X\quad f^{-1}(\text{conjunto que ``rodea'' a } f(a)) = \text{conjunto que ``rodea'' al punto } a$$

$$f^{-1}(\text{conjunto que ``rodea'' todos sus puntos}) = \text{conjunto que ``rodea'' todos sus puntos.}$$

La última definición no involucra puntos particulares: es *global*. ¿Pero qué queremos decir con "rodear" a un punto? Si se ha seguido el razonamiento anterior, quiere decir que existe una bola (abierta) centrada en ese punto y totalmente contenida en el conjunto. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$



"rodea" al origen



no "rodea" al origen

Se llaman *abiertos* a los conjuntos que "rodean" a todos sus puntos y así la definición global de continuidad es simplemente $f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto}$. (Obviamente aquí f^{-1} tiene sentido conjuntista: un punto puede tener varias antiimágenes).

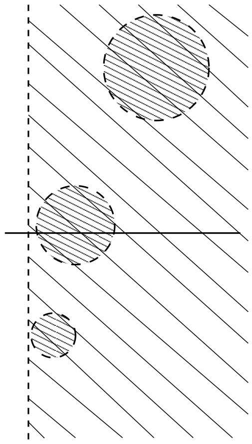
Como siempre, necesitamos aferrarnos al rigor matemático si no queremos caer en el voluble vacío de las opiniones, por lo cual desechamos el término intuitivo "rodear" y escribimos una definición rimbombante de *conjunto abierto* para que no se nos olvide que es lo único que necesitamos.

La mayor parte del tiempo, al no unirse a palabras, mis pensamientos quedan en la niebla. Dibujan formas vagas y agradables, se disipan; en seguida las olvido.

DEFINICIÓN: Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que $\mathcal{U} \subset X$ es un <u>conjunto abierto</u> si para todo $x \in \mathcal{U}$ existe una bola abierta $B(x,\epsilon) \subset \mathcal{U}$. En este caso, también se dice que $\mathcal{U}$ es un <u>entorno</u> (o <u>entorno abierto</u>) de cualquiera de los puntos que contiene.

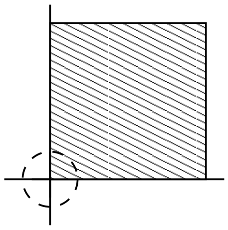
<u>Notación:</u> Normalmente se designan los abiertos genéricos mediante $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, con diferentes subíndices o superíndices. En algunos libros y contextos también se denotan mediante G, que es la inicial de "región" en alemán. Natürlich, ich spreche nicht Deutsch.

Ejemplo: El conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual.

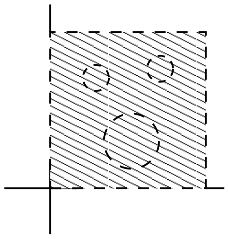


Es fácil demostrarlo. Basta decir que si $P_0=(x_0,y_0)\in A$ entonces la bola $B(P_0,x_0)$ está contenida en A. Un dibujo es suficiente. Como la Topología es a veces muy poco intuitiva, en general, sólo sustituiremos una prueba rigurosa por un dibujo si estamos seguros de que sabríamos escribirla con detalle. (Mini demostración para pesados de que $B(P_0,x_0)\subset A$: $P=(x,y)\in B(P_0,x_0)$ $\Rightarrow (x_0-x)^2+(y_0-y)^2<x_0^2\Rightarrow (x_0-x)^2<x_0^2$ $\Rightarrow x_0-x<x_0\Rightarrow x>0\Rightarrow P\in A$).

Ejemplo: El conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ no es un abierto de $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual. Por ejemplo, ninguna bola abierta centrada en el origen, o en cualquier punto de la frontera, está totalmente contenida en A.



Ejemplo: El conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual.



Ejemplo: $A=\mathbb{Q}$ no es un abierto de $\mathbb{R}$ con la distancia usual, porque cualquier bola centrada en un valor racional contiene necesariamente también valores irracionales.

Cuando trabajamos con la distancia usual, la idea intuitiva de abierto es la de conjunto que no contiene a su frontera, pero con otras distancias nuestra intuición puede desvanecerse. Dejamos al lector las comprobaciones en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: En (X,d) donde d es la distancia discreta, todo subconjunto de X es abierto. Indicación (casi solución): ¿Qué es $B(x,1/2)$?

Ejemplo 2: En cualquier espacio métrico, (X,d) las bolas abiertas son conjuntos abiertos. Indicación: No es trivial. Si no se usa la desigualdad triangular está mal.

Ejemplo 3: En cualquier espacio métrico, (X,d) el complementario de una bola cerrada es un abierto.

Para terminar, enunciemos como teorema nuestro hallazgo de esta sección.

Teorema 1.3: *Sea $f : (X_1,d_1) \longrightarrow (X_2,d_2)$ una función entre espacios métricos, entonces f es continua en todo punto si y sólo si para todo abierto $\mathcal{U} \subset X_2$, $f^{-1}(\mathcal{U})$ es también un abierto.*

Dem.:

$\Rightarrow$) Dado $\mathcal{U}$ abierto y $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$ sea $y_0 = f(x_0)$, por la definición de continuidad, para $B(y_0,\epsilon) \subset \mathcal{U}$ existe $B(x_0,\delta)$ tal que $B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B(y_0,\epsilon)) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$, por tanto $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto.

$\Leftarrow$) Sea $y_0 = f(x_0)$. Si la antiimagen de todo abierto es un conjunto abierto, en particular $f^{-1}(B(y_0,\epsilon))$ es abierto, y contiene a x_0, por consiguiente existe $B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B(y_0,\epsilon))$ y por tanto $f(B(x_0,\delta)) \subset B(y_0,\epsilon)$. ■

La definición de continuidad con abiertos tiene ventajas teóricas con respecto a la ϵ-δ. Al ser más sintética permite simplificar muchas demostraciones y, sobre todo, permite generalizar el concepto de continuidad incluso más allá de los espacios métricos.

Más adelante entraremos en el tema, pero por ahora citaremos que la demostración de que la composición de funciones continuas es continua se reduce a

$$(f\circ g)^{-1}(\text{abierto}) = g^{-1}\big(f^{-1}(\text{abierto})\big) = g^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto}.$$

La cual comparada con la demostración que aparece en en cualquier libro de Cálculo de primer curso sugiere, además de revenderlo, la conveniencia de soportar este pequeño torbellino de abstracción para disfrutar después de la brisa de la sencillez.

Necesito limpiarme con pensamientos abstractos, transparentes como el agua.

Como ilustración de la naturalidad del lenguaje de los abiertos, incluso en el contexto de las funciones reales de toda la vida, mencionaremos un teorema debido a R. Baire: "Dado $A \subset \mathbb{R}$, existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua exactamente en A si y sólo si A es una intersección numerable de abiertos". Por ejemplo

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \bigcup_{a/q\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R} - \{a/q\})$$

implica que existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en los irracionales y discontinua en los racionales (de hecho podemos verla en el "*Calculus*" de M. Spivak, Ed. Reverté 1987). Se puede probar, pero no es fácil a este nivel, que $\mathbb{Q}$ no es intersección numerable de abiertos, así que por mucho que busquemos no encontraremos una función real continua sólo en los racionales.

2. Espacios Topológicos I
(Definición y Construcciones)

Por fin Topología

El desarrollo de la teoría ha extendido el concepto de continuidad más allá de los espacios métricos creando los espacios topológicos. A pesar de que, según parece, en el resto de la licenciatura apenas aparecerán espacios topológicos que no sean métricos, no podemos suprimir su definición a no ser que cambiemos el título de la asignatura.

Como ya hemos visto, para hablar de continuidad basta definir cuáles son los abiertos. ¿Pero cómo hacerlo si no sabemos definir los puntos cercanos a uno dado porque no tenemos una distancia con qué medir? Fijémonos en dos propiedades que satisfacen los abiertos en espacios métricos:

-La unión (arbitraria) de abiertos es un abierto.

-La intersección finita de abiertos es un abierto.

La primera es trivial y la segunda se reduce a observar que la intersección finita de bolas abiertas concéntricas es de nuevo una bola abierta.

Pues bien, matemáticos sesudos (por cierto, J.B. Listing, alumno de Gauss, inventó la palabra *Topología* en 1847) llegaron al convencimiento de que esto es lo único que deberían satisfacer ciertos conjuntos para ser dignos de llamarse abiertos de forma que la definición de continuidad sea natural (al menos para ellos). Además, como los abiertos especifican la continuidad y por tanto la forma, dijeron que formaban una topología (= ciencia de la forma).

DEFINICIÓN: Dado un conjunto, X, se dice que $\mathcal{T}$ es una <u>topología</u> definida sobre X si $\mathcal{T}$ es una colección de subconjuntos de X tales que

$$a)\ \emptyset,\ X \in \mathcal{T}$$

$$b)\ \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}$$

$$c)\ \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \mathcal{U}_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}.$$

Además a los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama <u>abiertos</u> y se dice que el par $(X, \mathcal{T})$ es un <u>espacio topológico</u>.

<u>Notación:</u> Como en el caso de espacios métricos, muchas veces se abrevia $(X, \mathcal{T})$ por X si $\mathcal{T}$ se sobreentiende.

Esta definición es tan rara que merece una disculpa. De nuevo debemos confiar en los matemáticos del siglo XX y creer que salvaguarda nuestra intuición de forma y continuidad. Lo mejor es considerarla como un convenio al que recurrimos cuando queremos comprobar que algo es una topología; igual que un fabricante de reglas debe ir a una copia fidedigna del metro patrón. Por mucho que compliquemos la definición de metro (de 1960 a 1986 fue $1'65076373 \cdot 10^6$ longitudes de onda de la radiación emitida por el isótopo ^{86}Kr en su transición entre los estados $2p_{10}$ y $5d_5$) no debemos olvidarnos de que da igual metros que yardas, lo importante es medir. De la misma forma, a traves de los ejemplos en espacios métricos desarrollaremos cierta intuición con respecto a la definición de espacio topológico y seguramente si supiéramos muchísima Topología diríamos que la forma de definición no es tan importante sino su significado abstracto. De hecho ha habido varias definiciones a lo largo del tiempo (M. Fréchet 1906, F. Hausdorff 1914, C. Kuratowski 1922 ...) y la dada aquí (P.S. Alexandroff 1925) quizá no es la más intuitiva.

> – *Necesito que existas y que no cambies. Eres como ese metro de platino que se conserva en alguna parte, en París o en los alrededores. No creo que nadie haya tenido nunca ganas de verlo.*
>
> – *En eso te equivocas.*
>
> – *En fin, poco importa; yo no. Bueno, me gusta saber que existe, que mide exactamente la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Lo pienso cada vez que me miden un piso o que me venden tela por metros.*
>
> – *¿Ah, sí?* – *digo fríamente.*
>
> – *Pero podría muy bien pensar en ti sólo como en una virtud abstracta, una especie de límite.*

Algunas definiciones dan prioridad al concepto de complementario de un abierto.

DEFINICIÓN: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que $F \subset X$ es un cerrado, si su complementario es abierto, esto es, $X - F \in \mathcal{T}$.

Observación: De la definición de topología se deduce que la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado y que la unión finita de cerrados es un cerrado. La notación "F" viene de la inicial de "cerrado" en francés. Je ne parle Français non plus.

Ejemplo-definición: Se llama topología discreta sobre X, $\mathcal{T}_{dis}$ a la formada por todos los subconjuntos de X. Por ejemplo, si $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\mathcal{T}_{dis} = \big\{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\big\}.$$

Es trivial comprobar que la topología discreta es realmente una topología.

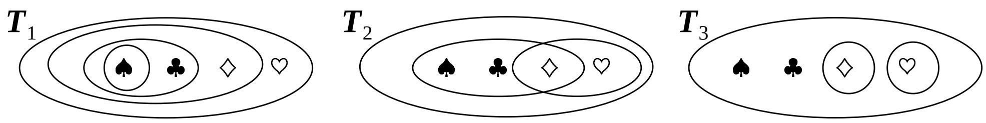
Ejemplo-definición: Se llama topología trivial sobre X a $\mathcal{T}_{tr} = \{\emptyset, X\}$. Es decir, sólo hay dos abiertos (que además son cerrados).

Aunque en ambas sus elementos sean simultáneamente abiertos y cerrados, en cierto sentido estas dos topologías son complementarias: la primera distingue demasiado los elementos de X y la segunda demasiado poco.

Ejemplo: Sea $X = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$. Las colecciones de subconjuntos de X

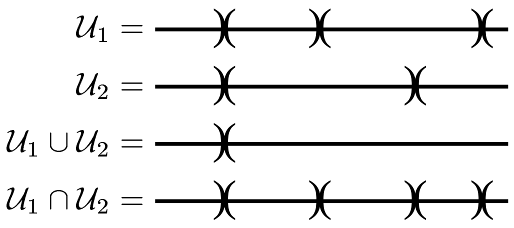
$$\mathcal{T}_1 = \big\{\emptyset, X, \{\spadesuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}\big\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_2 = \big\{\emptyset, X, \{\diamondsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}\big\}$$

son topologías sobre X (comprobarlo) pero $\mathcal{T}_3 = \big\{\emptyset, X, \{\diamondsuit\}, \{\heartsuit\}\big\}$ no lo es porque $\{\diamondsuit\}$ y $\{\heartsuit\}$ son abiertos pero su unión no. Dibujando todos los abiertos con diagramas de Venn:



Ejemplo-definición: En cualquier conjunto, X, se define la topología cofinita como aquella tal que sus abiertos son $\emptyset, X$ y todos los subconjuntos de X cuyo complementario tenga un número finito de elementos. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, $(-\infty, 1)$ no es abierto en la topología cofinita porque su complementario, $[1, +\infty)$ no contiene un número finito de puntos; sin embargo, $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ sí es abierto. La definición nos dice que todos los abiertos, aparte de $\emptyset$ y $\mathbb{R}$, son de la forma $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{N} \{x_n\}$.

Observación: En realidad no hemos demostrado que la topología cofinita es siempre una topología. Es muy fácil demostrarlo comprobando las tres propiedades, pero por si acaso, los siguientes ejemplos para $X = \mathbb{R}$ quizá ayuden:



Observación: Si X es un conjunto finito, todos sus subconjuntos son abiertos con la topología cofinita, por tanto ésta pierde su interés ya que coincide con la discreta.

En una topología la intersección infinita de abiertos o la unión infinita de cerrados no tiene por qué ser un abierto o un cerrado, respectivamente. Por ejemplo, en la cofinita, tomando los abiertos $\mathcal{U}_x = \mathbb{R} - \{x\}$ se tiene

$$\bigcap_{x \in \mathbb{Q}} \mathcal{U}_x = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \notin \mathcal{T}_{cof}.$$

Una manera crear artificialmente una topología es dividir el conjunto en unos cuantos trozos y hacer todas las intersecciones y uniones necesarias para que se satisfaga la definición de topología.

DEFINICIÓN: Se dice que $\mathcal{S}$ es una subbase si es una colección de subconjuntos de X cuya unión es X, y se llama topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ a aquella cuyos abiertos son $\emptyset$ y las uniones (arbitrarias) de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

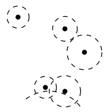
Observación: La demostración de que la topología generada por una subbase es realmente una topología, se reduce a la distributiva para $\cup$ y $\cap$.

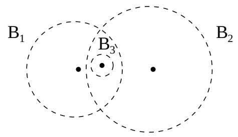
Veamos un ejemplo, pero no insistiremos mucho porque el concepto de subbase no es demasiado relevante aunque la crease N. Bourbaki, el único matemático con varios cerebros.

Ejemplo: En $X = \mathbb{R}$ si imponemos que $\mathcal{U}_1 = (-\infty, 0]$, $\mathcal{U}_2 = (0, 2]$, $\mathcal{U}_3 = [1, +\infty)$, $\mathcal{U}_4 = [2, 3]$, esto es, si consideramos la subbase $\mathcal{S} = \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4\}$ aparecen los abiertos $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 = [1, 2]$, $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_4 = \{2\}$ (las intersecciones de tres o más son vacías) y las uniones de todos ellos.

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, 2], [1, +\infty), [2, 3], [1, 2], \{2\}, (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), [1, 3], (-\infty, 0] \cup \{2\}\}.$$

Para estudiar continuidad y convergencia uno debería saber especificar lo que son los abiertos muy, muy pequeños, por ello se introduce el concepto de base, que es como una subbase en la que podemos empequeñecer los subconjuntos arbitrariamente. Para hacernos una idea intuitiva, podemos visualizar los elementos de la base como las bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$ y las dos propiedades de la definición nos dirán que las bolas abiertas





lo cubren todo y se pueden empequeñecer

Para ser sincero, según fuentes autorizadas, son razones de economía, en el sentido del próximo lema, las que motivan la definición de base, así que el que quiera puede tachar el párrafo anterior aunque su autor lo crea. La racionalidad científica consiste, en gran medida, en inventar justificaciones de todo lo que se dice para sugerir su necesidad.

> *Por ejemplo, ésta es una caja de cartón que contiene mi frasco de tinta. [...] Es un paralelepípedo rectángulo; se recorta sobre..., es estúpido, no hay nada que decir. Eso es lo que hay que evitar, no hay que introducir nada extraño donde no lo hay. Pienso que éste es el peligro de llevar un diario: se exagera todo, uno está al acecho, forzando continuamente la verdad.*

DEFINICIÓN: Dado un conjunto X, se dice que $\mathcal{B}$ es una base si es una colección de subconjuntos de X que satisface

1) $\forall x \in X\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B$

2) $\forall x \in B_1 \cap B_2$, con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Si los elementos de las bases son como las bolas abiertas en espacios métricos, entonces podremos definir los abiertos de igual manera.

DEFINICIÓN: Dada una base $\mathcal{B}$ en X la topología generada por $\mathcal{B}$, es aquella tal que $\mathcal{U}$ es abierto si y sólo si para todo $x \in \mathcal{U}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}$.

Notación-definición: Muchas veces se escribe $\mathcal{U}(x)$ ó $B(x)$ para indicar que $\mathcal{U}$ ó B son entornos de x, esto es, como abreviatura de "$\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tal que $x \in \mathcal{U}$" o "$B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$". Con esta notación las propiedades que definen base se escriben como

$$1)\ \forall x \in X\ \exists B(x) \in \mathcal{B} \qquad 2) \forall B_1(x), B_2(x) \in \mathcal{B}\ \exists B_3(x) \in \mathcal{B} : B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x).$$

El siguiente resultado, para el que no se necesita saber que la topología generada por una base cumple la definición de topología, justifica el nombre de *base*. De alguna forma una base contiene los ladrillos necesarios para construir cualquier abierto.

Lema 2.1: *Dada una base, $\mathcal{B}$, cada uno de sus elementos es abierto en la topología que genera y, de hecho, todo abierto en dicha topología se puede escribir como unión (quizá infinita) de elementos de $\mathcal{B}$.*

Observación: Evidentemente si $\mathcal{T}$ es una topología también es una base y la topología que genera es ella misma. En contra de lo que ocurre en álgebra lineal las bases no son "minimales" con respecto a su cardinal: podemos añadir más elementos y seguir teniendo una base. (*Curiosidad para leer y olvidar*: Al menor cardinal de todas las posibles bases de un espacio topológico se le llama densidad de dicho espacio y, como veremos al final del tercer capítulo, algunos matemáticos se ponen muy contentos cuando pueden probar que la densidad es $\aleph_0$).

Dem.: Tomando $\mathcal{U} = B$, con $B \in \mathcal{B}$, en la definición anterior, se tiene automáticamente que B es abierto. Por otra parte, para cualquier abierto

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B(x) \subset \mathcal{U}$$

y se sigue que las inclusiones se pueden reemplazar por igualdades. ∎

Aunque la notación nos los sugiera como evidente, hay que comprobar que lo generado por una base es una topología.

Proposición 2.2: *La topología generada por una base es realmente una topología.*

Dem.: Comprobaremos ordenadamente las propiedades de la definición de topología.

1) Es trivial.

2) Si $\mathcal{U}_\alpha$ son abiertos en la topología generada por la base $\mathcal{B}$, queremos comprobar que $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$ también lo es. Pero esto es claro porque si $x \in \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ entonces $x \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ para algún α_0, y como $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ es abierto existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset \mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, con lo cual, $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$ es abierto (revisar paso a paso este trabalenguas).

3) Queremos comprobar que la intersección finita de abiertos en la topología generada por la base $\mathcal{B}$ también es abierto. Basta considerar el caso de dos abiertos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ ya que el caso general es idéntico (o se sigue por inducción, si uno quiere ser pedante).

Si $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son abiertos no disjuntos y $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ entonces por la definición de abierto en la topología generada por $\mathcal{B}$, existen $B_1(x), B_2(x)$ tales que $B_1(x) \subset \mathcal{U}_1$, $B_2(x) \subset \mathcal{U}_2$. Así pues, por la segunda propiedad de base existe $B_3(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x) \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ y se sigue que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ es abierto. ∎

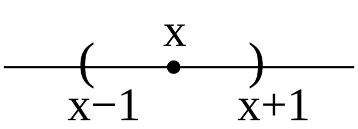
Seguramente es imposible entender todo esto sin algunos ejemplos.

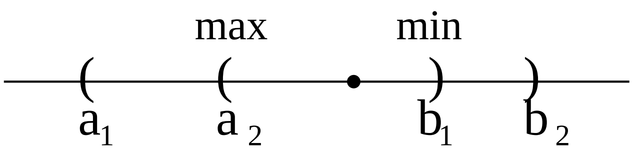
Ejemplo: La colección de todos los intervalos abiertos, $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, es una base en $\mathbb{R}$. Es obvio que los intervalos abiertos lo cubren todo y que se pueden achicar, pero como excusa para practicar con estos conceptos veamos la demostración detallada:

1) $\forall x \in \mathbb{R}\ x \in (x-1, x+1) \in \mathcal{B}_1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}\ x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \ \Rightarrow\ x \in (\max(a_1, a_2), \min(b_1, b_2)) \subset (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$.

De hecho la última inclusión es una igualdad.





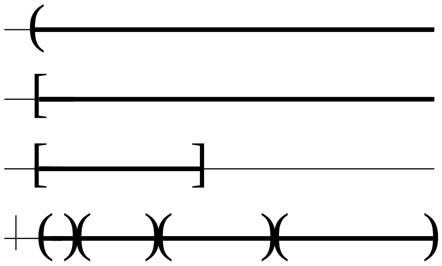
Ejemplo: La colección $\mathcal{B}_2 = \{[a,b) \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}$ es una base en $\mathbb{R}$. La prueba es similar a la anterior.

DEFINICIÓN: A la topología en $\mathbb{R}$ generada por $\mathcal{B}_1$ se le llama topología usual y a la generada por $\mathcal{B}_2$ se le llama topología de límite inferior o topología de Sorgenfrey.

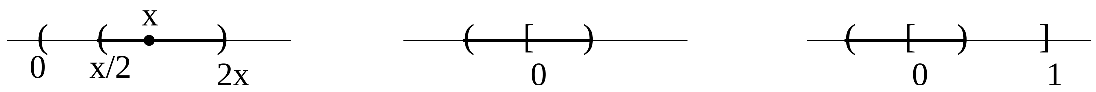
Ejemplo: El conjunto $A = \mathbb{Q}$ no es ni abierto ni cerrado en las topologías usual y de Sorgenfrey, porque no existe ningún intervalo (a,b) ni $[a,b)$, $a < b$, totalmente contenido en $\mathbb{R}$ ni en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Ejemplo: Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A_1 = \{x > 0\}$$
$$A_2 = \{x \geq 0\}$$
$$A_3 = [0,1]$$
$$A_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$$

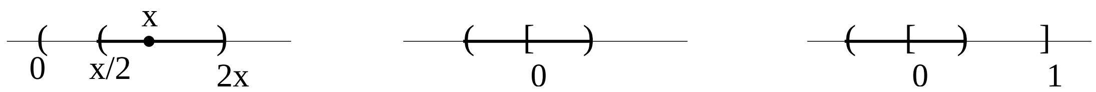


A_1 es un abierto en la topología usual porque si $x \in A_1$ entonces, por ejemplo, $x \in (x/2, 2x) \in \mathcal{B}_1$. Sin embargo A_2 no es abierto porque no existe ningún intervalo (a,b) tal que $0 \in (a,b) \subset A_2$. Lo mismo ocurre con A_3. Tanto A_2 como A_3 son cerrados en la topología usual ya que sus complementarios son abiertos.



A_4 también es abierto en la topología usual. En lugar de dar una "fórmula" para un intervalo que contenga a cada x, simplemente podemos decir que $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}_1$ y por tanto $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es abierto y como la unión de abiertos es un abierto, A_4 también lo es.

Con la topología de límite inferior A_1 y A_2 son abiertos porque $x \in A_1$ (ó $x \in A_2$) implica $x \in [x, x+1) \subset A_1$ (ó $\subset A_2$). Pero A_3 no es abierto porque no existe $[a,b)$ tal que $1 \in [a,b)$ y $[a,b) \subset [0,1]$. De nuevo, A_3 es cerrado.



Según lo anterior, para ver que A_4 es abierto en esta topología basta comprobar que $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es abierto. En general (a,b) es abierto en la topología de límite inferior ya que para cualquier $x \in (a,b)$ se cumple $x \in [x,b) \subset (a,b)$.

De alguna forma los abiertos en la topología usual de $\mathbb{R}$ son aquellos que no contienen a su frontera mientras que los de la topología de límite inferior hacen la "vista gorda" con las fronteras de la izquierda, Por ello hay más abiertos en esta última topología. Demos un nombre a esta situación.

DEFINICIÓN: Dadas dos topologías $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ sobre X, se dice que $\mathcal{T}$ es <u>más fina</u> que $\mathcal{T}'$ (o que $\mathcal{T}'$ es <u>menos fina</u> que $\mathcal{T}$) si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Si además $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, se dice que $\mathcal{T}$ es <u>estrictamente más fina</u> que $\mathcal{T}'$ (o que $\mathcal{T}'$ es <u>estrictamente menos fina</u> que $\mathcal{T}$).

<u>Observación:</u> ¿Hay una errata en la definición anterior? ¿El que inventó esta definición era primo del que llamó cosecante al inverso del seno y secante al del coseno? No, la notación es lógica. Si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T}$ tiene más abiertos que $\mathcal{T}'$, por consiguiente los abiertos de $\mathcal{T}$ serán "más pequeños" y $\mathcal{T}$ distinguirá más. En ese sentido es *más* fina.

Con las bases lo vemos más claro: elementos de la base más pequeños $\Rightarrow$ topología más fina.

Proposición 2.3: *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, sobre X. Entonces*

$$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X \;\forall B'(x) \in \mathcal{B}' \;\; \exists B(x) \in \mathcal{B} \,:\, B(x) \subset B'(x).$$

<u>Dem.</u>:

$\Rightarrow$) Dados $x \in X$ y $B'(x) \in \mathcal{B}'$ con $x \in B'$, queremos hallar $B(x) \in \mathcal{B}$, $B(x) \subset B'(x)$.

Como $B'(x) \in \mathcal{T}'$, entonces $B'(x)$ también es abierto en la topología $\mathcal{T}$, y como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset B'(x)$.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{U}' \in \mathcal{T}'$, queremos demostrar que $\mathcal{U}' \in \mathcal{T}$.

Como $\mathcal{B}'$ es base y $\mathcal{U}'$ es abierto, para todo $x \in \mathcal{U}'$ existe $B'(x) \in \mathcal{B}'$ tal que $B'(x) \subset \mathcal{U}'$ y nuestra hipótesis asegura que existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset B'(x) \subset \mathcal{U}'$, por consiguiente $\mathcal{U}' \in \mathcal{T}$. ∎

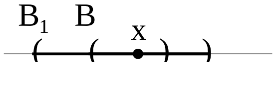
<u>Ejemplo</u>: La topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$ es más fina que la usual porque, como dijimos al final del último ejemplo, para cualquier $x \in (a, b) \in \mathcal{B}_1$ podemos tomar $[x, b) \in \mathcal{B}_2$ y se cumple $x \in [x, b) \subset (a, b)$. De hecho es estrictamente más fina, porque $A_2 = [0, +\infty)$ es abierto en la topología de Sorgenfrey pero no en la usual (también se puede decir que no existe (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset [x, x + 1)$).

Si se prueba que una topología es más y menos fina que otra, obviamente son iguales. Este truco se utiliza muchas veces en combinación con la proposición anterior para demostrar que una base es base de cierta topología dada.

<u>Ejemplo</u>: Comprobar que $\mathcal{B} = \{(a, b) \,:\, b - a \leq 1\}$ es una base de la topología usual. (Por cierto, la comprobación de que $\mathcal{B}$ es una base es similar a la de que $\mathcal{B}_1$ lo es).

Sea $\mathcal{T}_{usu}$ la topología usual (generada por $\mathcal{B}_1$) y sea $\mathcal{T}$ la generada por $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$ y los abiertos son uniones de elementos de la base, se tiene que $\mathcal{T}_{usu}$ es más fina que $\mathcal{T}$. Por otra parte si $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1$ podemos encontrar un intervalo abierto, B, de longitud menor o igual que uno tal que $x \in B \subset B_1$. Basta tomar, por ejemplo, $B = (x - 0'5, x + 0'5) \cap B_1$. Así pues, según la proposición $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}_{usu}$ y se deduce que ambas son iguales.

$$\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{T}_{usu} \supset \mathcal{T}$$



$$\Rightarrow \qquad x \in B \subset B_1 \;\Rightarrow\; \mathcal{T}_{usu} \subset \mathcal{T}$$

Ejemplo: Demostrar que $\mathcal{B} = \{\mathcal{U} : \mathbb{R} - \mathcal{U} \text{ es un subconjunto acotado de } \mathbb{Z}\}$ genera una topología sobre $\mathbb{R}$, digamos $\mathcal{T}$, que es estrictamente menos fina que la cofinita.

Comprobemos primero que $\mathcal{B}$ es de hecho una base:

1) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{n\} \in \mathcal{B}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq x$.

2) $x \in (\mathbb{R} - \{n_1, \dots, n_r\}) \cap (\mathbb{R} - \{m_1, \dots, m_s\}) \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s\} \in \mathcal{B}$.

Desde luego que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{cof}$ así que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{cof}$. Por otra parte, $\mathbb{R} - \{\sqrt{3}\} \in \mathcal{T}_{cof}$ pero no existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset \mathbb{R} - \{\sqrt{3}\}$ así que $\mathbb{R} - \{\sqrt{3}\} \notin \mathcal{T}$ y por tanto $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_{cof}$. Nótese que, de hecho, $\mathcal{T} = \mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

Más ejemplos, por favor

En esta sección veremos varias maneras de crear topologías relevantes. En primer lugar, veamos como fabricar una topología natural en un espacio métrico y así las dos definiciones de abierto que hemos dado (elemento de una topología y ciertos subconjuntos en espacios métricos) coincidirán.

DEFINICIÓN: Dado un espacio métrico (X, d), se llama topología inducida por d o topología métrica a la generada por la base formada por todas las bolas abiertas.

Observación: Comprobar que las bolas abiertas forman realmente una base requiere demostrar que si $x \in B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$ existe $B(x_3, \epsilon_3)$ tal que $x \in B(x_3, \epsilon_3) \subset B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$.

En un dibujo es claro, pero demostrarlo rigurosamente es un poco más difícil excepto para los que hayan hecho un ejercicio anterior. Sólo hay que tomar

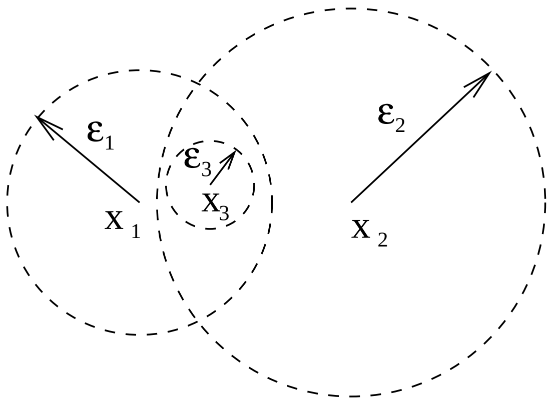
$$x_3 = x$$

$$\epsilon_3 = \min\big(\epsilon_1 - d(x, x_1), \epsilon_2 - d(x, x_2)\big).$$

¿Por qué? Nótese que basta probar

$$B(x, \epsilon_i - d(x, x_i)) \subset B(x_i, \epsilon_i)$$

y esto se puede reducir a la desigualdad triangular.

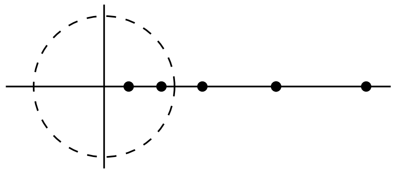


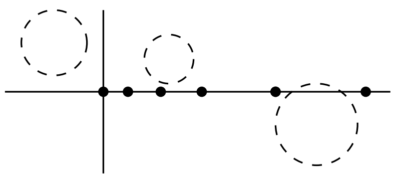
De este modo podemos generalizar la topología usual en $\mathbb{R}$ de la sección anterior.

DEFINICIÓN: Se llama topología usual en $\mathbb{R}^n$ a la inducida por la distancia usual.

Ejemplo: El conjunto $A_1 = \{(1/n, 0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ n \in \mathbb{Z}^+\}$ no es cerrado en la topología usual de $\mathbb{R}^2$ pero $A_2 = A_1 \cup \{(0,0)\}$ sí lo es.

Si A_1 fuera cerrado, $\mathbb{R}^2 - A_1$ sería abierto, y esto no es cierto porque $(0,0) \in \mathbb{R}^2 - A_1$ pero cualquier bola abierta, B, conteniendo al origen contiene también infinitos puntos de A_1; esto es $B \not\subset \mathbb{R}^2 - A_1$. Esta situación no se da en A_2 porque $(0,0) \notin \mathbb{R}^2 - A_2$. Es claro que alrededor de cualquier otro de los puntos de $\mathbb{R}^2 - A_1$ cabe una bola abierta. Podríamos escribir una fórmula para el posible radio de esta bola pero nos aburriríamos.





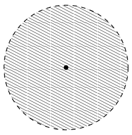
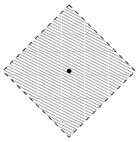
En el ejemplo anterior aparece por primera vez uno de los grandes problemas notacionales de este curso: la notación (a, b) significa simultáneamente el intervalo $\{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$ y el punto (o vector) de $\mathbb{R}^2$ con $x = a$, $y = b$. A pesar de este lío, los puntos y los intervalos son cosas tan diferentes que es difícil encontrar ejemplos sensatos que den lugar a confusión.

<u>Ejemplo</u>: La distancia usual en $\mathbb{R}^2$, d, y la distancia d' definida por

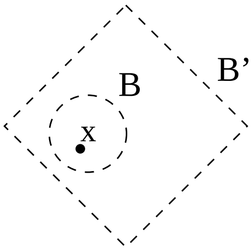
$$d'\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

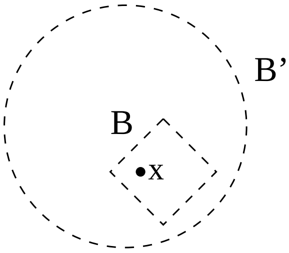
inducen la misma topología en $\mathbb{R}^2$: la topología usual.

Para demostrarlo hay que ver que la topología inducida por d es más y menos fina que la generada por d' y, según la proposición de la sección anterior, esto se reduce a ver que, alrededor de cada punto, las bolas abiertas en $(\mathbb{R}^2,d)$ se pueden meter dentro de las bolas abiertas en $(\mathbb{R}^2,d')$ y viceversa. Como se tiene

bola abierta en $(\mathbb{R}^2,d)$ =  bola abierta en $(\mathbb{R}^2,d')$ = 

Basta decir que un círculo se puede meter dentro de un cuadrado girado alrededor de cualquier punto y viceversa.





De nuevo, si uno se pusiera pesadísimo podría hallar una fórmula para calcular un posible B dados x y B', pero es un poco absurdo en vista de la sencillez del dibujo. Ser riguroso no quiere decir ser un pelmazo ni desdeñar la geometría y demostrar ritualmente las cosas evidentes e irrelevantes sólo conduce al aburrimiento, del cual ya tenemos bastante.

> *Me aburro, eso es todo. De vez en cuando bostezo tan fuerte que las lágrimas me ruedan por las mejillas. Es un aburrimiento profundo, profundo, el corazón profundo de la existencia, la materia misma de que estoy hecho. No me descuido, por el contrario; esta mañana me bañé, me afeité. Sólo que cuando pienso en todos esos pequeños actos cuidadosos, no comprendo cómo pude ejecutarlos; son tan vanos. Sin duda el hábito los ejecuta por mí.*

Dos distancias d y d', como las del ejemplo anterior, tales que d es pequeña cuando d' lo es y viceversa, se dice que son <u>equivalentes</u>; más rigurosamente, lo son cuando para todo $\epsilon,\epsilon'>0$, existen $\delta,\delta'>0$ tales que $d(x,y)<\delta$ y $d'(x,y)<\delta'$ implican, respectivamente, $d'(x,y)<\epsilon'$ y $d(x,y)<\epsilon$. Distancias equivalentes generan la misma topología pero el recíproco no siempre se cumple.

<u>Ejemplo</u>: La topología generada por la distancia discreta es la topología discreta. Para comprobarlo basta notar que con la distancia discreta $B(x,0'5)=\{x\}$, así que cualquier punto es abierto y por tanto, todo es abierto. La distancia obtenida al cambiar 1 por e^x+e^y en la definición de la discreta no es equivalente a ella pero genera la misma topología.

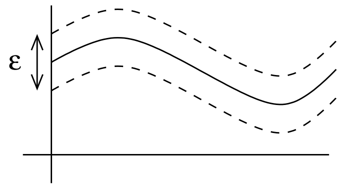
En cualquier espacio métrico (X,d) tal que X sólo tenga un número finito de elementos, tomando ϵ menor que la mínima distancia entre ellos se tiene $B(x,\epsilon)=\{x\}$ y, como antes, la topología inducida por d es la discreta. En particular, las distancias torre, caballo, dama y rey, introducidas en el primer capítulo, inducen la topología discreta en el tablero de ajedrez. En consecuencia, como en un conjunto finito una topología no discreta no es métrica, no todos los espacios topológicos son métricos (¿sabría el lector dar un ejemplo? Es realmente *trivial*) aunque éstos sean los más comúnmente empleados.

<u>Ejemplo</u>: Sea X el conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ y tomemos las distancias

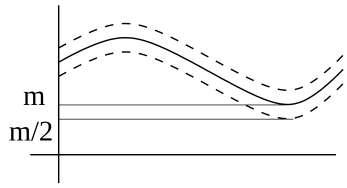
$$d_1(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \,:\, x \in [0,1]\} \qquad \text{y} \qquad d_2(f,g) = \int_0^1 |f-g|.$$

Entonces el conjunto $\mathcal{U} = \{f \in X \,:\, f > 0\}$ es un abierto con la topología inducida por d_1 pero no lo es con la inducida por d_2.

El caso de d_1 es el más fácil porque $B(f,\epsilon)$ no es nada más que el conjunto de funciones con gráfica en una "banda" de radio ϵ alrededor de la de f. Si $f \in \mathcal{U}$ y $m > 0$ es el mínimo de f, entonces $B(f, m/2) \subset \mathcal{U}$ ya que $|f-g| < m/2 \Rightarrow g > f - m/2 > 0$.

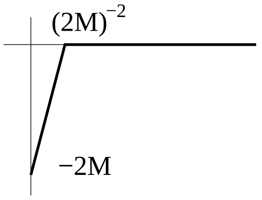


$B(f,\epsilon)$

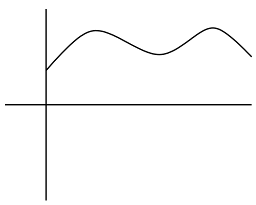


$B(f,m/2)$

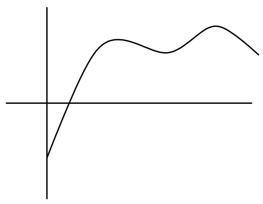
En (X, d_2) las bolas abiertas son muy difíciles de imaginar mediante un dibujo. La idea para probar que $\mathcal{U}$ no es abierto, es que hundiendo una parte muy fina de la gráfica hasta la parte negativa podemos conseguir que la integral apenas varíe. Concretamente, no puede existir $B(f,\epsilon) \subset \mathcal{U}$ porque tomando $g(x) = \min\big(2M(4M^2x-1), 0\big)$ (ver el dibujo) donde M es mayor que ϵ y que el máximo de f, se tiene que $f + g \notin \mathcal{U}$ y sin embargo $d(f+g, f) = \int_0^1 |g| < \epsilon$ (pensarlo hasta que no sea necesario hacer ninguna cuenta).



Gráfica de $g(x) = \min\big(2M(4M^2x-1), 0\big)$



Gráfica de f



Gráfica de $f+g$

Si d define una distancia en un conjunto también la define en cualquiera de sus subconjuntos sin más que restringirla (olvidarse de los puntos entre los que no queremos hallar distancias). Algo parecido podemos hacer en un ámbito más general: si nos quedamos con un trozo de espacio topológico sigue siendo un espacio topológico.

Definición: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subset X$. Se llama <u>topología del subespacio</u>, <u>topología inducida</u>, <u>topología relativa</u> o <u>topología heredada</u> (de $\mathcal{T}$) a la topología sobre A dada por

$$\mathcal{T}_A = \{\mathcal{U} \cap A \,:\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}.$$

Observación: Lo único que nos dice la definición anterior es que los abiertos en A se obtienen intersecando con A los de X (en particular $\mathcal{T}_A$ *hereda* las propiedades de topología de las de $\mathcal{T}$). Lo mismo ocurre con los cerrados y las bases, para practicar podemos demostrarlo, aunque es realmente sencillo.

Lema 2.4: *Con la notación anterior*

1) *$B \subset A$ es cerrado en $\mathcal{T}_A \Leftrightarrow B = C \cap A$ donde C es cerrado en $\mathcal{T}$*

2) *$\mathcal{C} = \{C_\alpha\}$ es una base de $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ es base de $\mathcal{T}_A$ con $B_\alpha = C_\alpha \cap A$.*

Observación: Lógicamente, "cerrado" en $\mathcal{T}_A$ ó $\mathcal{T}$ quiere decir que el complementario pertenece a dichas topologías. Es un buen ejercicio hallar una condición necesaria y suficiente sobre A para que todos los cerrados en $\mathcal{T}_A$ lo sean también en $\mathcal{T}$.

Dem.: 1) El conjunto B es cerrado en $\mathcal{T}_A$ si y sólo si $A - B \in \mathcal{T}_A$, es decir, si y sólo si $A - B = \mathcal{U} \cap A$ para cierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$, y esto equivale a (pensarlo) $B = (X - \mathcal{U}) \cap A$ con lo que basta tomar $C = X - \mathcal{U}$.

2) Basta notar que para $x \in A$, $x \in C_\alpha \;\Rightarrow\; x \in B_\alpha$ y que $x \in C_{\alpha_3} \subset C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_2} \Rightarrow x \in C_{\alpha_3} \cap A \subset (C_{\alpha_1} \cap A) \cap (C_{\alpha_2} \cap A)$. ■

Ejemplo: Sea $A = [0,2] \cup [3,5)$. Los conjuntos $\mathcal{U}_1 = (1,2] \cup [3,4)$, $\mathcal{U}_2 = [0,1) \cup (1'5,2)$ y $\mathcal{U}_3 = [3,5)$ son abiertos en la topología heredada de la usual en $\mathbb{R}$ porque

$$\mathcal{U}_1 = (1,4) \cap A, \qquad \mathcal{U}_2 = \big((-1,1) \cup (1'5,2)\big) \cap A, \qquad \mathcal{U}_3 = (2'5,5) \cap A.$$

Sin embargo $F = [4,5)$ no es abierto en la topología relativa porque, si lo fuera, existiría un elemento de la base $(a,b) \cap A$ tal que $4 \in (a,b) \cap A \subset F$, y esto es imposible. Es fácil ver que F es cerrado porque $F = [4,6] \cap A$.

Notación: Para simplificar (o liar) normalmente también se llama *topología usual* en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ a la heredada de la usual en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: La topología usual (en el sentido recién introducido) en el conjunto $A = \{1/n \,:\, n \geq 2\}$ coincide con la discreta. Para comprobarlo basta ver que cada punto de A es abierto, lo cual se reduce a escribir $\{1/n\} = \big(1/(n+1), 1/(n-1)\big) \cap A$. Pero si tomamos $B = A \cup \{0\}$, la topología relativa en B ya no es la discreta, porque es imposible escribir $\{0\} = \mathcal{U} \cap B$ con $\mathcal{U}$ abierto de la usual en $\mathbb{R}$, ya que si fuera así, tomando (a,b) con $0 \in (a,b) \subset \mathcal{U}$ se tendría $\{0\} = (a,b) \cap B$, lo cual no es posible (¿por qué?).

Ejemplo: La topología inducida en $A = \{-1/n \,:\, n \geq 2\} \cup \{0\}$ por la topología de límite inferior es la discreta, ya que

$$\{-1/n\} = \big[-1/(n-1), -1/(n+1)\big) \cap A, \qquad \{0\} = [0,1) \cap A.$$

Sin embargo la usual no sería la discreta por la misma razón que en el ejemplo anterior. Con la usual en A, $\mathcal{U} = \{-1/n \,:\, n \geq 100\} \cup \{0\}$ es abierto porque $\mathcal{U} = (-1/99, 1) \cap A$ pero $C = \{-1/n \,:\, n \text{ es par} \geq 2\} \cup \{0\}$ no es abierto porque cualquier intervalo (a,b) conteniendo al cero contiene infinitos valores $-1/n$ con n impar.

Hemos visto que los intervalos abiertos, $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a<x<b\}$ generan una topología (la usual). Una idea para crear nuevas topologías es cambiar el significado de "$<$". Recordemos la definición relevante.

DEFINICIÓN: Se dice que "$\le$" es una relación de orden lineal en un conjunto X si para todo $a,b,c\in X$ se cumple

$$1)\ a\le a, \qquad 2)\ a\le b,\ b\le a\Rightarrow a=b, \qquad 3)\ a\le b,\ b\le c\ \Rightarrow a\le c$$

y además dados $a,b\in X$ siempre se cumple exactamente una de las relaciones $a<b$, $b>a$. $b=a$.

Notación: Aquí hemos usado "$a<b$" como abreviatura de "$a\le b,\ a\ne b$". Los "intervalos" se denotan como en $\mathbb{R}$

$$(a,b)=\{x\in X\ :\ a<x<b\}, \qquad [a,b]=\{x\in X\ :\ a\le x\le b\}, \qquad \text{etc.}$$

y además a veces se fuerza un poco la notación escribiendo

$$(a,+\infty)=\{x\in X\ :\ x>a\}, \qquad (-\infty,b]=\{x\in X\ :\ x\le b\}, \qquad \text{etc.}$$

Ejemplo: Si en el conjunto $X=\{\spadesuit,\clubsuit,\diamondsuit,\heartsuit\}$ definimos la relación de orden lineal $\spadesuit\le\clubsuit\le\diamondsuit\le\heartsuit$, entonces

$$(\spadesuit,\diamondsuit)=\{\clubsuit\}, \qquad [\clubsuit,\heartsuit)=\{\clubsuit,\diamondsuit\}, \qquad [\clubsuit,\spadesuit]=\emptyset.$$

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto con una relación de orden lineal. Se llama topología del orden a la generada por los intervalos abiertos (a,b) con $a,b\in X$ y por $[m,b)$ y/o $(a,M]$ si X tuviera un elemento mínimo, m, y/o un elemento máximo, M.

Observación: La demostración de que la base de la topología del orden es realmente una base es tan sencilla como en el caso de la topología usual.

El primero en considerar separadamente estos *espacios ordenados* fue uno de los axiomatizadores de la Topología Algebraica, S. Eilenberg, quien según un rumor no confirmado clasificaba a los matemáticos en tres grupos: a los que les gusta la música, a los que les gusta subir montañas y a los que les gusta beber vino.

Ejemplo: En el ejemplo anterior $m=\spadesuit$, $M=\heartsuit$ y la topología del orden es la discreta, ya que todo elemento de X es abierto, de hecho es un elemento de la base:

$$\{\spadesuit\}=[\spadesuit,\clubsuit), \qquad \{\clubsuit\}=(\spadesuit,\diamondsuit), \qquad \{\diamondsuit\}=(\clubsuit,\heartsuit), \qquad \{\heartsuit\}=(\diamondsuit,\heartsuit].$$

En general, en cualquier conjunto finito la topología del orden es la discreta (¿por qué?).

Parece irrelevante (y lo es) insistir en que en la definición anterior $a,b\in X$, pero la práctica muestra que al principio hay muchas confusiones al pensar que X está contenido dentro de un conjunto mayor.

Ejemplo (importante): La topología del orden en $X=(-2,0)\cup[1,3)$ no coincide con (la inducida por) la usual.

Nótese en primer lugar que X no tiene ni mínimo ni máximo ya que $-2,3\notin X$. La base de la topología del orden es $\mathcal{B}=\{(a,b)\ :\ a,b\in X\}$. Por ejemplo

$$(-1,2)=\{-1<x<2\ :\ x\in X\}=(-1,0)\cup[1,2).$$

Pero $[1,2)$ no es un elemento de la base. No se puede decir que es $(0,2)$ porque $0 \notin X$. En definitiva sólo se consideran intervalos que tengan extremos en X. De hecho $[1,2)$ no es un abierto en la topología del orden porque no se pueden encontrar $a, b \in X$ tales que

$$1 \in \{a < x < b \, : \, x \in X\} \subset [1,2).$$

Sin embargo $[1,2) = (0,2) \cap X$, de modo que sí es abierto en la topología inducida por la usual.

Un ejemplo interesante de orden viene sugerido por la forma en que buscamos en el diccionario. Primero necesitamos una palabra que desconozcamos (a no ser que tengamos diez años y busquemos guarrerías), digamos "*fundíbulo*", vamos a la letra "*f*", después buscamos "*fu*" pero todavía hay muchas palabras con este empiece. Con "*fundibul...*" sólo encontramos dos: "*fundibulario*" y "*fundíbulo*", como la "*a*" va antes que la "*o*" en el alfabeto, aparecerán en el orden aquí escrito.

> *De pronto me vuelven a la memoria los nombres de los últimos autores que ha consultado: Lambert, Langlois, Larbalétrier, Lastev, Lavergne. Es una iluminación; he comprendido el método del Autodidacta: se instruye por orden alfabético.*
>
> [...] *Un día, hace siete años (me ha dicho que estudia desde hace siete años), entró con gran pompa en esta sala.* [...] *Hoy está en la L. K después de J, L después de K. Pasó brutalmente del estudio de los coleópteros al de la teoría de los cuanta,* [...]

Este proceso de ordenar palabras comparando letras hasta encontrar una diferente y en ese caso tomar el orden natural del alfabeto se puede hacer con números en lugar de letras induciendo el llamado orden lexicográfico en $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define recursivamente de la forma siguiente

$$\text{En } \mathbb{R}^2, \qquad \vec{x} \le \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < y_1 \\ \quad \text{ó} \\ x_1 = y_1, \ x_2 \le y_2. \end{cases}$$

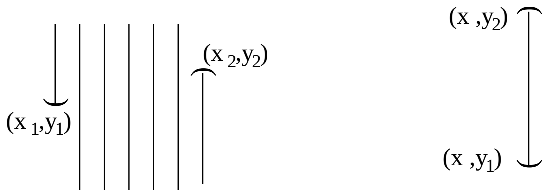
$$\text{En } \mathbb{R}^n, \qquad \vec{x} \le \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_{n-1}) < (y_1, \dots, y_{n-1}) \\ \quad \text{ó} \\ x_i = y_i, \ i = 1, \dots, n-1, \quad x_n \le y_n. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que el orden lexicográfico define realmente una relación de orden lineal.

Observación: Lo equívoco de la notación (a,b) llega ahora a su culminación. Nótese que con el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ la notación $\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)$ significa los puntos que están entre el punto (x_1,y_1) y el punto (x_2,y_2), ambos sin incluir. O sea, que el primer y el último paréntesis indican *intervalo* y los otros *punto*, sin embargo pensándolo un poco no puede haber confusión.

Ejemplo: Según la definición, $\mathcal{B} = \{\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \, : \, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}\}$ es una base para la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$. Veamos que $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\big((x,y_1),(x,y_2)\big) \, : \, x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$ también lo es.

Como $\mathcal{B} \supset \widetilde{\mathcal{B}}$ la topología generada por $\widetilde{\mathcal{B}}$ es menos fina que la del orden lexicográfico. Según la proposición para comparar topologías, para probar la igualdad sólo hay que comprobar que dentro de cada elemento de $\mathcal{B}$ cabe uno de $\widetilde{\mathcal{B}}$ conteniendo a un punto dado; y esto es obvio sin más que hacer un dibujo.



Intervalo $\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big)$ Intervalo $\big((x, y_1), (x, y_2)\big)$

La definición del orden lexicográfico no es exclusiva de $\mathbb{R}^n$ o de las palabras de una lengua, basta que tengamos que tengamos cierta cantidad de componentes (letras) y alguna forma de compararlas.

<u>Ejemplo</u>: Sea $X = [0,1] \times [0,1]$. La topología del orden lexicográfico en X no coincide con la topología inducida en X por la del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$.

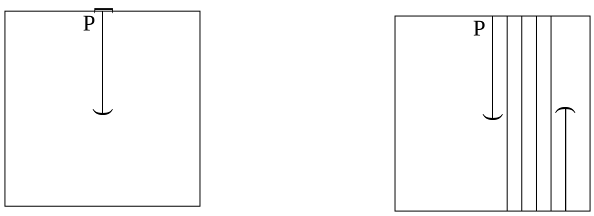
(Antes de seguir conviene leerlo de nuevo hasta conseguir no bizquear). Yendo a las definiciones tenemos que la primera topología de la que nos hablan es la generada por

$$\mathcal{B}_{lex} = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,:\, (x_1, y_1) \in X,\ (x_2, y_2) \in X\}$$

y la segunda es la generada por

$$\mathcal{B}_{ind} = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \cap X \,:\, (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2,\ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Basta encontrar un punto $P \in X$ y un elemento de $\mathcal{B}_{ind}$ que lo contenga de manera que no quepa dentro ningún elemento de $\mathcal{B}_{lex}$ conteniendo a P (¿se entiende?). Tomemos por ejemplo $P = (1/2, 1)$ y $B = \big((1/2, 1/2), (1/2, 2)\big) \cap X$. Se tiene que $B \in \mathcal{B}_{ind}$, $B = \big((1/2, 1/2), P\big]$ y sin embargo cualquier $\widetilde{B} = \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \in \mathcal{B}_{lex}$ conteniendo a P debe tener $x_2 > 1/2$, así que no está contenido en B.



$B = \big((1/2, 1/2), (1/2, 2)\big) \cap X$ $P \in \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big)$

Dada una topología sobre X y otra sobre Y hay una forma canónica de crear una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$.

Definición: Sean $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ bases de topologías sobre X e Y, respectivamente. Se llama <u>topología producto</u> a la topología sobre $X \times Y$ generada por

$$\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y = \{B_X \times B_Y \,:\, B_X \in \mathcal{B}_X,\ B_Y \in \mathcal{B}_Y\}.$$

Nótese que si nos dieran topologías en X e Y pero no nos dijeran cuáles son sus bases, podríamos tomar todos los abiertos, porque el conjunto de todos los abiertos de cada una de ellas cumple obviamente las propiedades de base. Una duda natural es que si escogiéramos bases diferentes, en principio, podríamos obtener definiciones diferentes de la topología producto. Veamos que no es así.

Lema 2.5: *Si $\mathcal{B}_X$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_X$ son bases de una misma topología en X y $\mathcal{B}_Y$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_Y$ son bases de una misma topología en Y, entonces $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ genera la misma topología en $X \times Y$ que $\widetilde{\mathcal{B}}_X \times \widetilde{\mathcal{B}}_Y$.*

Dem.: Dado $x \in X$, como cualquier $\widetilde{B}_X \in \widetilde{\mathcal{B}}_X$ debe ser abierto en la topología generada por $\mathcal{B}_X$ (porque $\mathcal{B}_X$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_X$ generan la misma topología) existe $B_X \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B_X \subset \widetilde{\mathcal{B}}_X$. De la misma forma dados $y \in \widetilde{B}_Y \subset \widetilde{\mathcal{B}}_Y$ existe $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ tal que $y \in B_Y \subset \widetilde{B}_Y$. Por tanto, para cada $(x,y) \in X \times Y$ y cada $\widetilde{B}_X(x) \times \widetilde{B}_Y(y) \in \widetilde{\mathcal{B}}_X \times \widetilde{\mathcal{B}}_Y$

$$\exists B_X(x) \times B_Y(y) \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y \ : \ (x,y) \in B_X(x) \times B_Y(y) \subset \widetilde{B}_X(x) \times \widetilde{B}_Y(y).$$

Así pues, la topología generada por $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ es más fina que la generada por $\widetilde{\mathcal{B}}_X \times \widetilde{\mathcal{B}}_Y$. Intercambiando tildes por no tildes en el argumento anterior, se tiene la inclusión contraria. ■

Observación: Igual que se define la topología producto en $X \times Y$, se puede definir en $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. El caso de productos infinitos es importante en ciertos contextos, pero requiere una definición especial muy diferente de la que todos pensaríamos, de otro modo no comparte algunas buenas propiedades del caso finito, concretamente la continuidad de las proyecciones definidas a continuación. Como curiosidad, diremos que si (X,d) es un espacio métrico, entonces el producto infinito (numerable) $X \times X \times X \times \ldots$ puede considerarse como el espacio de todas las sucesiones en X y la topología producto coincide con la inducida por la distancia

$$D\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d(x_n,y_n)}{1+d(x_n,y_n)}.$$

Definición: A la función

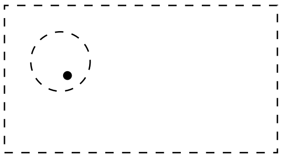
$$\pi_j \ : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \longrightarrow X_j$$
$$(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n) \mapsto x_j$$

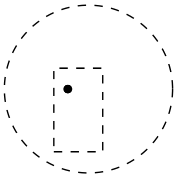
con $1 \le j \le n$, se le llama proyección sobre la j-ésima coordenada.

Observación: Para que la definición anterior tenga sentido hay que suponer que los X_j son no vacíos y así lo haremos implícitamente en los resultados que involucren π_j.

Ejemplo: Considerando $\mathbb{R}$ con la topología usual, la topología producto en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ coincide con la usual en $\mathbb{R}^n$ (en símbolos $usual \times \ldots \times usual = usual$).

Para demostrarlo hay que comparar la base usual de $\mathbb{R}^n$, que está formada por las bolas abiertas, con la base de la topología producto que está formada por productos de intervalos (= rectángulos n-dimensionales). De nuevo es sencillo ver que en $\mathbb{R}^n$, alrededor de cada punto, se pueden meter rectángulos dentro de bolas y viceversa. El caso $n = 2$ responde al siguiente dibujo





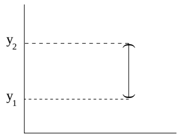
Ejemplo: La topología del orden lexicográfico en $X = [0,1] \times [0,1]$ no coincide con la producto de la discreta en $[0,1]$ por (la inducida por) la usual en $[0,1]$.

El conjunto $\{1/2\}$ es un abierto de la discreta en $[0,1]$ y $(1/2, 1]$ lo es en la usual en $[0,1]$; así que $\mathcal{U} = \{1/2\} \times (1/2, 1]$ es abierto en la producto, pero como ya vimos en un ejemplo anterior, $\mathcal{U}$ no es abierto en la topología del orden lexicográfico porque no *cabe* ningún abierto de la base dentro de él conteniendo al punto $P = (1/2, 1)$.

Ejemplo: La topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ coincide con la producto de la discreta en $\mathbb{R}$ por la usual en $\mathbb{R}$.

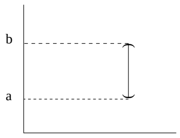
Sabíamos que una base de la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ es

$$\mathcal{B}_{lex} = \big\{ \big((x, y_1), (x, y_2)\big) \ : \ x, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \big\}.$$



Por otra parte, las bases de la discreta y de la usual en $\mathbb{R}$ son $\mathcal{B}_{dis} = \big\{ \{x\} \ : \ x \in \mathbb{R} \big\}$ y $\mathcal{B}_{usu} = \big\{ (a,b) \ : \ a, b \in \mathbb{R} \big\}$, con lo cual una base de la producto es

$$\mathcal{B}_{lex} = \big\{ \{x\} \times (a,b) \ : \ x, a, b \in \mathbb{R} \big\}.$$



Por tanto ambas coinciden. Aquí la confusión de la notación se vuelve un galimatías y es mejor fijarse en los dibujos.

La última manera que veremos de construir topologías es la más complicada teóricamente, porque involucra el conjunto cociente. Afortunadamente (¿?) no se insistirá mucho en ella este curso.

Recuérdese que si en un conjunto X tenemos una relación de equivalencia, $\sim$, se llama *conjunto cociente*, $X/\sim$, al conjuto de clases de equivalencia.

DEFINICIÓN: Sea X un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia definida en X y $p : X \longrightarrow X/\sim$ la función que asigna a cada elemento de X la clase de equivalencia a la que pertenece. Se llama topología cociente sobre $X/\sim$ a la topología en la que un conjunto $\mathcal{U} \subset X/\sim$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X.

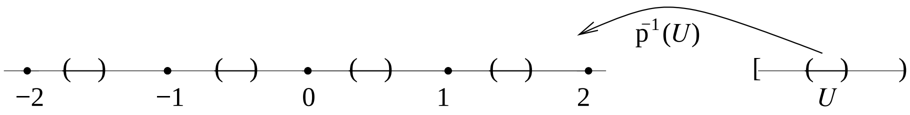
Intuitivamente, el conjunto cociente es aquel que agrupa elementos similares. Así que lo que hace p es *pegar* esos puntos (a veces se la llama *proyección*), y la topología cociente nos dice que algo será abierto si al *despegarlo* lo es en el espacio topológico inicial. Esto es incomprensible pero ayudará a desentrañar los razonamientos del siguiente ejemplo. Otra manera de entender la topología cociente es como la más fina sobre $X/\sim$ tal que p es continua. (Ejercicio para después de leer el ejemplo y dormir un poco: Demostrar que esta propiedad caracteriza a la topología cociente).

<u>Ejemplo</u>: Se considera $\mathbb{R}$ con la topología usual y la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ dada por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Las clases de equivalencia son $\{x\} + \mathbb{Z}$ (con el significado obvio). En cada clase de equivalencia habrá exactamente un número $0 \le x < 1$, escogiéndolo como representante se tiene que $\mathbb{R}/\sim$ se puede identificar con $[0,1)$. Es decir

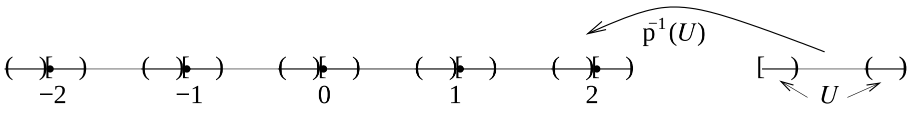
$$p : X \longrightarrow [0,1) \qquad \text{con } p(x) = \operatorname{Frac}(x)$$

donde $\operatorname{Frac}(x)$ significa la parte fraccionaria.

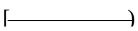
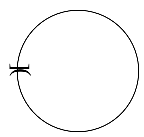
De acuerdo con la definición, si $\mathcal{U} \subset (0,1)$, $\mathcal{U}$ es abierto en la topología cociente $\Leftrightarrow$ $p^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} + \mathbb{Z}$ es abierto en la usual $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ es abierto en la usual (¿por qué? Ver el dibujo).



Por tanto la única diferencia con respecto a la topología usual, si la hubiera, tiene que estar en los abiertos que contienen a $x = 0$. Considerando $\mathcal{U} = [0,b) \cup (a,1)$, $0 < b < a < 1$ se tiene que es abierto en la topología cociente ya que $p^{-1}(\mathcal{U}) = (a-1,b) + \mathbb{Z}$ es abierto en la usual.



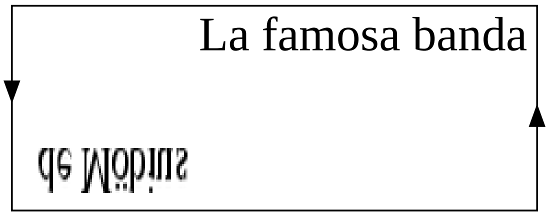
Es decir, que los abiertos pueden *salir* por cero y continuar por detras del uno. Sin embargo $[0,b)$ no es abierto en la topología cociente. A todos los efectos es como si el cero y el uno estuvieran pegados.

$\mathbb{R}/\sim$ "="  con la top. cociente "="  "=" $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ con la top. usual

En definitiva, $\sim$ pega todos los puntos de $\mathbb{R}$ que se diferencian en enteros, y da lugar a una circunferencia.

¿Para qué sirven estas cosas tan raras? Es siempre peligroso hacerse esta pregunta en Matemáticas y no se puede forzar a nadie a contestar a no ser que tenga que pedir una beca de investigación; por tanto nos contentaremos con unos cuantos dibujos y alguna idea geométrica.

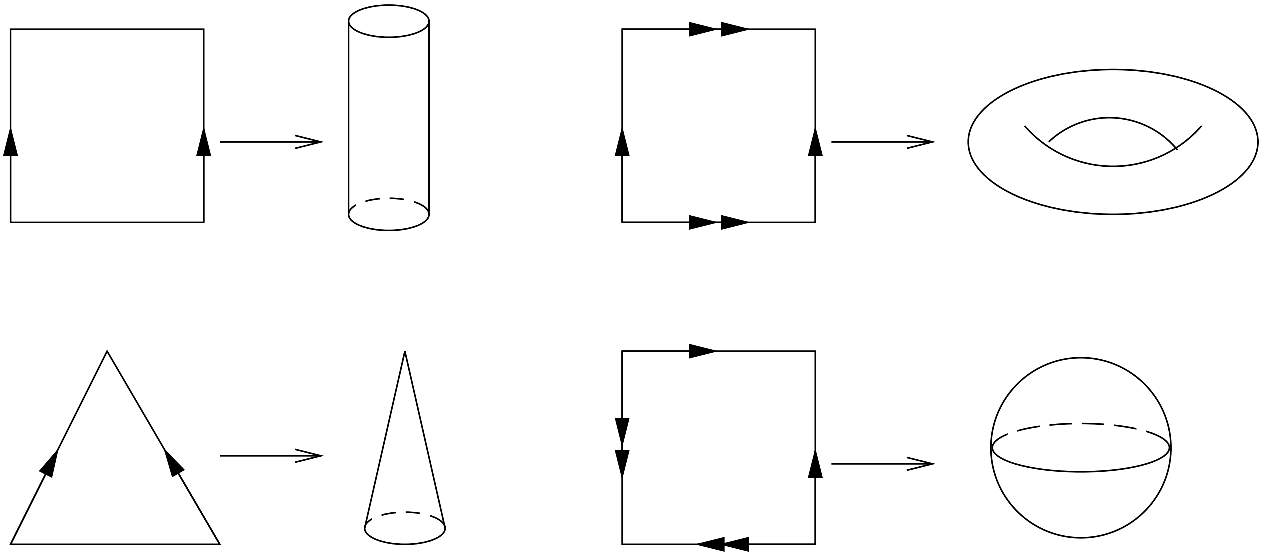
Para mayor comodidad, en un dibujo bidimensional se indica una relación de equivalencia que relaciona dos segmentos poniendo flechas o dobles flechas. Por ejemplo



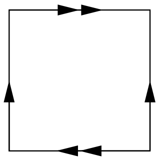
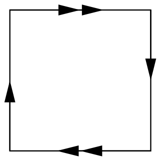
indica que en el rectángulo anterior cada punto del borde derecho está relacionado con el simétrico del lado izquierdo, $(x, y) \sim (-x, -y)$ si $(x, y) \in$ borde derecho. Como en el ejemplo anterior, con la topología cociente los abiertos que salen por la derecha apareceran dados la vuelta por la izquierda. Es como si pegásemos el rectángulo por la flechas para obtener una banda retorcida, llamada *banda de Möbius*, introducida por A.F. Möbius en 1850 e independientemente por J.B. Listing en su "Panorama de los complejos espaciales" (buen título para una secuela de "An overview to kill" y "Moonraker").

Entre las propiedades más conocidas de la banda de Möbius están que es unilátera (tiene una sola cara) y que al cortarla por su ecuador no se separa en dos.

En general tenemos una manera *bidimensional* de ver objetos que viven en $\mathbb{R}^3$, lo cual es útil para estudiarlos.



Un teorema muy importante dice que todas las superficies "cerradas" se obtienen con relaciones de equivalencia en los lados de un polígono. Aunque parezca mentira existen superficies cerradas que no podemos dibujar directamente en $\mathbb{R}^3$ y sólo las vemos bien con estos dibujos. Los ejemplos más simples son

Botella de Klein =  Plano proyectivo = 

La segunda superficie es bien conocida, aunque no tanto con esta representación. La primera la introdujo F. Klein en 1882 y es una botella muy rara porque es unilátera y, por tanto, todo lo que está dentro de ella también está fuera. Como Brasil es un país muy grande y lo de Klein suena a poco, allí la llaman garrafa de Klein.

Realmente es notable que la complicación geométrica de estas superficies admita una representación plana, finita y sencilla, mientras que elude acomodarse al espacioso, infinito y confortable mundo tridimensional.

> *¡Qué 'natural' parece la ciudad a pesar de todas sus geometrías, qué aplastada por la noche! Es tan... evidente, desde aquí: ¿es posible que yo sea el único que lo ve? ¿No hay en ninguna parte otra Casandra, en la cima de una colina, mirando a sus pies una ciudad sumergida en el fondo de la naturaleza?*

Quien se atreva a dudar que estos objetos no se pueden construir (sin autointersecciones) en $\mathbb{R}^3$, que coja un trapo cuadrado e intente coser los lados correspondientes identificando las direcciones de las flechas. Y el que no tenga ganas que vaya a la biblioteca y mire la portada y la contraportada del libro de M. Spivak, "*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*" Vol. II Publish or Perish 1970.

3. Espacios Topológicos II
(Conjuntos asociados, continuidad y propiedades)

La frontera cierra el interior

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, hay conjuntos naturales *asociados* a A que están recogidos en las definiciones siguientes.

DEFINICIÓN: Se llama interior de A, y se denota con $\text{Int}(A)$, a la unión de todos los abiertos contenidos en A.

DEFINICIÓN: Se llama cierre o clausura o adherencia de A, y se denota con $\overline{A}$, a la intersección de todos los cerrados que contienen a A.

DEFINICIÓN: Se llama frontera de A, y se denota con $\text{Fr}(A)$, al conjunto de puntos que pertenecen simultáneamente al cierre de A y de su complementario. Esto es, $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(X-A)}$.

DEFINICIÓN: Se llama conjunto de puntos límite o de acumulación (o también conjunto derivado) de A, y se denota con A', al conjunto de puntos tales que cualquier entorno suyo interseca a A en algún punto distinto de él mismo. Esto es

$$A' = \{x \in X \,:\, \forall \mathcal{U} \text{ abierto}, \ x \in \mathcal{U} \Rightarrow (\mathcal{U} - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}.$$

A veces se define también el *exterior* de A como $X - \overline{A}$, pero no nos referiremos a él en este curso.

Seguramente es difícil imaginar, incluso para alguien que ha llegado hasta este capítulo, *todos* los cerrados que contienen a A o *todos* los abiertos contenidos en A; por ello veremos primero una caracterización más práctica del interior y el cierre.

Proposición 3.1: *Sea $\mathcal{B}$ una base de un espacio topológico X y sea $A \subset X$. Entonces*

$$1)\ x \in \text{Int}(A) \ \Leftrightarrow\ \exists B \in \mathcal{B} \,:\, x \in B \subset A$$

$$2)\ x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow\ \forall B \in \mathcal{B},\ \text{con } x \in B,\ B \cap A \neq \emptyset.$$

Dem.: 1) Si $x \in \text{Int}(A)$, como $\text{Int}(A)$ es abierto, existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset \text{Int}(A) \subset A$. Recíprocamente, si $B(x) \subset A$ con $B(x) \in \mathcal{B}$ entonces, como $B(x)$ es abierto, $B(x) \subset \text{Int}(A)$.

2) Vamos a probar $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists B(x) \in \mathcal{B} \,:\, B \cap A = \emptyset$. Si $x \notin \overline{A}$, existe un cerrado $F \supset A$ tal que $x \notin F$, por consiguiente x pertenece al abierto $X - F$ y debe existir $B(x)$ en la base con $B(x) \subset X - F \subset X - A$ de donde se deduce $B(x) \cap A = \emptyset$. Recíprocamente, si $B(x) \in \mathcal{B}$ con $B(x) \cap A = \emptyset$, tomando $F = X - B(x)$ se tienen $F \supset A$ y $x \notin F$, por tanto $x \notin \overline{A}$. ■

Ejemplo: Calculemos $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$, $\text{Fr}(A)$ y A' donde $A = (1,2] \subset \mathbb{R}$ con la topología usual en $\mathbb{R}$.

Si $x \in (1,2)$, como $x \in (1,2) \subset A$, se tiene $x \in \text{Int}(A)$. Por otra parte, no existen a, b tales que $2 \in (a,b) \subset A$, así pues $2 \notin \text{Int}(A)$ y se tiene $\text{Int}(A) = (1,2)$.

Si $x>2$ entonces $(2,x)\cap A=\emptyset$ y $x\not\in\overline{A}$. Lo mismo ocurre para $x<1$. Además si $x\in[1,2]$ cualquier intervalo (a,b) conteniendo a x corta a A en infinitos puntos, así que $\overline{A}=A'=[1,2]$. Un argumento similar prueba que $\overline{X-A}=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$, en consecuencia $\text{Fr}(A)=\{1\}\cup\{2\}$.

Ejemplo: Con la topología usual en $\mathbb{R}$ se tiene que $\text{Int}(\mathbb{Q})=\emptyset$ porque no existe $a<b$ con $(a,b)\subset\mathbb{Q}$ ya que cualquier intervalo contiene infinitos puntos racionales e irracionales, a su vez esto implica $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$. Finalmente, como $\overline{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ se deduce $\text{Fr}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$.

La idea de interior y cierre es fácilmente comprensible: el interior es el abierto *más grande* dentro del conjunto y el el cierre es el cerrado *más pequeño* que contiene al conjunto. Obviamente, $A=\text{Int}(A)\Leftrightarrow A$ es abierto y $A=\overline{A}\Leftrightarrow A$ es cerrado. (Ejercicio: reemplazar "obviamente" por una demostración). También la definición de frontera es intuitiva, es algo así como los puntos "adyacentes" al conjunto y a su complementario. Pero seguramente los ejemplos anteriores no dan una idea clara de lo que son los puntos límite. Al menos en el caso métrico, es como el conjunto de posibles límites (de ahí el nombre) de sucesiones no constantes contenidas en el conjunto. A este respecto merece la pena recordar la definición dada por G. Cantor allá por 1883 para $\mathbb{R}$ con la usual: "Por punto límite de un conjunto A quiero decir un punto de la recta tal que en cualquier entorno suyo se encuentran infinitos puntos de A, entendiendo que puede ocurrir que el punto (límite) mismo también pertenezca al conjunto".

Ejemplo: Si $A=[1,2]\cup\{3\}\subset\mathbb{R}$ (con la topología usual) entonces $3\not\in A'$ porque $\big((2'5,3'5)-\{3\}\big)\cap A=\emptyset$. De hecho es fácil comprobar como antes (ejercicio) que $A'=[1,2]$ mientras que $\overline{A}=A$ porque A es cerrado.

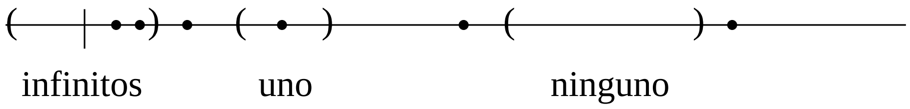
A los elementos de $\overline{A}-A'$ se les llama puntos aislados. Como en el resto de conjuntos asociados antes introducidos, el nombre no siempre corresponde a nuestra intuición geométrica habitual. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la topología discreta, 1 es un punto aislado de $A=[0,2]$, pero no lo es de $A=\{0,1,2\}$ si usamos la topología trivial. Es fácil probar en general que

$$x\in\overline{A}-A'\;\Leftrightarrow\;\exists\,\mathcal{U}(x)\,:\,\mathcal{U}(x)\cap A=\{x\}.$$

Por tanto, cuando usemos topologías distintas de la usual, más que imaginar los elementos de $\overline{A}-A'$ como *aislados* con nuestra intuición euclídea, debemos pensarlos como no *relacionados* con otros puntos de A mediante entornos de la topología.

> –[...] *No sabía qué hacer, languidecía. Donde veía hombres reunidos, allí me metía. Hasta he llegado –agrega sonriendo– a seguir el cortejo fúnebre de un desconocido. Un día, desesperado, arrojé al fuego la colección de sellos... Pero encontré mi camino.*[...]
>
> *Se yergue, infla los carrillos.*
>
> *–Ya no estoy solo, señor. Nunca.*
>
> *–Ah, ¿conoce usted a mucha gente? –digo.*
>
> *Sonríe y en seguida me doy cuenta de mi ingenuidad.*
>
> *–Quiero decir que ya no me 'siento' solo. Pero naturalmente, señor, no es necesario que esté con alguien.*

Ejemplo: Sea $A=\{1/n\,:\,n\in\mathbb{Z}^+\}\subset\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces $\text{Int}(A)=\emptyset$ (A no contiene ningún intervalo), $\overline{A}=A\cup\{0\}$ y $A'=\{0\}$. Las dos últimas igualdades responden a la misma idea: los únicos puntos, x, tales que $(x-\epsilon, x+\epsilon)\cap A \neq \emptyset$, son $x=0$ y $x=1/n$ por pequeño que sea ϵ. Para $x=0$ la intersección cuenta con más de un punto (de hecho infinitos) y para $x=1/n$ no, por ello $A'=\{0\}$ y todos los puntos de A son puntos aislados.



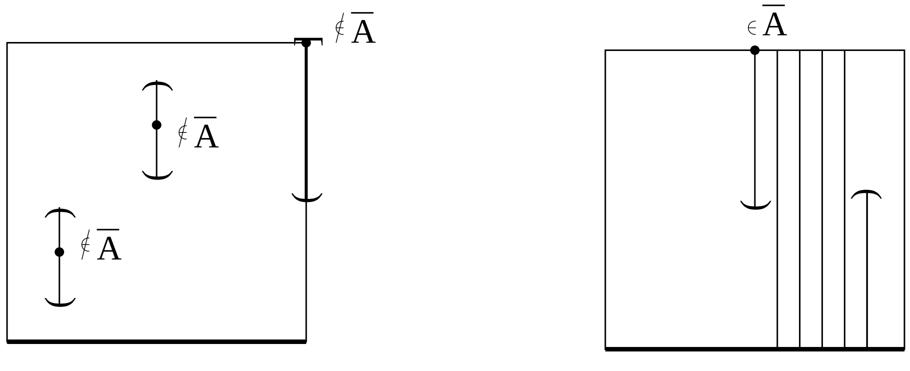
Si la topología que usamos es muy extraña, es muy probable que $\mathrm{Int}(A)$, $\overline{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ y A' sean conjuntos difíciles de intuir.

Ejemplo: Considerando $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, vamos a hallar $\mathrm{Int}(A)$, $\overline{A}$, A' y $\mathrm{Fr}(A)$ para $A=[0,1]$. Sabíamos que todos los abiertos (excepto el vacío y el total) son de la forma $\mathcal{U}=\mathbb{R}-\bigcup_{n=1}^{N}\{x_n\}$, por tanto nunca se cumple $\mathcal{U}\subset A$ y siempre se cumple que $\mathcal{U}\cap A$ contiene infinitos puntos, y lo mismo sucede con $(\mathbb{R}-A)\cap\mathcal{U}$, así pues

$$\mathrm{Int}(A)=\emptyset, \qquad \overline{A}=A'=\mathrm{Fr}(A)=\mathbb{R}.$$

Ejemplo: Si consideramos $X=[0,1]\times[0,1]$ con la topología del orden lexicográfico, entonces la clausura de la línea horizontal $A=\{(x,y)\in X\ :\ 0\le x\le 1,\ y=0\}$ es $\overline{A}=A\cup\{(x,y)\in X\ :\ 0\le x<1,\ y=1\}$. Veámoslo con detalle:

Si un punto no está en el borde superior ni en el borde inferior, no pertenece a $\overline{A}$ ya que existe algún elemento B de la base de la topología del orden lexicográfico (un intervalo vertical) conteniendo al punto y con $A\cap B=\emptyset$. También es claro que $(1,1)\notin\overline{A}$, para verlo basta tomar $B=\big((1,0'5),(1,1)\big]$ que es de la base. Finalmente, los otros puntos del borde superior están siempre contenidos en elementos de la base que necesariamente cortan a A y por tanto pertenecen a $\overline{A}$.



Como es fácil sospechar, los conjuntos $\mathrm{Int}(A)$, $\overline{A}$, A' y $\mathrm{Fr}(A)$ no son del todo independientes. Dos de las relaciones más sencillas se incluyen en el siguiente resultado. La segunda da título a esta sección.

Proposición 3.2: *Sea X un espacio topológico y A uno de sus subconjuntos, entonces*

$$1)\ \overline{A}=A\cup A', \qquad 2)\ \overline{A}=\mathrm{Int}(A)\cup\mathrm{Fr}(A).$$

Dem.: 1) La inclusión $\overline{A} \supset A \cup A'$ es obvia. Por otro lado, si $x \in \overline{A}$, para todo abierto $\mathcal{U}$ con $x \in \mathcal{U}$ se tiene $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$ y si $x \notin A$ entonces $(\mathcal{U} - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ y $x \in A'$.

2) El segundo miembro se puede escribir como $\big(\text{Int}(A) \cup \overline{(X - A)}\big) \cap \overline{A}$, con lo que basta probar $\text{Int}(A) = X - \overline{(X - A)}$. Como $\overline{(X - A)}$ es cerrado, $x \in X - \overline{(X - A)}$ si y sólo si existe $\mathcal{U}(x) \subset X - (X - A) = A$, esto es, si y sólo si $x \in \text{Int}(A)$. ■

Ejemplo: Comprobar la segunda propiedad para el conjunto

$$A = \big\{ -\frac{1}{n} - 1 \ : \ n \in \mathbb{Z}^+ \big\} \cup [0, 1) \cup \big\{ 2 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{Z}^+ \big\}$$

incluido en $\mathbb{R}$ con la topología de límite inferior.

Sólo repasaremos los puntos conflictivos mientras que los detalles se dejan como ejercicio por ser análogos a ejemplos anteriores.

Tomando el abierto de la base $B = [1, 1'5)$ se tiene $A \cap B = \emptyset$ así que $1 \notin \overline{A}$. De la misma forma $-1 \notin \overline{A}$. Sin embargo $2 \in \overline{A}$ porque $[2, 2 + \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. En definitiva, se obtiene $\overline{A} = A \cup \{2\}$. Como $[0, 1)$ es abierto y en las otras partes del conjunto no "cabe" ningún abierto, $\text{Int}(A) = [0, 1)$. Finalmente, se tiene $\overline{\mathbb{R} - A} = \mathbb{R} - [0, 1)$ (nótese que cada punto de las sucesiones está "rodeado" por infinitos puntos que no pertenecen a ellas) y en consecuencia $\text{Fr}(A) = \big(A - [0, 1)\big) \cup \{2\}$, y la relación se cumple.

Hay muchas "propiedades" que se cumplen en ejemplos sencillos de $\mathbb{R}^n$ pero que son falsas en general. Por ejemplo, $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cup B)$ o $\text{Int}\big(\text{Fr}(A)\big) = \emptyset$ parecen evidentes con unos cuantos dibujos en $\mathbb{R}^2$, pero no son ciertas. Como regla (por supuesto falsa), la dificultad en demostrar una cosa suele ser directamente proporcional a la cercanía del contraejemplo. Por ello, si nos cuesta mucho probar alguna de estas posibles identidades, antes y después de creernos ignorantes, tendríamos que buscar un contraejemplo que invalide el paso que no sabemos dar. Pues bien, anímese el lector a encontrar sendos contraejemplos que prueben la falsedad de las igualdades del comienzo del párrafo.

Recogemos aquí una de esas pocas propiedades que son universalmente ciertas.

Lema 3.3: *Sea X un espacio topológico. Para cualquier par de subconjuntos A_1, A_2, se cumple*

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

Dem.: Como $A_1 \cup A_2 \supset A_1, A_2$ se cumple $\overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1}, \overline{A_2}$ y por tanto $\overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Sólo resta demostrar que $x \notin \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \Rightarrow x \notin \overline{A_1 \cup A_2}$. Si $x \notin \overline{A_1}$ y $x \notin \overline{A_2}$, entonces $\mathcal{U}_1 = X - \overline{A_1}$ y $\mathcal{U}_2 = X - \overline{A_2}$ son dos abiertos conteniendo a x tales que $\mathcal{U}_1 \cap A_1 = \mathcal{U}_2 \cap A_2 = \emptyset$, por tanto $x \in \mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{V} \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$. Así pues $x \notin \overline{A_1 \cup A_2}$. ■

Es difícil reproducir el proceso dialéctico a seguir, antes descrito, frente a una propiedad que no sabemos si es cierta o no. Quizá ayude el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Estudiar si la propiedad

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$$

es o no cierta en general.

Primero tanteamos con algunos ejemplos; si tenemos suerte y hallamos un contraejemplo habremos terminado. Digamos que hemos probado en $\mathbb{R}$ con $A_n = \{n\}$, $A_n = (n, n+1)$ o $A_n = (-1/n, 1/n)$ para los que la propiedad funciona y no se nos ocurren más ejemplos.

Todo sugiere, por ahora, que es cierta y debemos buscar una demostración. Lo primero que a uno se le ocurre es copiar la anterior, con lo cual obtenemos inmediatamente de la primera parte

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n.$$

Pero la segunda parte no es válida porque $\mathcal{V}$ sería la intersección de infinitos abiertos y, por tanto, no necesariamente abierto.

Por consiguiente, tras la última observación, tratamos de fabricar un contraejemplo en que $\mathcal{V}$ no sea abierto. En $\mathbb{R}$ con la usual, si $x \notin \bigcup \overline{A}_n$ pero los A_n están cada vez "más cerca" de $x = 0$ entonces no existirá ningún $\mathcal{V}(x)$ abierto con $\mathcal{V}(x) \cap \bigcup A_n = \emptyset$. Tomemos, por ejemplo, $A_n = \{1/n\}$ y habremos conseguido el contraejemplo.

Naturalmente si tuviéramos que escribir esto en un libro daríamos el contraejemplo y suprimiríamos el proceso mental que nos ha llevado a considerarlo, en la línea de la afirmación de C. F. Gauss de que un arquitecto no deja los andamios al terminar el edificio, redarguyendo así al matemático que lo acusaba de borrar sus huellas como un zorro con su cola.

Aquí hemos tenido la guía de la demostración del lema pero ante una propiedad totalmente desconocida se pueden recorrer los vericuetos más dispares y disparatados. Se deja como ejercicio encontrar el error en las siguientes pruebas $\boxed{\text{falsas}}$ de la propiedad $\boxed{\text{falsa}}$ del ejemplo anterior.

a) Por inducción completa(mente mal): Definiendo

$$\text{Izq}(N) = \overline{\bigcup_{1\le n\le N} A_n}, \qquad \text{Der}(N) = \bigcup_{1\le n\le N} \overline{A}_n,$$

la igualdad $\text{Izq}(N) = \text{Der}(N)$ se cumple para $N = 2$ (por el lema) y si se cumple para N también se cumple para $N+1$ porque el lema implica

$$\text{Izq}(N+1) = \text{Izq}(N) \cup \overline{A}_{N+1} = \text{Der}(N) \cup \overline{A}_{N+1} = \text{Der}(N+1).$$

Por inducción se deduce $\text{Izq}(\infty) = \text{Der}(\infty)$.

b) Por deducción a lo absurdo: Sabemos que $\overline{\bigcup A_n} \supset \bigcup \overline{A}_n$. Supongamos que existiera $x \in \overline{\bigcup A_n}$ tal que $x \notin \bigcup \overline{A}_n$. Por definición de cierre, para todo $\mathcal{U}(x)$ se tiene que cumplir

$\mathcal{U}(x) \cap \bigcup A_n \neq \emptyset$, por consiguiente debe existir algún A_{n_0} tal que $\mathcal{U}(x) \cap A_{n_0} \neq \emptyset$ y en consecuencia $x \in \overline{A}_{n_0} \subset \bigcup \overline{A}_n$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Recuérdese que tanto a) como b) son demostraciones $\boxed{\text{falsas}}$.

Para terminar esta sección, veremos que en espacios métricos $\overline{A}$ y A' están relacionados con los posibles límites de sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$.

Proposición 3.4: *Sea X un espacio métrico y A uno de sus subconjuntos, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de elementos de A, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, convergiendo a x. Además, se puede reemplazar $\overline{A}$ por A' si se impone que $x_n \neq x$.*

Dem.: $\Rightarrow$) Si $x \in \overline{A}$ entonces $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Tomando $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$ se tiene $x_n \to x$.

$\Leftarrow$) Si $x_n \to x$ entonces por la definición de convergencia, cualquier bola $B(x, \epsilon)$ contiene infinitos términos de la sucesión, y como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, se tiene $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, lo que implica $x \in \overline{A}$.

La demostración de la segunda parte es similar reemplazando $B(x, \epsilon)$ por $B(x, \epsilon) - \{x\}$ (ejercicio). ∎

Aplastar, encoger, estirar

Hace muchas, muchas páginas habíamos demostrado que la continuidad en espacios métricos se podía caracterizar diciendo que la imagen inversa de un abierto es un abierto y de este modo nos podíamos liberar de la tiranía ϵ-δ. En espacios topológicos generales, como no tenemos una distancia, no podemos ni siquiera enunciar la definición ϵ-δ, así que sólo nos queda una posibilidad.

DEFINICIÓN: Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Dada $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es continua si para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_Y$ se tiene que $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_X$. Esto es, si la imagen inversa de un abierto es siempre un abierto.

Observación: Una vez más se recuerda que f^{-1} indica la imagen inversa conjuntista, $f^{-1}(A) = \{x \in X \,:\, f(x) \in A\}$. No se requiere que la función sea inyectiva ni sobreyectiva.

Ya hemos visto que como las bases generan los abiertos, todo lo que funciona bien con ellas funciona bien siempre. La continuidad no es una excepción.

Proposición 3.5: *Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $\mathcal{B}$ una base que genera $\mathcal{T}_Y$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.*

Dem.: Cada abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_Y$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$ y

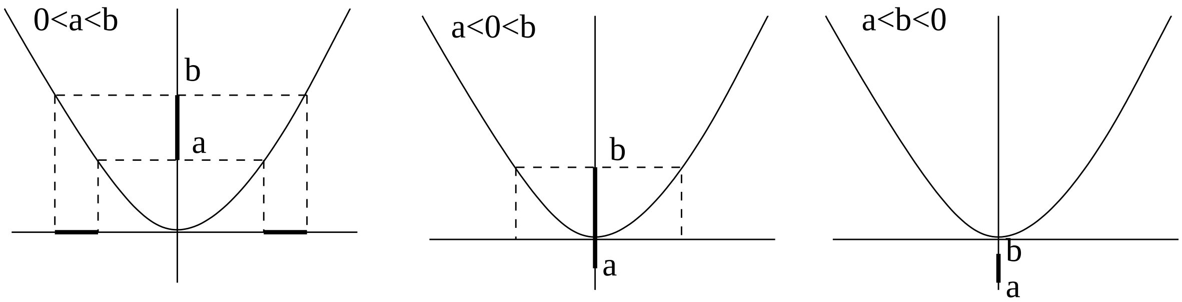
$$\mathcal{U} = \bigcup_\alpha B_\alpha \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha).$$

Por consiguiente, si los $f^{-1}(B_\alpha)$ son abiertos, $f^{-1}(\mathcal{U})$ también lo es. ∎

Observación: Como la imagen inversa también funciona correctamente con respecto a las intersecciones, el resultado anterior sigue cumpliéndose exigiendo que $\mathcal{B}$ sea subbase en lugar de base.

Ejemplo: Vamos a demostrar la continuidad de $f(x) = x^2$ sin usar ϵ ni δ. Desde luego que suponemos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y la topología usual.

Según la proposición basta demostrar que $f^{-1}\big((a,b)\big) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < f(x) < b\}$, con $a < b$, es abierto. Hay tres casos:



$f^{-1}\big((a,b)\big) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b}) \qquad f^{-1}\big((a,b)\big) = (-\sqrt{b}, \sqrt{b}) \qquad f^{-1}\big((a,b)\big) = \emptyset$

En cualquier caso $f^{-1}\big((a,b)\big)$ es abierto.

Nótese que $f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto} \not\Rightarrow f(\text{abierto}) = \text{abierto}$ porque, $f\big(f^{-1}(A)\big) \neq A$, en general.

DEFINICIÓN: Se dice que una función $f : X \longrightarrow Y$ es <u>abierta</u> si para todo abierto $\mathcal{U} \subset X$, $f(\mathcal{U})$ es abierto en Y. Análogamente, se dice que es <u>cerrada</u> si para todo cerrrado $F \subset X$, $f(F)$ es cerrado en Y.

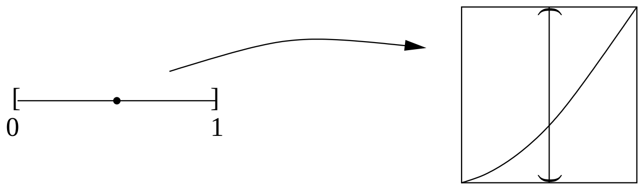
<u>Ejemplo</u>: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$, no es abierta (con la topología usual) porque $f\big((-1,1)\big) = (0,1]$. Por otra parte, se puede comprobar que f es cerrada, pero no lo haremos aquí.

<u>Ejemplo</u>: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, no es cerrada porque $\mathbb{R}$ es cerrado (ya que $\emptyset$ es abierto) pero $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ no es cerrado. Además f es abierta, porque todo abierto es unión de intervalos abiertos y $f\big((a,b)\big) = (e^a, e^b)$.

Si las topologías o los conjuntos se complican, nuestra intuición acerca de la continuidad se pierde.

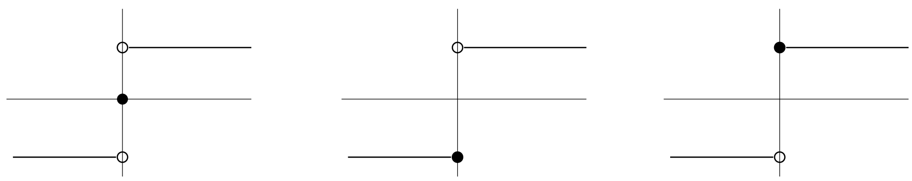
<u>Ejemplo 1</u>: Sea $X = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, entonces con la topología usual, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(1/n) = (-1)^n n$, es continua. Basta recordar que la topología (inducida por la) usual en X es la discreta, así que sea cual sea $f^{-1}(\mathcal{U})$ será abierto, porque cualquier subconjunto de X lo es.

<u>Ejemplo 2</u>: Si $Y = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico y $X = [0,1]$ con la topología usual, $f : X \longrightarrow Y$, definida por $f(t) = (t, t^2)$, no es continua. Tomando por ejemplo, la "vertical" $\mathcal{U} = \big((0'5, 0), (0'5, 1)\big)$ se tiene $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{0'5\}$ que no es abierto.



<u>Ejemplo 3</u>: La función $f(x) = x$ no es continua cuando la consideramos como $f : X \longrightarrow Y$ donde $X = (1,3] \cup (5,7)$ tiene la topología del orden e $Y = \mathbb{R}$ la usual, porque $f^{-1}\big((2,4)\big) = (2,3]$ que no es abierto en la del orden. Si diéramos a X la topología inducida por la usual, sí sería continua, y el intervalo $(2,3]$ sería abierto porque $(2,3] = (2,4) \cap X$.

<u>Ejemplo 4</u>: Consideramos $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$, con $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = -1$ y $f_3(0) = 1$. Si $f_i : X \longrightarrow Y$, $i = 1,2,3$, donde $Y = \mathbb{R}$ con la topología usual y $X = \mathbb{R}$ con la topología de límite inferior, entonces f_1 y f_2 no son continuas pero f_3 sí lo es; porque $f_1^{-1}\big([-0'5, 0'5)\big) = \{1\}$, $f_2^{-1}\big([-2,0)\big) = (-\infty, 0]$ no son abiertos mientras que $f_3^{-1}\big([a,b)\big) = \emptyset$, $[1, +\infty)$, $(-\infty, 0)$ ó $\mathbb{R}$.



Como los abiertos de la base de la topología de límite inferior son $[a, b)$ con $a < b$, sólo vemos lo que ocurre *hacia adelante*. Como ayuda a nuestra intuición podemos pensar que el eje X representa el tiempo, de manera que los únicos acontecimientos alcanzables son los del futuro inmediato y no podemos volver a lo que ya ha sucedido. Así, un observador que viajase por la gráfica de f_1 o de f_2 partiendo del punto $(0, f_1(0))$ o $(0, f_2(0))$, respectivamente, se vería obligado a saltar en el siguiente instante, pero no así el situado en $(0, f_3(0))$ viajando por la gráfica de f_3. Por ello, ni f_1 ni f_2 son continuas mientras que f_3 sí lo es ya que su aparente discontinuidad sólo es detectable yendo *hacia atrás*, hacia el pasado. De hecho se puede probar que, con estas topologías, una función f es continua si y sólo si $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, con el sentido usual del límite. Por otra parte, ni f_1 ni f_2 ni f_3 son continuas con la topología usual porque con ella sí nos podemos mover hacia adelante y hacia atrás dentro de cada abierto.

> *¿Acaso no será siempre irreversible el tiempo? Hay momentos en que uno tiene la impresión de que puede hacer lo que quiere, adelantarse o retroceder, que esto no tiene importancia; y otros en que se diría que las mallas se han apretado, y en esos casos se trata de no errar el golpe, porque sería imposible empezar de nuevo.*

Aunque sólo estamos interesados en la *continuidad global* podemos copiar la definición de continuidad en $x = a$ en espacios métricos ($\forall\epsilon\ \exists\delta : B(a,\delta) \subset f^{-1}\big(B(f(a),\epsilon)\big)$).

DEFINICIÓN: Dados $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$, se dice que f es <u>continua en el punto a</u> si para todo entorno de $f(a)$, $\mathcal{U}(f(a)) \in \mathcal{T}_Y$, existe un entorno de a, $V(a) \in \mathcal{T}_X$, tal que $V(a) \subset f^{-1}\big(\mathcal{U}(f(a))\big)$.

Teorema 3.6: *Dada una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es continua*

2) *f es continua en el punto a para todo $a \in X$*

3) *F cerrado en $Y \Rightarrow f^{-1}(F)$ cerrado en X*

4) *$A \subset X \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

<u>Dem.</u>: 1) $\Leftrightarrow$ 2) La implicación "$\Rightarrow$" es obvia. Para la otra implicación, dado $\mathcal{U}$ abierto de Y, para cada $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$ se tiene que $f(x) \in \mathcal{U}$ y por tanto existe $\mathcal{V}(x) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$. Tomando $W = \bigcup \mathcal{V}(x)$, donde x recorre $f^{-1}(\mathcal{U})$, se tiene $f^{-1}(\mathcal{U}) = W =$ abierto.

1) $\Leftrightarrow$ 3) Es una consecuencia sencilla de que el complementario de la imagen inversa es la imagen inversa del complementario. (De verdad que es fácil).

3) $\Rightarrow$ 4) Trivialmente se tiene (sin ninguna hipótesis) $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Como $\overline{f(A)}$ es cerrado, tomando clausuras se obtiene $\overline{A} \subset \overline{f^{-1}(f(A))} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ lo que implica el resultado deseado.

4) $\Rightarrow$ 3) Si F es cerrado, tomando $A = f^{-1}(F)$ se tiene $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$, por tanto $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$ y se concluye que $f^{-1}(F)$ es cerrado. ■

También se puede demostrar que f es continua $\Leftrightarrow \mathrm{Fr}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\mathrm{Fr}(A))$ (ejercicio) y hay otras muchas equivalencias.

<u>Notación:</u> Dados $A \subset X$ y $f : X \longrightarrow Y$ se suele denotar con $f\big|_A$ a la *restricción* de f a A, esto es, $f\big|_A = f \circ j$ donde $j : A \longrightarrow X$ es la inclusión $j(x) = x$. Dicho de otra forma, $f\big|_A$ es lo mismo que f pero prohibimos evaluarla fuera de A.

Algunas propiedades bastante naturales de las funciones continuas están recogidas en el siguiente resultado.

Teorema 3.7: *Sean X, Y, Z, espacios topológicos.*

1) *Si $A \subset X$, la inclusión $j : A \longrightarrow X$, $j(x) = x$, es continua.*

2) *Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ son continuas, $g \circ f : X \longrightarrow Z$ también lo es.*

3) *$f : X \longrightarrow Y \times Z$ es continua $\Leftrightarrow \pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.*

4) *(<u>Pasting Lemma</u> ¿Lema del pegado?) Si $X = A \cup B$ con A, B cerrados en X, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua $\Leftrightarrow f\big|_A$ y $f\big|_B$ lo son.*

<u>Observación:</u> Naturalmente, en los apartados 1) y 4) en los que aparecen subespacios de X, se sobreentiende que la topología que se toma es la relativa.

<u>Dem.</u>: 1) $\mathcal{U} \subset X$ abierto $\Rightarrow j^{-1}(\mathcal{U}) = j^{-1}(\mathcal{U} \cap A) = \mathcal{U} \cap A$ abierto (en la topología relativa).

2) $\mathcal{U} \subset Z$ abierto $\Rightarrow g^{-1}(\mathcal{U})$ abierto $\subset Y \Rightarrow f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{U})\big) = (g \circ f)^{-1}(\mathcal{U})$ abierto $\subset X$.

3) $\pi_1 : Y \times Z \longrightarrow Y$ y $\pi_2 : Y \times Z \longrightarrow Z$ son funciones continuas porque para cada abierto $\mathcal{U} \subset Y$ ó $\mathcal{V} \subset Z$, $\pi_1^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \times Z$, $\pi_2^{-1}(\mathcal{V}) = Y \times \mathcal{V}$, por tanto la implicación "$\Rightarrow$" se deduce de 2). Por otra parte, si $B_X \times B_Y$ es un abierto de la base, $x \in f^{-1}(B_X \times B_Y)$ si y sólo si $(\pi_1 \circ f)(x) \in B_X$ y $(\pi_2 \circ f)(x) \in B_Y$ (tras pensarlo un poco, es obvio) de donde

$$f^{-1}(B_X \times B_Y) = (\pi_1 \circ f)^{-1}(B_X) \cap (\pi_2 \circ f)^{-1}(B_Y)$$

y se deduce la otra implicación.

4) Por 1), la implicación "$\Rightarrow$" es inmediata. Para la otra, vemos que para cualquier cerrado $F \subset Y$, $f^{-1}(F) = \big(f\big|_A\big)^{-1}(F) \cup \big(f\big|_B\big)^{-1}(F)$ (trivial si uno entiende la notación), pero como $f\big|_A$ y $f\big|_B$ son continuas, $\big(f\big|_A\big)^{-1}(F)$ y $\big(f\big|_B\big)^{-1}(F)$ serán cerrados en A y en B, respectivamente. De ahí se deduce que también lo son en X porque A y B son cerrados. (A cámara lenta: $\big(f\big|_A\big)^{-1}(F)$ cerrado en $A \Rightarrow \big(f\big|_A\big)^{-1}(F) = C \cap A$ con C cerrado en X $\Rightarrow \big(f\big|_A\big)^{-1}(F)$ cerrado en X). $\blacksquare$

El nombre del cuarto apartado viene de que f es el resultado de *pegar* las funciones $f\big|_A$ y $f\big|_B$. De hecho en otras formulaciones se parte de $f_1 : A \longrightarrow Y$, $f_2 : B \longrightarrow Y$ que coinciden en $A \cap B$ y se construye f tal que $f\big|_A = f_1$, $f\big|_B = f_2$.

Ejemplo: En el último capítulo, dadas dos funciones continuas $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$, $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ con $\alpha(1) = \beta(0)$, consideraremos

$$\gamma(t) = \alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

(nótese que $\alpha(1) = \beta(0)$ implica que γ está bien definida). El cuarto apartado nos dice que como $[0,1/2]$ y $[1/2,1]$ son cerrados en $[0,1]$ y cada parte de la definición es continua, entonces γ también lo es. Para los lectores perdidos, con la notación anterior

$$X = [0,1], \qquad A = [0,1/2], \qquad B = [1/2,1], \qquad \gamma\big|_A(t) = \alpha(2t), \qquad \gamma\big|_B(t) = \beta(2t-1).$$

Ahora vamos a una de las definiciones centrales del curso, una de esas que hay que marcar con el rotulador verde *fosforito*.

DEFINICIÓN: Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Se dice que f es un homeomorfismo y que X e Y son homeomorfos si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas.

Antes de seguir, es obvio que decir que una función biyectiva, $f : X \longrightarrow Y$, es un homeomorfismo es equivalente a cualquiera de las afirmaciones citadas a continuación. Y es tan obvio, que quien necesite una demostración debería ser castigado a volver, al menos, al comienzo de la sección.

- $\mathcal{U} \subset X$ es abierto $\Leftrightarrow f(\mathcal{U}) \subset Y$ es abierto.
- f es continua y abierta.
- $F \subset X$ es cerrado $\Leftrightarrow f(F) \subset Y$ es cerrado.
- f es continua y cerrada.

Recuérdese que en todos los casos hemos dado por supuesto que f es biyectiva. Una última equivalencia más compleja es

- $\forall A \subset X \;\; f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

La cual se deduce notando que la continuidad de f y f^{-1} se traduce en que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ y $f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ para todo $A, B \subset X$. Tomando $B = f(A)$, se tiene la igualdad.

¿Por qué ese extraño nombre de *homeomorfismo*? Como otras veces, la excusa es la etimología: homeo-morfo = semejante-forma, aunque también es cierto que a la cardiode (= parecida al corazón) se la llama así y cualquiera sabe que no es exactamente de corazón de lo que tiene forma.

¿Por qué son importantes? Un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ transforma en correspondencia uno a uno los abiertos de X en los de Y y viceversa. Así que *dos espacios homeomorfos son indistinguibles desde el punto de vista topológico*, sólo difieren en el “nombre” de los abiertos. De alguna forma, la Topología estudia lo que es invariante bajo homeomorfismos, al igual que la Teoría de Grupos lo que es invariante bajo isomorfismos, la Geometría Proyectiva lo que es invariante por transformaciones proyectivas, etc. (¿alguien está de acuerdo?). Esta manera de estudiar espacios y estructuras a través de las transformaciones que los dejan invariantes es en lo que consiste el llamado *Erlanger Programm* de F. Klein.

Cuando a una función sólo le falta ser sobreyectiva para llegar a ser homeomorfismo recibe el nombre de *inmersión*, lo cual es una notación un poco ambigua en castellano.

DEFINICIÓN: Se dice que $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión si $f : X \longrightarrow \operatorname{Im} f$ es un homeomorfismo.

En los siguientes ejemplos suponemos siempre la topología usual (o la inducida por ella). Como es habitual, S^1 denota la circunferencia unidad $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ que en coordenadas polares también se puede escribir como $\{(r,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi) : r=1\}$.

Ejemplo 1: $X=[0,1]$ e $Y=[a,b]$, con $a<b$, son homeomorfos. Basta considerar la función $f(x)=(b-a)x+a$ que estira y traslada convenientemente $[0,1]$. Evidentemente f es biyectiva y continua y $f^{-1}(y)=(y-a)/(b-a)$ también lo es (así lo pone en los libros de Cálculo).

Ejemplo 2: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $f(x)=(\cos x, \operatorname{sen} x)$ no es un homeomorfismo ni una inmersión porque f no es inyectiva y por tanto no admite inversa. La continuidad de f se deduce de la de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ porque podemos considerar $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y $(\pi_1 \circ f)(x)=\cos x$, $(\pi_2 \circ f)(x)=\operatorname{sen} x$ son continuas (de nuevo apelamos a conocimientos previos de Cálculo).

Ejemplo 3: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ no es un homeomorfismo porque no es sobreyectiva, ya que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$. Sin embargo sí que es inmersión porque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+$ admite la inversa $f^{-1}(y)=\log y$ que es continua, al igual que la función.

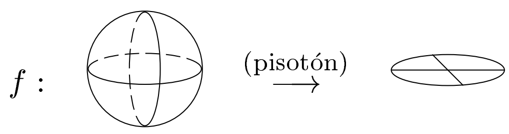
Ejemplo 4 (interesante): La función $f : X \longrightarrow Y$, con $X=[0,2\pi)$, $Y=S^1$, $f(x)=(\cos x, \operatorname{sen} x)$, es continua y biyectiva pero no es un homeomorfismo ni una inmersión. Este hecho debería extrañarnos porque los libros de introducción al Cálculo Real dicen que en $\mathbb{R}$, f continua y biyectiva $\Rightarrow f^{-1}$ continua. Pero éste es un fenómeno particular de $\mathbb{R}$ que no se extiende a otros espacios aunque sean subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con la usual.

Veamos que la inversa no es una función continua. Dicha función inversa, asigna a cada punto de S^1 el ángulo, en el rango $[0,2\pi)$ que subtiende su radiovector.

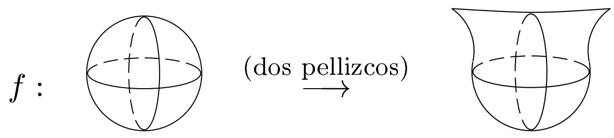
Consideremos $\mathcal{U}=[0,\pi/2)$ que es abierto en X (con la topología inducida) por ser $\mathcal{U}=(-\pi/2,\pi/2)\cap X$. Si f^{-1} fuera continua, $\left(f^{-1}\right)^{-1}(\mathcal{U})=f(\mathcal{U})$ sería abierto en Y, pero $f(\mathcal{U})$ es, en polares, $\{r=1,\ 0\le\theta<\pi/2\}$ que no es abierto porque cualquier bola abierta, $B\subset\mathbb{R}^2$, que contenga a $r=1$, $\theta=0$, contendrá también a puntos con $\theta\in(2\pi-\epsilon,2\pi)$ y por tanto $B\not\subset f(\mathcal{U})$.

<u>Ejemplo 5</u>: Los espacios $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos. Basta considerar los homeomorfismos $f(x) = \tan(\pi x/2)$ ó $f(x) = x/(1-|x|)$ ó $f(x) = x/(1-x^2)$...Procediendo como en el primer ejemplo, se tiene que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a cualquier intervalo abierto. El próximo capítulo veremos que no es homeomorfo a ninguno cerrado.

La idea intuitiva, al menos en espacios métricos, es que las funciones continuas aplican puntos muy, muy próximos en puntos muy, muy próximos y pueden pegar los pares de puntos (ejemplo 2) o acercar infinitamente un punto a otros (ejemplo 4). Sin embargo los homeomorfismos se limitan a contraer o expandir distancias sin que lleguen a colapsar; esta es la idea de la definición primera dada por A.F. Möbius en 1858 antes de que el resto de la banda la hiciera totalmente rigurosa.



f es continua (no homeomorfismo)

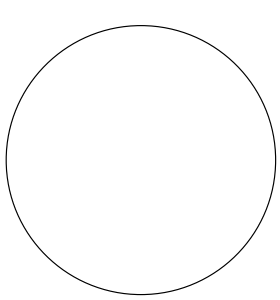


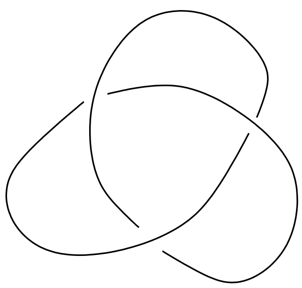
f es homeomorfismo

De modo que, en cierta manera, con las salvedades indicadas más adelante, la idea de función continua está asociada a "aplastar" y la de homeomorfismo a "encoger" o "estirar" (a veces se dice que la Topología es la Geometría de la banda de goma). No hay manera topológica de diferenciar, por ejemplo, $\diamondsuit$, $\bigcirc$, $\bigtriangledown$ y $\heartsuit$. Todos estos objetos corresponden a un mismo tipo topológico y adjetivos como poligonal, circular, triangular, cardiáceo, no tienen un significado intrínseco en Topología.

> *Creía que era posible resplandecer de odio o de muerte. ¡Qué error! Sí, realmente, pensaba que existía "el Odio", que venía a posarse en la gente y a elevarla sobre sí misma. Naturalmente, sólo existo yo, yo que odio, yo que amo. Y entonces soy siempre la misma cosa, una pasta que se estira, se estira... y es siempre tan igual que uno se pregunta cómo se le ha ocurrido a la gente inventar nombres, hacer distinciones.*

La idea intuitiva antes señalada y nuestra visión *erretresiana* muchas veces confunden el concepto de homeomorfismo con el de familia continua de homeomorfismos. Un homeomorfismo no requiere necesariamente una deformación que se vaya haciendo poco a poco. Por ejemplo, S^1 y el nudo trébol son homeomerfos (¿sabría el lector por qué?) y sin embargo si S^1 fuera de goma tendríamos que vivir en $\mathbb{R}^4$ para poder deformarlo continuamente poco a poco hasta obtener el nudo trébol. En $\mathbb{R}^3$ es imposible (pero demostrarlo es bastante difícil).

$S^1 =$ 

Nudo trébol = 

Hausdorff y cosas raras

Cuando F. Hausdorff dio su definición de topología (en 1914 en su libro "*Grundzüge der Mengenlehre*") incluyó una propiedad que no es equivalente a ninguna de las tres que nosotros hemos exigido, y era que cualquier par de puntos pudiera separarse mediante un par de abiertos.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tiene la propiedad de Hausdorff o que es un espacio T_2, si para cada pareja de puntos distintos $x, y \in X$ existen entornos disjuntos de ellos. Esto es, $\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(y) \in \mathcal{T}$ tales que $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \emptyset$.

A Hausdorff no le parecía muy decente un espacio en el que dos puntos vecinos estuvieran tan próximos que no hubiera forma de construirles casas separadas. El desarrollo ulterior de la Topología y el sadismo de los fanáticos dieron lugar a ejemplos de cierto interés en los que se podría construir cada una de las dos casas pero no las dos al mismo tiempo.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1 si para cada pareja de puntos disitntos $x, y \in X$ existen entornos $\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(y) \in \mathcal{T}$ tales que $x \notin \mathcal{V}(y)$, $y \notin \mathcal{U}(x)$.

La historia sigue y al menos existen ya T_0, T_1, T_2, $T_{5/2}$, T_3, $T_{7/2}$, T_4 y T_5 (seguramente haya más). Cuanto mayor es el subíndice más exigente es la propiedad. La "T" es la inicial de *separación* en alemán, de ahí la notación, aunque también puede influir que quien introdujo la palabra en este contexto se apellidaba Tietze. Como orientación diremos que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual las cumple todas y que algunas de ellas reflejan la posibilidad de que cada función continua definida en un cerrado admita una *extensión* continua, con ciertas propiedades, a todo el espacio. (Nota para los muy repetidores: el teorema de Hahn-Banach puede considerarse un resultado en esta dirección para espacios lineales, incluso de dimensión infinita).

Esto es lo que respecta a los axiomas llamados de separación. Veamos ahora los de numerabilidad.

Para estudiar convergencia y continuidad en espacios métricos habíamos usado en las demostraciones sucesiones de bolas abiertas, $B(x, 1/n)$ o $B(x, \epsilon_n)$, que se contraían. Es posible encontrar espacios topológicos muy raros tales que las únicas familias de abiertos que se contraen bien alrededor de un punto no son numerables; esencialmente esto provoca que las sucesiones no representen bien la topología del espacio.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ satisface el primer axioma de numerabilidad, si para cualquier $x \in X$ existe una colección numerable de abiertos $\{\mathcal{U}_1(x), \mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x), \dots\}$ tales que cualquier entorno de x, $\mathcal{U}(x)$, contiene necesariamente a alguno de ellos.

Muchas veces se dice que $\{\mathcal{U}_1(x), \mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x), \dots\}$ es una base de entornos de x porque si hacemos variar $x \in X$, la unión de estas familias da lugar a una base de la topología (ejercicio sencillo pero como esto es tan lioso pocos lo completarán).

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, si alguna de sus bases es numerable.

Seguro que el lector se pregunta el porqué de estas definiciones. Como veremos después, los espacios que no cumplen estas propiedades tienen algunas características monstruosas. Dándoles un nombre las trivializamos y podemos evitarlos en nuestros teoremas. Es lo mismo que cuando a uno le dicen que hay una curva continua $\alpha : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que rellena todo el plano ($\operatorname{Im}\alpha = \mathbb{R}^2$), puede contestar: "¡Bah!, es una curva de Peano". Ahora nos dirán que el límite de una sucesión en un espacio topológico no es único y replicaremos: "¡Bah!, no es Hausdorff".

> *Y otro encontrará que algo le raspa en la boca. Y se acercará al espejo, abrirá la boca; y su lengua se habrá convertido en un enorme ciempiés vivo, que agitará las patas y le arañará el paladar. Querrá escupirlo, pero el ciempiés será una parte de sí mismo y tendrá que arrancárselo con las manos. Y aparecerán multitud de cosas para las cuales habrá que buscar nombres nuevos: el ojo de piedra, el gran brazo tricornio, el pulgar-muleta, la araña-mandíbula.*

Casi todas las monstruosidades tienen que ver con la convergencia. Si copiamos la definición que dimos en el primer capítulo cambiando bolas abiertas por entornos, obtenemos:

Definición: Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ converge a $l \in X$ si

$$\forall \mathcal{U}(l) \in \mathcal{T} \;\; \exists N \in \mathbb{Z}^+ : n > N \;\Rightarrow\; x_n \in \mathcal{U}(l).$$

Como en los chistes, veamos primero las buenas noticias y después las malas.

- La Proposición 1.1 y la Proposición 3.4 también se cumplen espacios topológicos que satisfagan el primer axioma de numerabilidad. La demostración es un ejercicio (que nadie va a hacer).

Proposición 3.8: *Si X es Hausdorff, el límite, si existe, es único.*

Dem.: Si $x_n \to l_1$ y $x_n \to l_2$ con $l_1 \neq l_2$, tomando $\mathcal{U}_1(l_1) \cap \mathcal{U}_2(l_2) \neq \emptyset$ se llega a una contradicción con que $x_n \in \mathcal{U}_1(l_1)$, $x_n \in \mathcal{U}_2(l_2)$ a partir de cierto n. ■

Proposición 3.9: *X es T_1 si y sólo si los puntos son conjuntos cerrados.*

Dem.: $\Rightarrow$) Dado $y \neq x$, $\exists \mathcal{V}(y) : x \notin \mathcal{V}(y) \Rightarrow \mathcal{V}(y) \subset X - \{x\} \Rightarrow \{x\}$ es cerrado.

$\Leftarrow$) Basta tomar $\mathcal{U}(x) = X - \{y\}$, $\mathcal{V}(y) = X - \{x\}$ en la definición. ■

Definición: Se dice que un subconjunto A es denso en el espacio topológico X si $\overline{A} = X$.

Proposición 3.10: *Si X cumple el segundo axioma de numerabilidad entonces tiene un subconjunto numerable denso.*

Dem.: Basta elegir un punto arbitrario de cada elemento de la base. El conjunto formado por ellos es el buscado. (Ejercicio: completar los detalles). ■

Esto entra dentro de las buenas noticias porque encontrar subconjuntos densos "sencillos" es muy conveniente en muchos temas de análisis. Por ejemplo, el lema de Riemann-Lebesgue dice que para toda función integrable en $[0,1]$ se cumple

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\,dx = 0.$$

Si $f \in C^1([0,1])$ es fácil demostrarlo integrando por partes. Si supiéramos que $C^1([0,1])$ es denso en el espacio de las funciones integrables, con la (semi-)distancia $\int |f-g|$, para probar el lema de Riemann-Lebesgue sería suficiente decir (como hacen algunos libros): "Por densidad, basta considerar $f \in C^1([0,1])$ e integrar por partes. Q.E.D.".

Como la propiedad de la proposición es interesante, recibe un nombre especial.

Definición: Se dice que un espacio topológico es <u>separable</u> si tiene un subconjunto numerable denso.

Un conocido teorema debido a K. Weierstrass afirma que cualquier función continua en $[0,1]$ se puede aproximar uniformemente mediante polinomios. Como todo polinomio se puede aproximar por otro con coeficientes racionales, deducimos que las funciones continuas con la distancia $\sup|f-g|$ forman un espacio separable y que todo teorema acerca de funciones continuas que sea preservado por aproximaciones uniformes basta demostrarlo para polinomios.

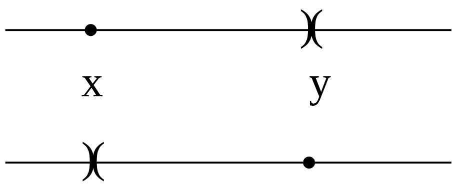
Ahora veamos una galería de los horrores de ejemplos y contraejemplos.

<u>Ejemplo</u>: El espacio $X = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ con la topología

$$\mathcal{T} = \big\{\emptyset, X, \{\spadesuit\}, \{\spadesuit,\clubsuit\}, \{\spadesuit,\clubsuit,\diamondsuit\}, \{\heartsuit\}\{\spadesuit,\heartsuit\}\{\spadesuit,\clubsuit,\heartsuit\}\big\}$$

no es Hausdorff y ni siquiera T_1, porque, por ejemplo, no existe ningún entorno de $\clubsuit$ que no contenga a $\spadesuit$. La sucesión $\spadesuit, \clubsuit, \spadesuit, \clubsuit, \spadesuit, \clubsuit, \dots$ tiene dos límites: $\clubsuit$ y $\diamondsuit$. Y la sucesión $\spadesuit, \spadesuit, \spadesuit, \spadesuit, \dots$ tiene tres límites. Esto está relacionado con que $\overline{\{\spadesuit\}} = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$ (en particular, los puntos de X no son siempre cerrados).

<u>Ejemplo</u>: $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no es Hausdorff pero sí T_1.



Para ver que es T_1 basta elegir $\mathcal{U}(x) = X - \{y\}$, $\mathcal{V}(y) = X - \{x\}$. Imaginando la forma de los abiertos es evidente que no es Hausdorff. Una prueba formal es la siguiente: $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \emptyset \Rightarrow X = X - \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \big(X - \mathcal{U}(x)\big) \cup \big(X - V(y)\big)$ y esto es imposible porque ambos conjuntos son finitos.

<u>Observación:</u> Es fácil comprobar que todo espacio métrico es T_2 (ejercicio), así que no existen distancias que induzcan las topologías indicadas en los dos ejemplos anteriores.

<u>Ejemplo</u>: La base habitual de $\mathbb{R}$ con la la topología usual no es numerable, sin embargo se satisfacen los dos axiomas de numerabilidad.

Basta comprobar el segundo que es más exigente (¿está claro?). Y para ello es suficiente verificar que la siguiente familia numerable de intervalos racionales

$$\mathcal{B} = \big\{(a,b) \, : \, a<b, \ a,b \in \mathbb{Q}\big\},$$

es una base de la usual (ejercicio). Según sabemos, debe existir un conjunto numerable denso, un ejemplo es $\mathbb{Q}$ ya que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey es un espacio separable que no satisface el segundo axioma de numerabilidad pero sí el primero.

Tomando $\mathcal{U}_n(x) = [x, x + 1/n)$ se sigue inmediatamente el primer axioma. Por otra parte, como antes, $\mathbb{Q}$ es un subconjunto numerable denso. Viendo el ejemplo anterior, uno estaría tentado a decir que se cumple el segundo axioma tomando la base

$$\mathcal{B}' = \big\{[a, b) \,:\, a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\big\},$$

pero no genera la topología de Sorgenfrey porque no existe $B(\sqrt{2}) \in \mathcal{B}'$ tal que $B(\sqrt{2}) \subset [\sqrt{2}, 2)$. La demostración de que no puede existir una base, $\mathcal{B}$, numerable es ingeniosa pero breve: Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $B_x \subset \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, +\infty)$, ahora si $y \neq x$, digamos $x < y$, se cumple $B_x \neq B_y$ porque $x \notin [y, +\infty)$. Como para números reales distintos hemos encontrado elementos de $\mathcal{B}$ distintos, el cardinal de $\mathcal{B}$ es al menos el de $\mathbb{R}$.

Observación: Se puede demostrar que si la topología de Sorgenfrey estuviera inducida por una distancia, como $\mathbb{Q}$ es denso, las bolas de centro y radio racionales formarían una base numerable (ejercicio). Como no satisface el segundo axioma, se concluye que no existe tal distancia.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no cumple el primer axioma de numerabilidad.

Aplicamos una versión en miniatura de la *prueba diagonal* de Cantor. Sean $\mathcal{U}_1(x)$, $\mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x) \dots$ como en la definición, entonces

$$\mathcal{U}_1(x) = X - A_1, \qquad \mathcal{U}_2(x) = X - A_2, \qquad \mathcal{U}_3(x) = X - A_3, \qquad \dots$$

donde A_n son conjuntos finitos. Eligiendo $y \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$, con $y \neq x$, se tiene que $\mathcal{U} = X - \{y\} \Rightarrow \mathcal{U}_1(x) \not\subset \mathcal{U}, \mathcal{U}_2(x) \not\subset \mathcal{U}, \mathcal{U}_3(x) \not\subset \mathcal{U}, \dots$ etc.

Ejemplo: Sea en $\mathbb{R}$ la topología en la que $\mathcal{U}$ es abierto si y sólo si $\mathcal{U} = \emptyset$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ ó $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ para alguna sucesión real $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, entonces no existen conjuntos numerables densos. Si A fuera uno de ellos, entonces $\mathcal{U} = \mathbb{R} - A$ sería abierto y, por tanto, $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \notin \overline{A}$. Se puede probar como antes que esta topología no cumple el primer axioma de numerabilidad.

La aproximación de puntos del cierre por sucesiones tampoco se cumple en este ejemplo. Si $A = [0, 1]$ entonces $\overline{A} = \mathbb{R}$, en particular $3 \in \overline{A}$, pero no existe $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ con $x_n \to 3$ porque $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ es un abierto que contiene a 3 pero no contiene a ningún término de la sucesión. Parece que para recuperar la Proposición 3.4 debiéramos considerar algo así como "sucesiones no numerables", esto es, indizadas por números reales en vez de por los naturales (x_r en vez de x_n), lo que da lugar a conceptos como las *redes* y otras palabrotas dignas del primer cine de terror (¿qué tal la invasión de los *ultrafiltros*?) que en cursos de Análisis de algunas ingenierías se emplean para evitar la masificación.

Para terminar, diremos a título meramente informativo, como cultura particular, que los axiomas de separación y numerabilidad están relacionados con los *teoremas de* *metrización* que nos dicen cuando un espacio topológico es metrizable (admite una distancia que induce la topología dada). Un ejemplo es un teorema de P. Urysohn de 1925 que afirma que si un espacio es T_4 (espacio en el que se pueden separar mediante abiertos, no sólo puntos, sino también cerrados disjuntos) y verifica el segundo axioma de numerabilidad, entonces es metrizable. Un famoso teorema de J. Nagata e Y. Smirnov, de principios de los 50, da condiciones necesarias y suficientes para la metrizabilidad pero es más difícil de enunciar.

4. Conexión y Compacidad

¿Qué es un conexo?

A no ser que usemos la ortografía del noroeste, la notación debiera ser autoexplicativa: conexo significa de una pieza, conectado, no separado. Ha habido varias definiciones matemáticas de este concepto (G. Cantor 1883, C. Jordan 1893, A. Schoenfliesz 1904) pero el lenguaje introducido hasta ahora nos lleva indefectiblemente a la universalmente aceptada en la actualidad (S. Mazurkiewicz 1920).

Definición: Se dice que un espacio topológico es conexo si no existen dos abiertos, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, disjuntos y no vacíos tales que $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Notación: Cuando un espacio no es conexo, se suele decir que los dos abiertos $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ con las propiedades anteriores, forman una separación.

Definición: Se dice que un subconjunto de un espacio topológico es conexo, si lo es con la topología relativa.

Con estas definiciones se sigue que el vacío siempre es conexo, pero es un caso tan especial que a veces se le excluye, aunque nosotros no lo haremos. Y es que el miedo a la nada y al vacío, tan arraigado en el pensamiento anterior (un importantísimo filósofo y matemático del siglo XVII dijo: "No se sabría suponer el vacío sin error"), se ha perdido hasta tal punto que estos conceptos son habituales en la Filosofía y Matemáticas contemporáneas.

> *Era impensable: para imaginar la nada, era menester encontrarse allí, en pleno mundo, con los ojos bien abiertos, y vivo; la nada sólo era una idea en mi cabeza, una idea existente que flotaba en esa inmensidad; esa nada no había venido 'antes' de la existencia, era una existencia como cualquier otra, y aparecida después de muchas otras.*

Ejemplo 1: $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey no es conexo. Basta escribir la separación

$$\mathbb{R} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \qquad \text{con } \mathcal{U} = (-\infty, 0), \quad \mathcal{V} = [0, +\infty).$$

Ejemplo 2: $A = (2,3] \cup [4,5)$ no es conexo en $\mathbb{R}$ con la topología usual porque se tiene la separación

$$A = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \qquad \text{con } \mathcal{U} = (2,3], \quad \mathcal{V} = [4,5).$$

Ejemplo 3: En $\mathbb{R}$ con la topología usual, $\mathbb{Q}$ no es conexo.

$$\mathbb{Q} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \qquad \text{con } \mathcal{U} = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}, \quad \mathcal{V} = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}.$$

Ejemplo 4: En cualquier espacio topológico los puntos son conexos.

Ejemplo 5: $\mathbb{R}$ con la topología cofinita es conexo. Esto es una sencilla consecuencia de que en esta topología no hay abiertos disjuntos no vacíos.

Por la propia forma de la definición es más fácil construir ejemplos de no conexos que de conexos (es más fácil romper una cosa que comprobar que no está rota). Por ello, los dos últimos ejemplos son un poco triviales. Nótese que aunque es intuitivamente evidente que $[0,1]$, $(0,1)$ o $\mathbb{R}$ son conexos con la topología usual, no está claro cuál es la demostración. En seguida la veremos pero, para fastidiar y practicar, veamos antes un par de caracterizaciones teóricas de la conexión.

Proposición 4.1: *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *X es conexo.*

2) *Los únicos subconjuntos de X simultáneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.*

3) *No existe ninguna función $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ continua y sobreyectiva.*

Observación: En 3) se da por supuesto que la topología en $\{0,1\}$ es la inducida por la usual, que coincide con la discreta.

Dem.: Como ya hemos comentado, es más sencillo hablar teóricamente de la no conexión que de la conexión, por ello probaremos todas las implicaciones utilizando la tautología $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$.

1) $\Rightarrow$ 2) Si hubiera un subconjunto $\mathcal{U} \subset X$ abierto y cerrado distinto del vacío y del total, entonces $\mathcal{V} = X - \mathcal{U}$ también lo sería y se tendría que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$ es una separación de X.

2) $\Rightarrow$ 3) Si existiera la función indicada, se tendría $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset, X$ (por ser sobreyectiva) y como $\{0\}$ es abierto y cerrado en $\{0,1\}$ (la topología es la discreta) y f es continua, se sigue que $f^{-1}(\{0\})$ es abierto y cerrado.

3) $\Rightarrow$ 1) Si existiera una separación, $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, entonces la función sobreyectiva $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ definida como

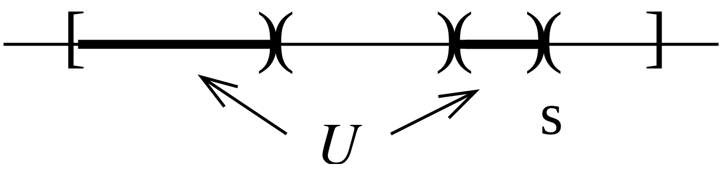
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{U} \\ 1 & \text{si } x \in \mathcal{V} \end{cases}$$

sería continua por el *Pasting Lemma* (Teorema 3.7.4) tomando $A = X - \mathcal{V} = \mathcal{U}$, $B = X - \mathcal{U} = \mathcal{V}$. ∎

La demostración de que $[0,1] \subset \mathbb{R}$ es conexo es la base para el estudio de la conexión en $\mathbb{R}$ con la usual.

Lema 4.2: *El intervalo $[0,1]$ es conexo con la topología usual.*

Dem.: Sea $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = [0,1]$ una separación, donde $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos en la topología relativa. Podemos suponer $1 \in \mathcal{V}$ ya que en otro caso bastaría intercambiar los nombres de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$. Sea $s = \sup\{x \in \mathcal{U}\}$. Obviamente $s \in [0,1]$. Podemos suponer también $s \neq 0, 1$ ya que estos casos llevan fácilmente a contradicción ($s = 0$ implicaría $\mathcal{V} = [0,1]$ y $s = 1$ implicaría, que $\mathcal{V}$ no es abierto porque no existiría ningún entorno de 1 contenido en $\mathcal{V}$).



Si $s \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{U}$ es abierto, existe un ϵ tal que $s \in (s-\epsilon, s+\epsilon) \subset \mathcal{U}$ y se tendría una contradicción porque $s < s+\epsilon/2 \in \mathcal{U}$ y s no sería cota superior de $\mathcal{U}$. De la misma forma, si $s \in \mathcal{V}$ entonces $s \in (s-\epsilon, s+\epsilon) \subset \mathcal{V}$ y $s-\epsilon/2$ sería también cota superior para $\mathcal{U}$ y por tanto s no sería mínima. En definitiva, $s \notin \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ lo que contradice que sea una separación. ■

En realidad la misma demostración sirve para extender el resultado.

Proposición 4.3: *Cualquier intervalo (abierto, cerrado, semiabierto, finito o infinito) es conexo en* $\mathbb{R}$ *con la topología usual.*

Observación: Se considera que $\mathbb{R}$ es un tipo de intervalo infinito, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. La manera de tratar con intervalos infinitos es considerar dos puntos que pertenezcan a cada uno de los abiertos de la separación y que desempeñen el papel de 0 y 1 en la demostración anterior.

Si $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo y tiene más de un punto, existen $a < b < c$ con $a, c \in A$, $b \notin A$. Con lo cual, $A = \big((-\infty, b) \cap A\big) \cup \big((b, +\infty) \cap A\big)$ es una separación. Por tanto todavía podemos redondear más los resultados anteriores.

Teorema 4.4: *Con la topología usual* $A \subset \mathbb{R}$ *es conexo si y sólo si* $A = \emptyset$, $A = \{x\}$ *o* A *es un intervalo.*

Una vez que una misma demostración más o menos sencilla ha servido para demostrar varias cosas, se utiliza el viejo truco en Matemáticas, que se podría llamar "tener oficio" o "experiencia", consistente en inventarse construcciones abstractas (a veces muy abstractas) donde se pueda aplicar la misma demostración conocida que a uno no se le habría ocurrido. Esto sirve, al menos, para que las hemerotecas de las facultades estén llenas de artículos de investigación independientemente de los progresos que se hagan.

> *¿Profesionales de la experiencia?* [...] *Todo lo que pasaba a su alrededor empezó y concluyó fuera de su vista; largas formas oscuras, acontecimientos que venían de lejos los rozaban rápidamente, y cuando quisieron mirar, todo había terminado ya. Y a los cuarenta años bautizan sus pequeñas obstinaciones y algunos proverbios con el nombre de experiencia; comienzan a actuar como distribuidores automáticos: dos céntimos en la ranura de la derecha y se obtienen preciosos consejos que se pegan a los dientes como caramelos blandos.*

Lo dicho. Nos inventamos un sitio donde repetir la demostración del lema. Primero necesitamos que exista un orden en el que se pueda hallar el supremo y después que se pueda *meter* un elemento entre otros dos ($s-\epsilon/2$ entre $s-\epsilon$ y s ó $s+\epsilon/2$ entre s y $s+\epsilon$).

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico X con la topología del orden es un continuo lineal si se cumple:

1) X tiene la propiedad del supremo.

2) Si $x, y \in X$ con $x < y$, entonces existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Observación: Recordamos que la propiedad del supremo afirma que todo subconjunto de X acotado superiormente (por un elemento de X) admite una cota superior mínima (supremo) en X.

La copia de la proposición anterior es:

Proposición 4.5: *En un continuo lineal cualquier intervalo es conexo.*

Observación: De nuevo se admiten los conjuntos $\{x \in X : x > a\}$, $\{x \in X : x < a\}$, $\{x \in X : x \geq a\}$, $\{x \in X : x \leq a\}$, X, los cuales se consideran intervalos "infinitos".

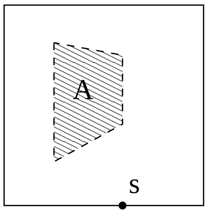
Ejemplo: $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico es conexo. La segunda propiedad de continuo lineal es obvia. La primera requiere pensarla un poco más. Si $A \subset X$ y s_x es el supremo de las equis, esto es, $s_x = \sup\{x : (x,y) \in A\}$, y la vertical $x = s_x$ tiene intersección no vacía con A, entonces

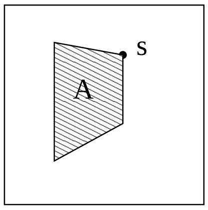
$$\text{supremo de } A = (s_x, \sup\{y : (s_x, y) \in A\}).$$

Si la intersección es vacía el supremo es

$$\text{supremo de } A = (s_x, 0).$$

En cualquier caso siempre existe.





Ejemplo: $X = (-1,0] \cup [1,2)$ no es un continuo lineal (con el orden usual) porque $0, 1 \in X$ pero no existe $z \in X$ tal que $0 < z < 1$. De hecho, X no es conexo porque $(-1,0]$ y $[1,2)$ forman una separación. Nótese que ambos son abiertos en la topología del orden: $(-1,0] = \{x \in X : x < 1\}$ y $[1,2) = \{x \in X : x > 0\}$.

Ejemplo: $X = (-1,0] \cup (1,2)$ es un continuo lineal y por tanto conexo con la topología del orden. La segunda propiedad es obvia. La propiedad del supremo esencialmente se sigue de la de $\mathbb{R}$ siempre que el subconjunto considerado, A, esté "separado" del extremo derecho $x = 2$. Pero, ¿por qué podemos suponerlo así? ¿por qué $A = (1,2) \subset X$ no contradice la propiedad del supremo? Evidentemente $A = (1,2)$ no tiene supremo, pero tampoco está acotado superiormente por ningún elemento de X, así que no invalida la propiedad del supremo.

Obviamente ninguno de los dos espacios anteriores es conexo con la usual.

Como debiera estar claro a estas alturas, un espacio es conexo si no está roto en trozos. Para caracterizar matemáticamente dichos trozos, podemos decir que dos puntos pertenecen al mismo trozo (están relacionados) si existe un conexo en el que están contenidos. La definición rigurosa da un poco de miedo pero no mucho.

Definición: Sea $\sim$ la relación de equivalencia en un espacio topológico X dada por $x \sim y \Leftrightarrow \exists A \subset X$ conexo con $x, y \in A$. Se llaman componentes conexas de X a cada una de las clases de equivalencia.

Observación: Se puede probar que la componente conexa de A a la que pertenece $x \in A$ es el mayor (en el sentido de la inclusión) subconjunto conexo de A que contiene a x (ejercicio).

Ejemplo: $X = (2,3) \cup [5,6)$ tiene dos componentes conexas (con la topología usual): $C_1 = (2,3)$ y $C_2 = [5,6)$ porque cada par de puntos $x, y \in C_1$ o $x, y \in C_2$ están dentro del conexo C_1 o C_2, y si $x \in C_1$, $y \in C_2$ no existe $A \subset X$ conteniendo a ambos (¿por qué? Demostrarlo rigurosamente).

Si uno se inventa muchos ejemplos, parece que las componentes conexas son siempre abiertas, pero no es cierto.

Ejemplo: En $X = \mathbb{Q}$ (con la topología usual) las componentes conexas son los puntos. La razón es simplemente que los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$ son los puntos (y el vacío) ya que si $A \subset \mathbb{Q}$ tiene al menos dos puntos, $x < y$, tomando $x < z < y$ con $z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\big((-\infty, z) \cap A\big) \cup \big((z, +\infty) \cap A\big)$ sería una separación.

Un circo de conexos, aros en llamas y tartas

Ahora que tenemos el juguete nuevo de la definición de conexión, veremos en esta sección cómo funciona, cómo se articula ante las manipulaciones que conocemos. Además terminaremos obteniendo un resultado notable que puede aplicarse para justificar algunas afirmaciones no matemáticas. Aunque según dijo un filósofo ilustre e ilustrado: "Hay que confesar que los inventores de las artes mecánicas han sido más útiles a la humanidad que los inventores de silogismos".

Romper no es una transformación continua, así que las funciones continuas deben respetar las cosas de una pieza.

Proposición 4.6: *Si X es conexo y $f : X \longrightarrow Y$ es continua, entonces $f(X) = \operatorname{Im} f$ es conexo.*

Dem.: Si $\operatorname{Im} f = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ fuera una separación de $\operatorname{Im} f$, entonces $f^{-1}(\mathcal{U}) \cup f^{-1}(\mathcal{V})$ lo sería de X. ■

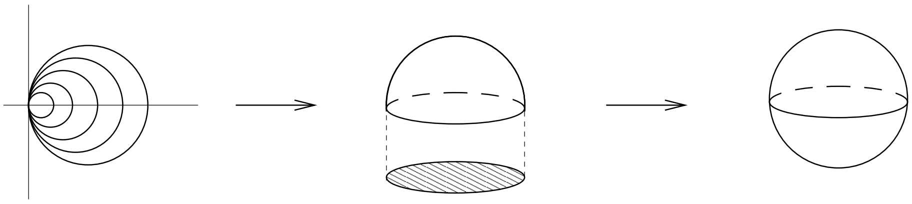
Ejemplo: S^1 es conexo (con la topología usual) porque es la imagen de la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x) = \big(\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)\big)$.

Si pegamos entre sí cosas que son de una pieza, el resultado sigue siendo de una pieza.

Proposición 4.7: *Si $A_\alpha \subset X$ son subconjuntos conexos y $\bigcap A_\alpha \neq \emptyset$ entonces $\bigcup A_\alpha$ es conexo.*

Dem.: Supongamos que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = \bigcup A_\alpha$ fuera una separación y sea $x \in \bigcap A_\alpha$. Podemos suponer (quizá intercambiando los nombres) $x \in \mathcal{U}$. Debe cumplirse $A_\alpha \subset \mathcal{U}$, porque si no $(A_\alpha \cap \mathcal{U}) \cup (A_\alpha \cap \mathcal{V})$ sería una separación de A_α. Pero si cualquier A_α está contenido en $\mathcal{U}$, lo mismo ocurre con $\bigcup A_\alpha$ y por tanto $\mathcal{V} = \emptyset$. ■

Ejemplo: Como en el ejemplo anterior, cada circunferencia $C_r = \{(x,y) : (x-r)^2 + y^2 = r^2\}$ con $0 < r \leq 1$, es conexa, por tanto el círculo $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ (que es la unión de ellas) también lo es.

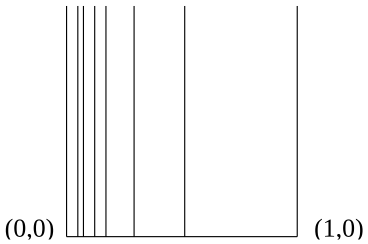


Una vez que sabemos que un círculo es conexo, mediante aplicaciones continuas, sabemos que todos lo son. De la conexión de $\overline{B}\big((0,1),1\big)$ y las funciones $f_+, f_- : \overline{B}\big((0,1),1\big) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $f_\pm = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, se sigue que la parte superior e inferior de una esfera son conexos y, por la proposición anterior, la superficie esférica también lo es. Más adelante veremos una demostración más directa.

Ejemplo: Se llama espacio peine al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual:

$$P = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1]).$$

Para los que no estén acostumbrados a tantos productos cartesianos, no es más que un peine con mango entre $(0,0)$ y $(1,0)$ y púas de longitud uno sobre $(0,0)$ y cada punto de la forma $(1/n,0)$.



Cualquier púa es conexa (es como $[0,1]$) y la unión de ella con el mango también lo es (por la proposición). Como P es la unión de todos estos peines *unipúa*, de nuevo por la proposición, es conexo.

Proposición 4.8: *Si $A \subset X$ es un subconjunto conexo entonces cualquier subconjunto $B \subset X$ con $A \subset B \subset \overline{A}$, es también conexo.*

Dem.: Si $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ fuera una separación de B, entonces $A \subset \mathcal{U}$ ó $A \subset \mathcal{V}$ (en otro caso $(A \cap \mathcal{U}) \cup (A \cap \mathcal{V})$ sería una separación de A). Digamos que $A \subset \mathcal{U}$, entonces $\overline{A} \subset X - \mathcal{V}$ porque $X - \mathcal{V}$ es cerrado y contiene a A. Pero esto implicaría $B \subset X - \mathcal{V}$ y por tanto $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ no sería una separación. ■

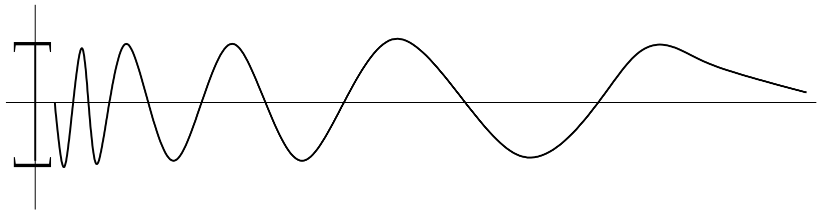
Corolario 4.9: *Si A es conexo, $\overline{A}$ también lo es.*

Corolario 4.10: *Las componentes conexas de un espacio topológico son conjuntos cerrados.*

Dem.: Si C es una componente conexa, es conexa (¿por qué? No es totalmente obvio) y, por el corolario anterior, $\overline{C}$ también es conexo. Pero esto implica que $\overline{C} \subset C$ (ya que $x \sim y$ para todo $x, y \in \overline{C}$) y en consecuencia $\overline{C} = C$. ■

Ejemplo: El subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (con la topología usual) definido como

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\ y = \operatorname{sen}(1/x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = 0,\ y \in [-1,1]\}$$



es conexo, porque $S = \overline{A}$ con $A = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \,:\, x > 0\}$ y A es conexo porque es la imagen de la función continua $f \,:\, (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con $f(t) = (t, \operatorname{sen}(1/t))$.

Notación: A veces se llama al conjunto S o a algunas pequeñas variaciones de él, curva seno del topólogo porque sirve para que los topólogos den algunos ejemplos y contraejemplos.

Proposición 4.11: *Sean X_1, X_2,..., X_n espacios topológicos (no vacíos). El espacio producto $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ es conexo si y sólo si X_1, X_2,..., X_n lo son.*

Observación: Este resultado también se extiende a productos cartesianos infinitos, pero como ni siquiera hemos definido la topología producto en el caso infinito, no entraremos en ello.

Dem.: $\Rightarrow$) Es una consecuencia directa de que las proyecciones π_1, π_2,..., π_n son continuas (véase la demostración del Teorema 3.7).

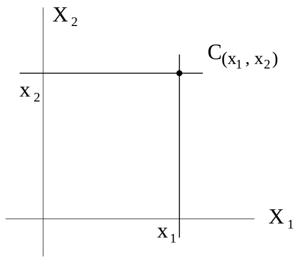
$\Leftarrow$) Basta probarlo para $n = 2$ y aplicar inducción (repetir el razonamiento $n-1$ veces).

Sean $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$. Como X_1 y X_2 son conexos, $X_1 \times \{x_2\}$ y $\{x_1\} \times X_2$ también lo son, simplemente porque

$$\begin{array}{rcl} X_1 & \longrightarrow & X_1 \times \{x_2\} \\ x & \longmapsto & (x, x_2) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} X_2 & \longrightarrow & \{x_1\} \times X_2 \\ x & \longmapsto & (x_1, x) \end{array}$$

son continuas (de hecho homeomorfismos). Por tanto el subconjunto "cruz centrada en (x_1, x_2)"

$$C_{(x_1,x_2)} = \big(X_1 \times \{x_2\}\big) \cup \big(\{x_1\} \times X_2\big)$$



es también conexo. Moviendo la parte "horizontal" y dejando la "vertical" fija, se obtiene todo el espacio producto:

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x_2 \in X_2} C_{(x_1,x_2)}.$$

Como $X_1 \times X_2$ es unión de conexos con puntos en común (los de $\{x_1\} \times X_2$), también es conexo. ■

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ es conexo con la usual ya que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

Ejemplo: El subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $(0,1] \times (0,1] \cup \{(0,0)\}$ es conexo con la usual porque está entre $(0,1) \times (0,1)$ y su cierre, y como cada intervalo es conexo su producto también.

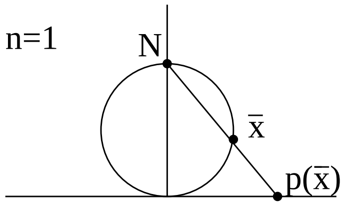
Ejemplo: La frontera de la bola unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$

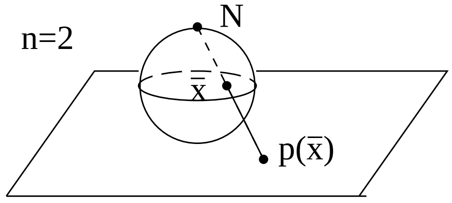
$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\},$$

con $n \geq 1$ es conexa (con la topología usual).

Para comprobarlo tenemos que recordar (o aprender) que la *proyección estereográfica* es una función continua $p : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $N = (1, 0, \ldots, 0)$. La "receta" es que poniendo $\mathbb{R}^n$ justo debajo de S^n, p aplica cada punto de $S^n - \{N\}$ en la intersección con $\mathbb{R}^n$ de la recta que une dicho punto con el *polo norte*, N (a veces p se extiende a

$\widetilde{p} : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ donde $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ tiene una topología que se introducirá más adelante). De las sencillas fórmulas analíticas racionales para p y p^{-1} se deduce inmediatamente que p es un homeomorfismo.





$$p(x,y) = \frac{2x}{1-y}, \qquad p(x,y,z) = \Big(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}\Big),$$

$$p^{-1}(a) = \Big(\frac{4a}{a^2+4}, \frac{a^2-4}{a^2+4}\Big), \qquad p^{-1}(a,b) = \Big(\frac{4a}{a^2+b^2+4}, \frac{4b}{a^2+b^2+4}, \frac{a^2+b^2-4}{a^2+b^2+4}\Big).$$

Como $\mathbb{R}^n$ es conexo , $\operatorname{Im} p^{-1} = S^n - \{N\}$ es conexo y $S^n = \overline{S^n - \{N\}}$ también lo es. En general, $\mathbb{R}^n$ y $S^n - \{N\}$ son indistinguibles topológicamente.

Observación: Aunque no tenga que ver con el curso, para amortizar el título de Doctor diremos que p^{-1} aplica vectores racionales en vectores racionales de norma uno. El caso $n = 1$ es interesante para que los que dan clases particulares se inventen problemas de trigonometría en los que el coseno y el seno sean exactos (sin raíces). Basta tomar $a \in \mathbb{Q}$

$$a = 1 \;\Rightarrow p^{-1}(1) = \Big(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\Big) \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5},\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{-3}{5}$$

$$a = 3 \;\Rightarrow p^{-1}(3) = \Big(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\Big) \qquad \cos\alpha = \frac{12}{13},\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$$

$$a = \frac{10}{3} \;\Rightarrow p^{-1}\Big(\frac{10}{3}\Big) = \Big(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\Big) \qquad \cos\alpha = \frac{15}{17},\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{17}$$

Como aplicación, si uno quiere hallar las soluciones enteras (no nulas) de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ puede escribir

$$x^2 + y^2 = z^2 \;\Leftrightarrow\; \Big(\frac{x}{z}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{z}\Big)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists\alpha \,:\, \cos\alpha = \frac{x}{z},\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{z}.$$

Como sabemos hallar cosenos y senos exactos, sabemos hallar muchas soluciones enteras de $x^2 + y^2 = z^2$ (de hecho todas, si utilizamos $\widetilde{p}$).

$$4^2 + (-3)^2 = 5^2, \qquad 12^2 + 5^2 = 13^2, \qquad 15^2 + 8^2 = 17^2, \ldots$$

¿Podrían aplicarse ideas parecidas a $x^n + y^n = z^n$ para demostrar de manera elemental el Último Teorema de Fermat?

–Bueno... me parece muy interesante.
–¿Lo ha leído ya en alguna parte?
–Por supuesto que no.
–¿De veras, nunca, en ninguna parte? Entonces, señor –dice, entristecido–, es que no es verdad. Si fuera verdad alguien lo habría pensado ya.

Para terminar veamos una serie de *aplicaciones* de la conexión.

Teorema 4.12: (Teorema de los valores intermedios). *Sea X un espacio topológico conexo e Y un espacio topológico con la topología del orden y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si $x_1, x_2 \in X$ cumplen $f(x_1) < f(x_2)$, para cualquier $y \in Y$ con $f(x_1) < y < f(x_2)$ existe $x_3 \in X$ tal que $y = f(x_3)$.*

Dem.: Si no fuera así, $y \notin \operatorname{Im} f$ y por tanto

$$\big(\{z \in Y \, : \, z < y\} \cap \operatorname{Im} f\big) \cup \big(\{z \in Y \, : \, z > y\} \cap \operatorname{Im} f\big) = \operatorname{Im} f$$

sería una separación de $\operatorname{Im} f$, lo cual no es posible si X es conexo. ■

Observación: Tomando $X = [a, b]$, $Y = \mathbb{R}$ este es el Teorema de Bolzano que aparece en los libros de Cálculo de primero.

Una vez que hemos probado que cuando se sabe mucho se pueden demostrar rápidamente cosas fáciles diciendo unas pocas palabras difíciles, veamos algunas consecuencias. Es notable que de un resultado intuitivamente tan trivial (el teorema de Bolzano) deduzcamos directamente otras que no lo son. Como ya le explicó el mismo Pero Grullo a uno de nuestros poetas, sus verdades y profecías contienen gran parte de la sabiduría del siglo.

Corolario 4.13: (Borsuk-Ulam para $n = 1$). *Si $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, existen dos puntos antipodales (opuestos) de S^1 que tienen la misma imagen.*

Dem.: Nombremos cada punto de S^1 por su ángulo en radianes, θ, de modo que el antipodal corresponde a $\theta + \pi$. Consideremos la función $F(\theta) = f(\theta) - f(\theta + \pi)$. Como $f(0) = f(2\pi)$, $F(0) = -F(\pi)$ y por el teorema de los valores intermedios, si $F(0)$ y $F(\pi)$ tienen signos distintos existe $\theta \in [0, \pi]$ con $F(\theta) = 0$. ■

Una manera más pintoresca de enunciar este resultado es:

> *Si calentamos un aro circular siempre existen dos puntos opuestos con igual temperatura.*

El teorema se puede extender a dimensiones mayores (Teorema de Borsuk-Ulam) y concluir, por ejemplo, que en la superficie de la Tierra siempre existen dos puntos opuestos con iguales presiones e iguales temperaturas, pero esto es sorprendentemente difícil de probar (no es un ejercicio si uno no se llama Borsuk o Ulam, que lo demostraron en 1933). En el próximo capítulo daremos una prueba usando técnicas de Topología Algebraica (que para nosotros, débiles discípulos, son tan poderosas como la de Kaito).

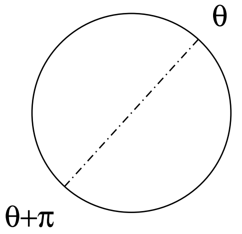
Otra consecuencia del teorema de los valores intermedios es:

> *Es posible cortar por la mitad, con un solo corte de cuchillo, una tarta circular adornada con chocolate de manera que cada mitad tenga la misma cantidad de chocolate.*

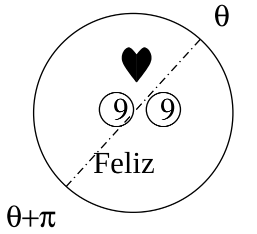
El resultado se extiende a tartas no circulares, en las que los cortes por la mitad no son diametrales, pero la demostración es más difícil (véase el problema del reparto de la finca en J. Margalef, E. Outerelo "*Introducción a la Topología*" Ed. Complutense 1993).

La demostración del resultado tal como está establecido aquí, es análoga a la del corolario anterior pero tomando

$$F(\theta) = \text{ Chocolate en la mitad de } \theta \text{ a } \theta+\pi - \text{ Chocolate en la mitad de } \theta+\pi \text{ a } \theta.$$



$f(\theta) - f(\theta+\pi)$



$Ch(\theta) - Ch(\theta+\pi)$

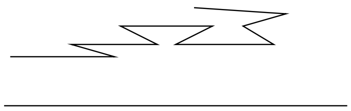
También se puede obtener un teorema de punto fijo.

Corolario 4.14: (Teorema de Brouwer para $n = 1$). *Si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua, admite un punto fijo, esto es, existe $x \in [0,1]$ con $f(x) = x$.*

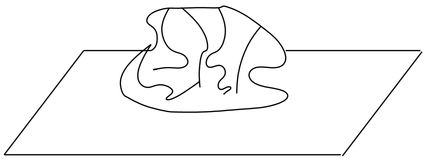
Dem.: Considerando $F(x) = f(x) - x$ se tiene $F(0) \geq 0$, $F(1) \leq 0$ y se puede proceder como antes. ■

Una posible interpretación es:

> *Si tenemos dos cintas métricas de igual longitud y doblamos una de ellas sobre sí misma cuantas veces queramos y las superponemos una sobre otra, hay un punto que no ha variado de lugar* (1).



(1)



(2)

Aunque esto parece increíble es cierto. Más increíble todavía es su generalización a dimensiones mayores (Teorema de Brouwer). Por ejemplo, por mucho que arruguemos una hoja de papel, cuando la pongamos sobre el cuaderno habrá un punto cuya proyección no ha cambiado de lugar (2). Al final del curso conseguiremos, con mucha maquinaria, una demostración de esta afirmación. De nuevo, tendremos que esperar a la llegada de la Topología Algebraica para demostrarlo.

La familia de conexos se multiplica

Hasta ahora hemos considerado que un espacio no está roto si no se puede separar en dos trozos (abiertos). También podríamos decir que podemos pasear de un punto a otro del conjunto, o que los habitantes de este espacio, hasta donde llega la vista, no ven ningún trozo roto o ningún punto a donde no pueden ir paseando.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico, X, es conexo por caminos o conexo por arcos o arcoconexo, si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un camino conectando x e y, esto es, una función continua $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ con $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Observación: Fuera del formalismo topológico actual, la conexión por caminos es más natural que la conexión y, de hecho, fue introducida antes (K. Weierstrass, alrededor de 1880).

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico, es localmente conexo si para cada entorno de un punto, $\mathcal{U}(x)$, existe un entorno conexo $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}(x)$.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico, es localmente conexo por caminos si para cada entorno de un punto, $\mathcal{U}(x)$, existe un entorno conexo por caminos $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}(x)$.

Ahora, aquí tendría que venir el teorema bonito que nos dijese que todas las formas de ver que algo no está roto son equivalentes, pero la realidad es mucho más caótica y plena de contraejemplos.

> *"Hace buen tiempo, el mar es verde, prefiero este frío seco a la humedad." ¡Poetas! Si cogiera a uno por las solapas del abrigo, si le dijera "ven en mi ayuda", pensaría: "¿Qué es este cangrejo?" y huiría dejándome el abrigo entre las manos.*
>
> *Les vuelvo la espalda, me apoyo con las dos manos en la balaustrada. El verdadero mar es frío y negro, lleno de animales; se arrastra bajo esta delgada película verde hecha para engañar a las gentes.*

Casi lo único que se salva son los dos resultados siguientes.

Proposición 4.15: *Si X es conexo por caminos entonces es conexo.*

Observación: Obviamente de este resultado se sigue que *localmente conexo por caminos* $\Rightarrow$ *localmente conexo*, pero es una consecuencia tan trivial que no merece el honor de ser destacada como corolario.

Dem.: Si $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ fuera una separación de X y $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ fuera un camino conectando un punto de $\mathcal{U}$ con otro de $\mathcal{V}$, esto es $\gamma(0) \in \mathcal{U}$, $\gamma(1) \in \mathcal{V}$, llegaríamos a que $\gamma^{-1}(\mathcal{U}) \cup \gamma^{-1}(\mathcal{V})$ es una separación de $[0,1]$, lo cual es imposible. ■

Ejemplo: Todos los subconjuntos convexos (no sobra una "v") de $\mathbb{R}^n$ son obviamente conexos por caminos y por tanto conexos (recuérdese que convexo quiere decir que la recta que une cada par de puntos del conjunto está contenida en él). En particular la bola unidad es conexa, con lo cual podemos tirar a la basura la demostración enrevesada de que el disco unidad es conexo, dada en la sección anterior.

Proposición 4.16: *Si X es conexo y localmente conexo por caminos entonces es conexo por caminos*

Dem.: Dado $x_0 \in X$ definimos

$$A = \{x \in X \ : \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X \text{ continua con } \gamma(0) = x_0, \ \gamma(1) = x\}.$$

Por una parte, A tiene que ser abierto porque si $y \in A$ entonces la conexión local por caminos implica que existe un entorno $\mathcal{U}(y)$ conexo por arcos y por tanto $\mathcal{U}(y) \subset A$. (Nótese que podemos *pegar* dos caminos recorriendo primero uno y después otro como mencionamos en un ejemplo tras el Teorema 3.7).

Por otra parte, A debe ser cerrado porque si $y \in \overline{A}$ existe un entorno conexo por arcos $\mathcal{U}(y) \cap A \neq \emptyset$ y podemos conectar y con un punto de $\mathcal{U}(y) \cap A \subset A$ y éste con x_0.

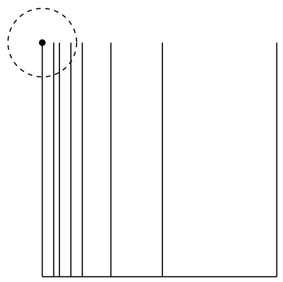
Como $A \neq \emptyset$ ($x_0 \in A$) es abierto y cerrado y X es conexo, la única posibilidad es $A = X$. ■

Es posible encontrar ejemplos escandalosamente sencillos de que la conexión local no implica conexión.

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ con la topología usual, la unión de dos intervalos disjuntos, por ejemplo $A = (0,1) \cup (2,3)$, es obviamente no conexo pero cada punto está contenido en un entorno conexo: el intervalo al que pertenece.

Un poco más difícil es ver que conexo no implica localmente conexo. Hay que buscar un espacio de una sola pieza pero que a un miope le parezca que está roto.

Ejemplo: El espacio peine (véase la sección anterior) es, como habíamos visto, conexo. ¿Qué vería un miope situado en $(0,1)$?

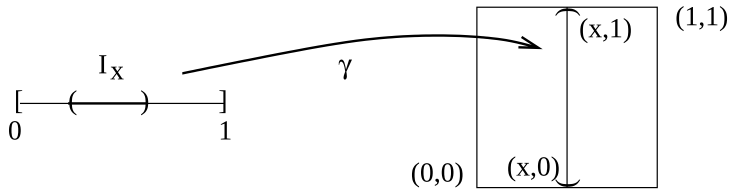


Si tomamos una pequeña bola situada en $(0,1)$ no podemos encontrar un abierto dentro de ella que sea conexo y contenga a $(0,1)$. La razón es clara: Dicho abierto debe contener algún punto de la forma $(1/n, 1)$, el cual pertenece a una componente conexa del abierto distinta de la de $(0,1)$, así que no puede ser conexo. (Ejercicio: escribir la demostración con detalle hasta que uno se aburra o esté seguro de que la puede terminar).

Ejemplo: La curva seno del topólogo (véase la sección anterior) también es conexa pero no localmente conexa. El razonamiento es idéntico al anterior, aunque puede que la demostración con todo rigor nos parezca más complicada.

Por último veamos que conexo no implica conexo por caminos.

Ejemplo: $X = [0,1] \times [0,1]$ con el orden lexicográfico es conexo pero no conexo por caminos.



La idea no es tan complicada como parece en una primera lectura. Si existiera $\gamma : [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1) = (1,1)$, γ tendría que pasar por todos los valores intermedios, esto es $\operatorname{Im}\gamma = X$. Entonces para cada "intervalo vertical" en X, $\mathcal{U}_x = \big((x,0),(x,1)\big)$, $\gamma^{-1}(\mathcal{U}_x)$ sería un abierto no vacío y podríamos encontrar un intervalo abierto $I_x \subset [0,1]$ tal que $\gamma(I_x) \subset \mathcal{U}_x$. Como los I_x son disjuntos, tendríamos que $[0,1]$ contiene a una unión no numerable de intervalos disjuntos y esto parece imposible. Para cambiar "parece" por "es", podemos escoger un número racional arbitrario, r_x, de cada I_x, con ello tendríamos

$$x \in [0,1] \longmapsto I_x \longmapsto r_x \in \mathbb{Q}$$

que es una aplicación inyectiva de $[0,1]$ (conjunto no numerable) en $\mathbb{Q}$ (conjunto numerable), lo cual es una contradicción. (Léase todo de nuevo hasta creerse la primera frase del párrafo).

Observación: El ejemplo anterior también prueba que localmente conexo no implica localmente conexo por caminos. (Ejercicio: Tomarse dos analgésicos y contestar por qué).

Un poco de cultura matemática (para descansar): ¿No ha sentido el lector un desasosiego desconfiado en la demostración anterior al introducir r_x? Son los resabios del "axioma de elección", o su equivalente el "lema de Zorn", que afirma que podemos escoger un elemento de cada subconjunto de un conjunto (sea o no numerable). Aunque de aspecto inocente y aunque K. Gödel probó que si las Matemáticas no llevan a contradicción sin él tampoco con él, todos sentimos algo en nuestro interior diciendo "no *zornicar*" frente a la libre elección. En general se prefieren, cuando se conocen, pruebas que no usen el axioma de elección, llamadas "constructivas". Además suponiéndolo se deducen cosas tan raras como que hay subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^3$ de los que es imposible definir el volumen o el teorema de Banach-Tarski, que dice cómo dividir una esfera en unos cuantos de estos subconjuntos y volverlos a unir para obtener dos esferas. Una referencia legible y simpática es el artículo: R.M. French "*The Banach-Tarski Theorem*" Mathematical Intelligencer 10, 4 pp 21-28 (1988).

Ejemplo: Consideremos el espacio $\mathcal{P}$ que consiste en quitarle la púa más a la izquierda al espacio peine pero dejando los extremos. Esto es,

$$\mathcal{P} = P - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < y < 1,\ x = 0\}.$$

Entonces $\mathcal{P}$ es conexo pero no es conexo por caminos. La demostración tiene su interés porque se aplica en varias situaciones.

Un breve argumento indirecto para ver que $\mathcal{P}$ es conexo pasa por considerar

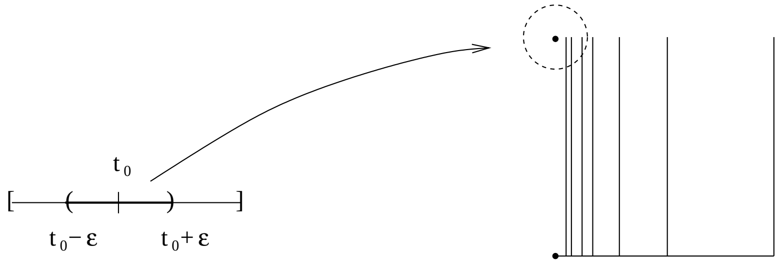
$$\mathcal{P}_* = P - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le 1,\ x = 0\}.$$

Este conjunto es conexo por caminos y por tanto conexo. Como $\mathcal{P}_* \subset \mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{P}_*} = P$, se deduce que $\mathcal{P}$ también es conexo. Ahora, si $\mathcal{P}$ fuera conexo por caminos existiría $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ con $p = (0,1)$, $q = (1,0)$. Sea $A = \gamma^{-1}(\{p\})$, A es no vacío ($0 \in A$) y cerrado porque $\{p\}$ lo es. Si probamos que A es abierto, como $[0,1]$ es conexo, se concluiría $A = [0,1]$ y γ sería constante (contradicción). Si $t_0 \in A$, al ser γ continua podemos elegir un pequeño intervalo abierto $I = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ tal que $\gamma(I) \subset \mathcal{U}$

donde $\mathcal{U}$ es un pequeño entorno de p en $\mathcal{P}$. Como $\gamma(I)$ es conexo y contiene a p, debe cumplirse

$$\gamma(I) \subset \text{componente conexa de } \mathcal{U} \text{ conteniendo a } p = \{p\}$$

de lo cual se deduce que A es abierto.



Observación: Al aplicar este procedimiento para demostrar que la curva seno del topólogo no es conexa por caminos, debemos considerar el conjunto $\{0\} \times [-1, 1]$ en vez de $\{p\}$. Nótese que si suprimimos este conjunto de la curva seno del topólogo el resultado es conexo y conexo por caminos. De alguna forma hemos suprimido los puntos para los que el único camino posible requeriría que nos mareásemos (discontinuidad no evitable).

Existe una relación entre la conexión local y las componentes conexas.

Lema 4.17: *Si X es localmente conexo entonces sus componentes conexas son abiertas.*

Dem.: Dado $x \in X$ sea $\mathcal{U}(x)$ conexo, entonces $\mathcal{U}(x)$ está totalmente incluido dentro de una componente conexa que contiene a x. ■

No es difícil deducir de aquí una especie de recíproco generalizado debido a H. Hahn en 1914, el creador de la conexión local (la demostración es un ejercicio).

Proposición 4.18: *X es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de todos los conjuntos abiertos son abiertas.*

Para terminar diremos que se definen las componentes conexas por caminos de forma análoga a las componentes conexas (salvo que $x \sim y$ significa ahora $\exists\, \gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ con $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$). Además existe una relación entre componentes conexas y componentes conexas por caminos resumida en el siguiente trabalenguas.

Proposición 4.19: *Si X es localmente conexo por caminos, las componentes conexas coinciden con las componentes conexas por caminos.*

En particular, bajo la conexión local por caminos, conexo implica conexo por caminos, lo cual, aunque estemos curados de espanto con los contraejemplos, parece bastante lógico.

> *–Es lo que yo me decía, señor. Pero desconfío de mí mismo, se necesitaría haberlo leído todo.*

La demostración es un ejercicio físico que consiste en ir a la biblioteca y mirar el Teorema 4.4 del capítulo 3 del libro de Munkres.

¿Qué es un compacto?

La idea intuitiva que hay tras de la definición actual de compacto es difícil de explicar, así que el que no tenga ganas de leer tonterías que pase directamente a la definición.

Qué menos que comenzar las tonterías probando un "teorema" $\boxed{\text{falso}}$. La función $f(x) = 1/x$ es un contraejemplo.

Toda función continua $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada.

Dem.: $\boxed{\text{falsa}}$ Dado $\epsilon > 0$, si $a \in (0,1)$ por la definición de continuidad existe un δ tal que

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (0,1) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Por pequeño que sea δ siempre podemos escoger $a_1, a_2, \ldots, a_N \in (0,1)$ (por ejemplo igualmente espaciados) tales que

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \cup (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \cup \ldots \cup (a_N - \delta, a_N + \delta) \supset (0,1).$$

Para x en el j-ésimo intervalo se cumple $|f(x) - f(a_j)| < \epsilon$ y por consiguiente $f(a_j) - \epsilon < f(x) < f(a_j) + \epsilon$. De aquí, para todo $x \in (0,1)$ se tiene

$$\min(f(a_1) - \epsilon, \ldots, f(a_N) - \epsilon) < f(x) < \max(f(a_1) + \epsilon, \ldots, f(a_N) + \epsilon)$$

y f está acotada superior e inferiormente. ¿$\blacksquare$?

Veamos otro "teorema" $\boxed{\text{falso}}$ más sutil. Un contraejemplo es $a_n = 1/n$.

Toda sucesión $0 < a_n < 1$ tiene una subsucesión con $0 < \lim a_{n_k} < 1$.

Dem.: $\boxed{\text{falsa}}$ Consideremos la colección de intervalos $(a_n - 1/n, a_n + 1/n)$ con $n = 1, 2, \ldots$. Cada uno de ellos tiene longitud $\geq 1/2n$ y $\sum 1/2n = \infty$ mientras que la longitud de $(0,1)$ es 1, por tanto algún punto $l \in (0,1)$ está cubierto por infinitos intervalos, digamos $(a_{n_k} - 1/n_k, a_{n_k} + 1/n_k)$, por tanto $\lim a_{n_k} = l \in (0,1)$. ¿$\blacksquare$?

Así que tenemos dos teoremas demostrados que admiten contraejemplos. Si hacemos caso de la tautología $\neg a \vee a \Rightarrow b$ estas son buenas noticias, porque podemos deducir que la hipótesis de Riemann y la conjetura de Poincaré son ciertas (dos famosas y antiguas conjeturas no resueltas); pero como también $\neg a \vee a \Rightarrow \neg b$, la hipótesis de Riemann y la conjetura de Poincaré son falsas. ¿Acaso se cumple la *tontología* $a \Rightarrow \neg a$?

> *Absurdo: una palabra más, me debato con palabras; allí llegué a tocar la cosa. Pero quisiera fijar aquí el carácter absoluto de este absurdo. Un gesto, un acontecimiento en el pequeño mundo coloreado de los hombres nunca es absurdo sino relativamente: con respecto a las circunstancias que lo acompañan. Los discursos de un loco, por ejemplo, son absurdos con respecto a la situación en que se encuentra, pero no con respecto a su delirio. Pero yo, hace un rato, tuve la experiencia de lo absoluto: lo absoluto o lo absurdo.*

Como muchos habrán sabido, el error de la primera demostración tiene que ver con la continuidad uniforme. El "δ" depende de a y ϵ y no podemos, en general, escoger el mismo para valores distintos de a, con lo cual tendríamos que haber escrito:

$$\bigcup_{a \in (0,1)} (a - \delta(a), a + \delta(a)) \supset (0,1).$$

Aun así parece que tiene remedio, porque tomando una subcolección finita de intervalos que cubran $(0,1)$ el resto de la prueba funciona. Pero hay algo no muy claro: quizá con mala idea pudiéramos inventar $\delta(a)$ tal que esa subcolección no exista.

En la segunda "demostración", de nuevo la dificultad última estriba en nuestra intuición de que podemos extraer de una colección infinita de intervalos abiertos unos cuantos tales que todos los demás están "debajo".

Definición: Se dice que un espacio topológico, X, es compacto si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

Observación: Aunque esté tan claro que no merezca el nombre de "definición", subrayaremos que un recubrimiento abierto es sólo una colección de abiertos cuya unión es todo el espacio, y un subrecubrimiento es una subcolección con la misma propiedad. A veces abreviaremos *recubrimiento abierto* por *recubrimiento* simplemente.

Definición: Se dice que un subconjunto de un espacio topológico, $A \subset X$, es compacto si lo es con la topología relativa.

Observación: Nótese que para subconjuntos podemos entender un recubrimiento abierto como una colección de abiertos, $\mathcal{U}_\alpha$, en X, tales que $\bigcup \mathcal{U}_\alpha \supset A$.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ no es compacto porque

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n - 0'6, n + 0'6)$$

y no podemos suprimir ninguno de los intervalos porque si no algún entero quedaría sin tapar.

Ejemplo: $A = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual no es compacto. Basta considerar el recubrimiento

$$A \subset \bigcup_n \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\Big)$$

que no tiene subrecubrimientos. Lo mismo podríamos hacer en cualquier subconjunto infinito que herede la topología discreta.

Ejemplo: $\overline{A}$ es compacto (con A como antes). Dado un recubrimiento abierto de $\overline{A}$, digamos $\mathcal{C}$, sea $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{C}$ con $0 \in \mathcal{U}_0$. Como $1/n \to 0$ se tiene $1/n \in \mathcal{U}_0$ excepto un número finito de veces: $1/n_1$, $1/n_2$,..., $1/n_k$. eligiendo $\mathcal{U}_j \in \mathcal{C}$ con $1/n_j \in \mathcal{U}_j$, se tiene $\bigcup_{j=0}^k \mathcal{U}_j \supset A$.

Ejemplo: $(0,1) \subset \mathbb{R}$ no es compacto. Basta tomar el recubrimiento.

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} (1/n, 1) = (0,1).$$

El siguiente ejemplo es más notable e incluso a veces recibe un nombre que reservaremos para el último teorema de la sección.

Lema 4.20: $[0,1]$ *es compacto (con la topología usual).*

Dem.: Dado un recubrimiento abierto, $\mathcal{C}$, de $[0,1]$ consideramos

$$s = \sup\{x \in [0,1] \, : \, [0,x] \text{ puede recubrirse con un n}^{\underline{\text{o}}} \text{ finito de abiertos de } \mathcal{C}\}.$$

Hay que demostrar $s = 1$, con ello, quizá añadiendo un abierto que recubra $[1-\epsilon, 1]$, tendremos un subrecubrimiento finito. Desde luego que $s > 0$ porque cualquier abierto que contenga a cero contiene a $[0,\epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$. Supongamos que $s < 1$, entonces para cualquier $\mathcal{U}(s) \in \mathcal{C}$ existe $\epsilon > 0$ tal que $[s-\epsilon, s+\epsilon] \subset \mathcal{U}(s)$. Por la definición de s, $[0, s-\epsilon]$ está recubierto por un número finito de abiertos del recubrimiento, pero si a estos les añadimos $\mathcal{U}(s)$ se tiene un subrecubrimiento finito de $[0, s+\epsilon]$, lo cual contradice que s sea el supremo. ■

Mirándolo con cuidado, esencialmente sólo hemos usado la existencia del supremo en la prueba anterior. A base de generalizar se obtiene un resultado más poderoso.

Proposición 4.21: *Si X tiene la topología del orden y la propiedad del supremo, entonces para cada $a, b \in X$, $a < b$, el intervalo cerrado $[a,b] = \{x \in X \, : \, a \le x \le b\}$ es compacto.*

Ejemplo: $[0,1] \times [0,1]$ con el orden lexicográfico es compacto (simplemente coincide con el intervalo cerrado $[(0,0),(1,1)]$).

Como en el caso de la conexión, veamos cómo fabricar nuevos compactos a partir de nuestra pequeña colección.

Proposición 4.22: *Si $f \, : \, X \longrightarrow Y$ es continua y $K \subset X$ es compacto, entonces $f(K)$ también lo es.*

Dem.: Si $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$ fuera un recubrimiento de $f(K)$ sin subrecubrimientos finitos entonces $\bigcup f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \supset K$ tendría la misma propiedad. ■

Proposición 4.23: *Si $F \subset K \subset X$ con F cerrado y K compacto, entonces F es compacto.*

Esto es, cerrado dentro de compacto es compacto.

Dem.: Si existiera un recubrimiento $\bigcup \mathcal{U}_\alpha \supset F$ sin subrecubrimientos finitos entonces $(X - F) \cup \bigcup \mathcal{U}_\alpha \supset K$ tendría la misma propiedad y esto contradice que K es compacto. ■

Ejemplo: $\{(-1)^n/n \, : \, n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{0\}$ es compacto porque es un cerrado dentro de $[-1,1]$ que es compacto.

La compacidad está relacionada con propiedades de separación.

Proposición 4.24: *Sea X un espacio Hausdorff, K un subconjunto compacto y $x \in X - K$, entonces existen dos abiertos disjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ tales que $x \in \mathcal{U}$ y $K \subset \mathcal{V}$.*

Dem.: Para cada $y \in K$, por ser el espacio Hausdorff, existen dos abiertos disjuntos $\mathcal{U}_y$, $\mathcal{V}_y$ con $x \in \mathcal{U}_y$, $y \in \mathcal{V}_y$. De la compacidad de K se sigue que

$$\bigcup_{y \in K} \mathcal{V}_y \supset K \;\Rightarrow\; \exists\, y_1, y_2, \ldots, y_N \in K \, : \, \bigcup_{n=1}^{N} \mathcal{V}_{y_n} \supset K.$$

Tomando

$$\mathcal{U}=\bigcap_{n=1}^{N}\mathcal{U}_{y_n},\qquad \mathcal{V}=\bigcup_{n=1}^{N}\mathcal{V}_{y_n}$$

se tiene el resultado deseado. ■

Corolario 4.25: *En un espacio de Hausdorff cualquier subconjunto compacto es siempre cerrado.*

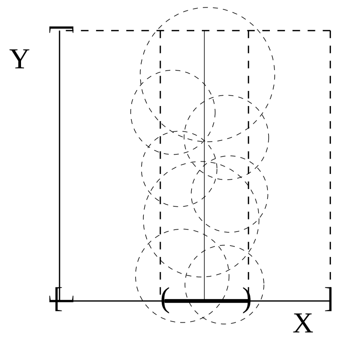
Dem.: Por la proposición anterior, cada punto que no esté incluido en el compacto tiene un entorno abierto que tampoco lo está, así que el complementario es abierto. ■

Ejemplo: Con la topología cofinita en $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}-\{0\}$ es compacto (ejercicio) pero $\mathcal{U}$ es abierto y no cerrado.

La última propiedad que veremos es, esencialmente,

$$X,Y \text{ compactos } \Rightarrow X\times Y \text{ compacto.}$$

Después de pensarlo un poco, hay un camino lógico: Para todo recubrimiento de $X\times Y$, al ser Y compacto, cada vertical $\{x\}\times Y$ admite un subrecubrimiento finito. Si escogemos un *tubo* de la forma $\mathcal{U}(x)\times Y$ dentro de dicho subrecubrimiento, un número finito de tubos recubrirán $X\times Y$ ya que X está recubierto por un número finito de los $\mathcal{U}(x)$ cuando x varía.



Cuando se intenta poner todo esto en rigor resulta que la existencia del tubo alrededor de la vertical no es evidente.

Lema 4.26: (Lema del tubo) *Sean X, Y espacios topológicos con Y compacto y sea $x\in X$. Si $\mathcal{W}$ es un abierto en $X\times Y$ con $\{x\}\times Y\subset\mathcal{W}$ entonces existe $\mathcal{U}$ abierto en X tal que $\{x\}\times Y\subset\mathcal{U}\times Y\subset\mathcal{W}$.*

Observación: El resultado es, en general, falso si Y no es compacto. Por ejemplo, si $X=Y=\mathbb{R}$, $\mathcal{W}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y|x|<1\}$ no existe ningún *tubo* contenido en $\mathcal{W}$ y conteniendo a $\{0\}\times\mathbb{R}$.

Dem.: Por la definición de la topología producto, podemos escribir

$$\mathcal{W}=\bigcup_{\alpha}\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{V}_\alpha$$

donde $\mathcal{U}_\alpha$, $\mathcal{V}_\alpha$ son abiertos de las bases de X e Y, respectivamente. De la compacidad de $\{x\}\times Y$ (es homeomorfo a Y) se sigue que un número finito de productos $\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{V}_\alpha$ sirven para cubrir este conjunto. Digamos

$$\{x\}\times Y\subset\bigcup_{n=1}^{N}\mathcal{U}_n\times\mathcal{V}_n$$

con $x \in \mathcal{U}_n$, $Y \subset \bigcup \mathcal{V}_n$. Por tanto, tomando como $\mathcal{U}$ la intersección de los $\mathcal{U}_n$

$$\{x\} \times Y \subset \mathcal{U} \times Y \subset \bigcup_{n=1}^{N} \mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n \subset \mathcal{W}$$

y la demostración es completa. ■

Proposición 4.27: *Sean X_1, X_2,..., X_n espacios topológicos (no vacíos), entonces*

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \text{ es compacto } \Leftrightarrow X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ son compactos.}$$

Observación: Como en el caso de la conexión, el resultado también se extiende a productos cartesianos infinitos. En ese caso se conoce con el nombre de *Teorema de Tychonoff* y requiere emplear el axioma de elección.

Dem.: Supondremos $n = 2$ porque el caso general se sigue iterando (por inducción).

$\Rightarrow$) Es una consecuencia de la continuidad de las proyecciones π_1, π_2.

$\Leftarrow$) Fijado $x \in X_1$, como la vertical $\{x\} \times X_2$ es compacta, de cada recubrimiento de $X_1 \times X_2$ podemos extraer una colección finita, $\mathcal{W}_{x,n}$, $n = 1, 2, \ldots, N_x$ y, por el lema, la unión de estos abiertos debe contener un *tubo* $\mathcal{U}_x \times X_2$ con $x \in \mathcal{U}_x$

$$\{x\} \times X_2 \subset \mathcal{U}_x \times X_2 \subset \bigcup_{n=1}^{N_x} \mathcal{W}_{x,n}.$$

Por otra parte, por la compacidad de X_1, se necesitan un número finito de abiertos $\mathcal{U}_{x_m}$, $m = 1, 2, \ldots, M$ para recubrir X_1, con lo cual se tiene

$$X_1 \times X_2 \subset \bigcup_{m=1}^{M} \mathcal{U}_{x_m} \times X_2 \subset \bigcup_{m=1}^{M} \bigcup_{n=1}^{N_{x_m}} \mathcal{W}_{x_m,n}$$

y $\mathcal{W}_{x_m,n}$ es el subrecubrimiento finito buscado. ■

Una vez que nos hemos ejercitado en la teoría y tenemos una fábrica de compactos con teoremas grandilocuentes, podemos desvelar el gran secreto: la compacidad en $\mathbb{R}^n$ es una solemne tontería.

Teorema 4.28: (Heine-Borel) *En $\mathbb{R}^n$ (con la topología y distancia usuales) un subconjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Observación: Este resultado no es cierto en general, si la topología o la distancia no son las usuales. Por ejemplo, con la topología de límite inferior en $\mathbb{R}$, $[0, 1)$ es cerrado y acotado pero no compacto.

Dem.: $\Rightarrow$) Al ser $\mathbb{R}^n$ Hausdorff sabemos que *compacto $\Rightarrow$ cerrado*. La acotación se sigue de que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, n)$ es un recubrimiento de cualquier subconjunto (de hecho de $\mathbb{R}^n$) que no admite subrecubrimientos finitos si el conjunto no está acotado (¿por qué? Es muy fácil).

$\Leftarrow$) Un subconjunto acotado está incluido en el cubo $C_n = [-n, n] \times \ldots \times [-n, n]$ para algún n suficientemente grande. Como C_n es compacto (es producto de compactos) si el subconjunto es cerrado también será compacto (*cerrado $\subset$ compacto $\Rightarrow$ compacto*). ■

Ejemplo: $S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ es compacto.

Trivialmente es acotado y se puede probar rápidamente que es cerrado diciendo que $S^n = f^{-1}(\{1\})$ donde $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función continua $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$. Este breve argumento demostrando que S^n es cerrado tiene un análogo diferencial, el teorema de la submersión, que permite probar entre otras cosas que S^n es una subvariedad sin necesidad de echar las cartas.

Para terminar, después de la submersión un poco de subversión:

La compacidad en $\mathbb{R}$ subyace a los conceptos de supremo e ínfimo que son la base del Análisis Matemático y de la misma construcción de los números reales. Estos conceptos han sufrido las desconfianzas de muchos matemáticos desde la antigüedad hasta finales del siglo XIX. Uno de los últimos reaccionarios, criticando duramente los trabajos de H.F. Heine y K. Weierstrass hacia la definición de compacidad, fue L. Kronecker, famoso por su importantísima contribución matemática, por "creer" sólo en los enteros y por haber acelerado o motivado la demencia de G. Cantor a causa de sus ataques contra él. Es realmente injusto que diatribas como éstas o conflictos entre biografías sean casi la única oportunidad para que el lector casual pueda atisbar el carácter de algunos "grandes hombres", y es que no hay como morirse o ser un genio para volverse bueno ante todos, a pesar de la advertencia del Apóstol de las Gentes: "y si entendiese todos los misterios de la ciencia [...], y no tengo amor, no soy nada. [...] y si entregase mi cuerpo al fuego, y no tengo amor, de nada me sirve". Por ejemplo, en un homenaje póstumo a un sabio fallecido en el siglo XVIII se dijo:

> *"Tenía por nacimiento tendencia a la mansedumbre e inclinación a la tranquilidad [...] Nunca hablaba de sí mismo o con desprecio de otros y nunca dio motivo alguno ni siquiera al más malicioso observador de sospechar en él el menor atisbo de vanidad [...] La holgura de que disfrutaba [...] le dio oportunidades de hacer el bien, oportunidades que no dejó escapar".*

Pero buscando con empeño se puede encontrar:

> *"Atrabiliario, hosco y malhumorado, nunca reconoció la valía de sus compañeros e hizo lo posible por borrar las huellas de los que le precedieron. Culpable de diez y nueve muertes [...] nunca hubo tantos nobles estúpidos en la sabia institución como bajo su mando."*

Es curioso que no dejemos de admirar en los libros y en las paredes de los museos a héroes que, de estar a nuestro lado, llamaríamos ruines y degenerados.

> *Había cruzado el salón Bordurin-Renaudas en toda su longitud. Me volví. Adiós, hermosos lirios todo finura, en vuestros santuarios pintados; adiós hermosos lirios, orgullo nuestro y nuestra razón de ser, adiós, cerdos.*

En la actualidad la definición de compacto no da lugar a ningún recelo a pesar de su carácter no constructivo, y el Análisis Matemático está sólidamente asentado. Es justo añadir que muchas de las críticas pasadas estaban justificadas por la falta de rigor al manejar los conceptos infinitesimales, pero en el terreno de las opiniones sólo se recuerda al que a la larga tiene razón.

¡Qué buenos son los compactos!

La primera *buena* propiedad de los compactos no es más que la generalización de uno de los teoremas básicos del Cálculo.

Proposición 4.29: *Sea X un espacio topológico compacto e Y un espacio topológico con la topología del orden, entonces cualquier función continua $f : X \longrightarrow Y$ alcanza un máximo y un mínimo. Esto es, $\exists\, x_1, x_2 \in X : \forall x \in X\ f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.*

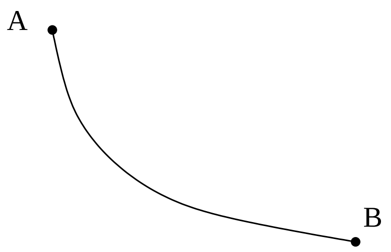
Dem.: Si no alcanzara un máximo, dado $y \in \operatorname{Im} f$ existe $z \in \operatorname{Im} f$ con $z > y$. Así pues, tenemos el recubrimiento

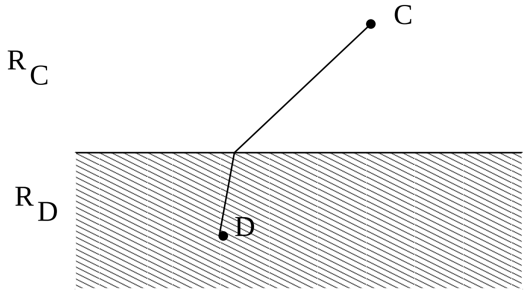
$$\operatorname{Im} f = \bigcup_{y\in \operatorname{Im} f} \{y\} \subset \bigcup_{z\in \operatorname{Im} f} \{y \in Y : y < z\}.$$

Si $\{y \in Y : y < z_1\} \cup \{y \in Y : y < z_2\} \cup \ldots \cup \{y \in Y : y < z_N\}$ es un subrecubrimiento finito llegamos a una contradicción porque el mayor de los z_j está en $\operatorname{Im} f$ pero no pertenece al subrecubrimiento. Un argumento simétrico sirve para demostrar que también se alcanza un mínimo. ■

Destacar un resultado tan poco destacado merece alguna *batallita*.

Con nuestra intuición de Cálculo real, la existencia de máximos y mínimos puede parecer bastante trivial pero en espacios suficientemente complejos puede ser difícil de probar o incluso falsa. Como ilustración, citaremos el problema de la braquistocrona (*braquis*=breve, *cronos*=tiempo) que consiste en dados dos puntos A, B a diferentes alturas, hallar la forma de un tobogán que los una para que los niños (o mayores) tarden lo menos posible en bajar. Consideremos también el problema de hallar un camino por el que tardemos el menor tiempo posible para ir de la ciudad C a la D sabiendo que la región de D, R_D (ver la figura), es pantanosa y avanzamos la mitad de rápido que en R_C.





El primer problema es muchísimo más difícil (no es un ejercicio si uno no conoce bien las palabras mágicas: Cálculo de Variaciones) que el segundo (ejercicio ingenioso). Por otra parte, el primero tiene solución entre las curvas diferenciables (un trozo de cicloide) y el segundo no (una línea quebrada). En otras palabras, la función que asigna a cada curva diferenciable uniendo dos puntos el tiempo, alcanza un mínimo en el primer caso pero no en el segundo. En este último caso, las curvas diferenciables sólo dan aproximaciones a la solución.

Curiosidades: El problema de la braquistocrona fue un reto de J. Bernoulli (quien lo resolvió primero) a otros matemáticos. Al gran genio I. Newton sólo se le resistió unas horas (el 29 de enero de 1697) mientras que a G.W. Leibniz seis meses. Sorprendentemente guarda cierta relación con el segundo problema que hemos mencionado y éste con la refracción de la luz. Para saber más, véase V.M. Tikhomirov "*Stories about Maxima and Minima*" Mathematical World. AMS 1990.

Veamos a continuación dos resultados que relacionan la compacidad con otras definiciones del curso.

Proposición 4.30: *Sean X e Y espacios topológicos con X compacto e Y Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, entonces*

$$f \text{ es un homeomorfismo } \Leftrightarrow f \text{ es continua y biyectiva.}$$

Dem.: $\Rightarrow$) Es trivial.

$\Leftarrow$) Basta probar que f es cerrada ya que esto implicará que f^{-1} es continua. Si F es cerrado en X, entonces es compacto y $f(F)$ también lo es. Como Y es Hausdorff, $f(F)$ es cerrado. ■

Ejemplo: La función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con $f(x, y) = (x^3(1-y^3)+3x, x^3(1+y^3)+3x+2)$ y $X = [1, 2]\times[3, 4]$ es una inmersión (homeomorfismo sobre su imagen). La sobreyectividad de $f : X \longrightarrow f(X)$ está asegurada y como X es compacto y f es continua, basta comprobar que es inyectiva: Si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, sumando ambas ecuaciones y sacando factor común x_1-x_2 obtenemos $x_1 = x_2$. Sustituyendo en la segunda ecuación se deduce $y_1 = y_2$.

Proposición 4.31: *Si X es un espacio topológico compacto y A es un subconjunto infinito, entonces $A' \neq \emptyset$.*

Dem.: Supongamos que $A' = \emptyset$, entonces $\forall x \in X\ \exists \mathcal{U}(x) : A\cap\mathcal{U}(x) = \emptyset$ ó $A\cap\mathcal{U}(x) = \{x\}$. Cuando x varía en X, los $\mathcal{U}(x)$ cubren todo el espacio y por la compacidad de X podemos escoger $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \mathcal{U}_N$ con

$$A \subset X \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{U}_j \qquad .$$

Como $\mathcal{U}_j \cap A$ tiene a lo más un elemento, se deduce que A es finito. ■

Ejemplo: Tomando como A una sucesión acotada, digamos por un número M, y $X = [-M, M]$ con la topología usual, se deduce (sin mucho esfuerzo pero no inmediatamente) el *teorema de Bolzano-Weierstrass*:

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Realmente el resultado se debe a K. Weierstrass en 1860 pero B. Bolzano creó el método de bisección que a veces se usa en la demostración y contribuyó ampliamente a la fundamentación del Análisis Matemático y la teoría de sucesiones y series. Su libro "Paradojas del infinito" de 1850 incluye contraejemplos tan demoledores como

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1.$$

No está tan mal habida cuenta que entre los resultados que S. Ramanujan envió a algunos matemáticos antes de ser "descubierto" estaba $1+2+3+4+5+ = -1/12$. Qué injustos son los autores que suspenderían a sus alumnos por menos y critican a aquellos matemáticos. También es cierto que esta igualdad tiene algún sentido, pero difícil de explicar.

Según cuentan algunos libros, en los albores de la historia de la Topología General (la que estudiamos hasta este capítulo) se decía que eran *compactos* los espacios en los que se cumplía el teorema de Bolzano-Weierstrass y se reservaba el nombre de *bicompactos* a los que tenían la propiedad de subrecubrimientos finitos. Pero nuevos teoremas, como el de Tychonoff que sólo se cumple para los bicompactos, hicieron que éstos se transformaran en los compactos por antonomasia. Nos podemos creer así la necesidad de los nuevos compactos con su definición artificial y la contigencia de los antiguos, pero también es fácil dar causas necesarias de la Revolución Francesa una vez que sabemos que ha ocurrido.

No reflexionar demasiado en el valor de la Historia. Uno corre el riesgo de hastiarse con ella.

En general, en espacios métricos hay una estrecha relación entre la compacidad, los puntos de acumulación y propiedades de convergencia de las sucesiones. Todo está recogido en el próximo teorema del que separamos una parte de la demostración que tiene interés independiente.

Lema 4.32: (Lema del número de Lebesgue) *Sea X un espacio métrico en el que toda sucesión tenga una subsucesión convergente y sea $\bigcup \mathcal{U}_\alpha = X$ un recubrimiento abierto, entonces existe $\delta > 0$ (<u>número de Lebesgue</u>) tal que para cualquier $x \in X$ hay un abierto del recubrimiento conteniendo a $B(x, \delta)$.*

<u>Dem.</u>: Si no existe tal δ, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ existe $x_n \in X$ tal que $B(x_n, 1/n) \not\subset \mathcal{U}_\alpha$ para cualquier $\mathcal{U}_\alpha$ del recubrimiento. Sea l el límite de una subsucesión convergente de x_n, digamos x_{n_k}. Sea $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ tal que $l \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$. Por ser $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ abierto existe $B(l, \epsilon) \subset \mathcal{U}_{\alpha_0}$. Además de la convergencia de x_{n_k} a l se deduce que existe k_0 suficientemente grande tal que $x_{n_{k_0}} \in B(l, \epsilon/2)$ y $1/n_{k_0} < \epsilon/2$. De aquí

$$B(x_{n_{k_0}}, 1/n_{k_0}) \subset B(x_{n_{k_0}}, \epsilon/2) \subset B(l, \epsilon) \subset \mathcal{U}_{\alpha_0}.$$

(Se ha aplicado la desigualdad triangular en la inclusión central). Pero esto contradice que $B(x_n, 1/n) \not\subset \mathcal{U}_\alpha$ para todo n y cualquier $\mathcal{U}_\alpha$. ■

Teorema 4.33: *Si X es un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *X es compacto.*

2) *Si $A \subset X$ tiene infinitos elementos $A' \neq \emptyset$.*

3) *Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

<u>Observación:</u> En espacios que no son métricos las tres afirmaciones no son equivalentes y constituyen una pequeña familia de los compactos. Los espacios que cumplen 2) se llaman <u>numerablemente compactos</u> o se dice que tienen la propiedad de <u>Bolzano-Weierstrass</u> y los que cumplen 3) se llaman <u>compactos por sucesiones</u> o <u>secuencialmente compactos</u>. Esta familia se completa con <u>localmente compacto</u> que es un término que no trataremos en este curso y que significa que cada punto tiene un entorno contenido en un compacto.

<u>Dem.</u>: Ya hemos probado que 1) $\Rightarrow$ 2). Por otra parte si se cumple 2), cualquier sucesión debe tener una subsucesión convergente porque si no tendríamos un conjunto infinito sin puntos límite (Ejercicio: Completar los detalles. Aunque no lo parezca, se necesita usar que el espacio es métrico). Así que sólo queda probar 3) $\Rightarrow$ 1).

Sea $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$ un recubrimiento de X, queremos hallar un subrecubrimiento finito. Por el lema anterior existirá un número de Lebesgue $\delta > 0$. Tomemos $x_1 \in X$, $x_2 \in X - B(x_1, \delta)$, $x_3 \in X - B(x_1, \delta) - B(x_2, \delta)$,...etc. Para algún N debe cumplirse

$$X = B(x_1, \delta) \cup B(x_2, \delta) \cup \ldots \cup B(x_N, \delta)$$

porque si no x_n formaría una sucesión infinita sin subsucesiones convergentes (todos los términos están separados al menos por δ). Eligiendo para cada $1 \le j \le N$, $\mathcal{U}_{\alpha_j} \supset B(x_j, \delta)$ se tiene que $\bigcup \mathcal{U}_{\alpha_j}$ es el subrecubrimiento finito buscado. ■

<u>Ejemplo</u>: Como $X = [0,1]$ es compacto y métrico, toda sucesión tiene una subsucesión convergente y se cumple el resultado del lema del número de Lebesgue. Aplicándolo al recubrimiento de $[0,1]$ dado por $f^{-1}\big((f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)\big)$ donde $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, se deduce el teorema de continuidad uniforme: *Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f es uniformemente continua,* esto es, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in (a-\delta, a+\delta) \cap [0,1] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$ *para todo* $a \in [0,1]$. Es decir, δ depende de ϵ pero no de a.

<u>Ejemplo</u>: Todo espacio métrico compacto es completo (véase la definición en el primer capítulo): Por 3), para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ existe $x_{n_k} \to l$, esto es, dado $\epsilon > 0$, $d(x_{n_k}, l) < \epsilon$ si $n_k > N$. Si la sucesión es de Cauchy, $d(x_m, x_{n_k}) < \epsilon$ para $m, n_k > M > N$, así que por la desigualdad triangular

$$d(x_m, x_{n_k}) < \epsilon, \quad d(x_{n_k}, l) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad d(x_m, l) < 2\epsilon \quad \text{si } m > M$$

y la sucesión converge a l.

Como muestra este ejemplo, la completitud y la compacidad están muy relacionadas, de hecho para los espacios métricos totalmente acotados (los que pueden ser recubiertos con un número finito de bolas arbitrariamente pequeñas), compacto es lo mismo que completo.

<u>Ejemplo</u>: $\mathbb{R}^n$ es completo. Cualquier sucesión de Cauchy está acotada (ejercicio, no es tan difícil teniendo en cuenta que si los términos se amontonan no puede haber algunos que se escapen a infinito) entonces está incluida en $\overline{B}(\vec{0}, R)$ para algún R grande, y este espacio es completo por ser compacto.

<u>Observación:</u> Como los compactos son tan buenos, a veces conviene ampliar un poco un espacio no compacto añadiéndole un punto, normalmente llamado ∞, de manera que $X \cup \{\infty\}$ sea compacto. Este nuevo espacio se llama compactificación de Alexandroff, que lo introdujo en 1924, cuando se le dota con la topología dada por

$$\mathcal{U} \text{ abierto en } X \cup \{\infty\} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathcal{U} \text{ es abierto en } X & \text{si } \infty \notin \mathcal{U} \\ X - \mathcal{U} \text{ es compacto en } X & \text{si } \infty \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

Por ejemplo, (a,b) y $\mathbb{R} - [a,b] \cup \{\infty\}$ son abiertos típicos de la compactificación de $\mathbb{R}$. Esto es como pegar $-\infty$ e ∞ en un solo infinito, de manera que $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con la topología de la compactificación de Alexandroff es homeomorfo a S^1 y, en general, $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ a S^n (el homeomorfismo no es más que la extensión de la estereográfica).

Para terminar, veamos dos propiedades de los espacios compactos que aparecen en algunos resultados clásicos.

Proposición 4.34: *Sea X un espacio topológico compacto y sean $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ conjuntos cerrados no vacíos, entonces $\bigcap F_j \neq \emptyset$.*

Observación: Cuando X y los F_j son intervalos cerrados de la recta real, por razones obvias, se llama a este resultado *teorema de los intervalos encajados*. Nótese que el resultado no es cierto para intervalos abiertos, por ejemplo, $\bigcap(0, 1/n) = \emptyset$.

Dem.: Si fuera $\bigcap F_j = \emptyset$,

$$\bigcup \mathcal{U}_j = X \qquad \text{con} \qquad \mathcal{U}_j = X - F_j$$

sería un recubrimiento abierto y no tendría subrecubrimientos finitos, lo cual es una contradicción. ■

Proposición 4.35: *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff y $A \neq \emptyset$ un subconjunto tal que $A' = A$, entonces A no es numerable.*

Observación: A los conjuntos que cumplen $A' = A$ se les llama perfectos y fueron introducidos por G. Cantor en 1884. Este resultado implica, por tanto, que los conjuntos perfectos en compactos Hausdorff son no numerables.

Dem.: De la identidad $\overline{A} = A \cup A'$ se sigue que $\overline{A} = A$ y por tanto A es cerrado.

Si A fuera numerable, digamos $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, sea $y_1 \in A - \{x_1\}$ entonces, por ser el espacio Hausdorff, podemos hallar $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{V}_1$ disjuntos con $y_1 \in \mathcal{U}_1$, $x_1 \in \mathcal{V}_1$. Por tanto $x_1 \notin \overline{\mathcal{U}_1}$. Como y_1 es un punto de acumulación, $(\mathcal{U}_1 - \{y_1\}) \cap A$ debe ser no vacío (de hecho debe contener infinitos elementos), así pues, procediendo de la misma forma hallamos $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{V}_2$ disjuntos con $y_2 \in \mathcal{U}_2 \cap A$, $x_2 \in \mathcal{V}_2$, con lo cual $x_2 \notin \overline{\mathcal{U}_2}$. En general obtenemos $\overline{\mathcal{U}_1} \supset \overline{\mathcal{U}_2} \supset \overline{\mathcal{U}_3} \supset \dots$ tales que $\mathcal{U}_1 \cap A \neq \emptyset$, $\mathcal{U}_2 \cap A \neq \emptyset$, $\mathcal{U}_3 \cap A \neq \emptyset$,... y $x_1 \notin \overline{\mathcal{U}_1}$, $x_2 \notin \overline{\mathcal{U}_2}$, $x_3 \notin \overline{\mathcal{U}_3}$,... y esto implica $\bigcap(\overline{\mathcal{U}_j} \cap A) = \emptyset$ lo que contradice el resultado anterior. ■

Ejemplo: Uno de los subconjuntos de $[0, 1]$ más famosos en Topología es el conjunto de Cantor (debido a G. Cantor en 1883) definido por

$$C = \bigcap_{k,j=0}^{\infty} \Big([0, 1] - (\frac{3k+1}{3^j}, \frac{3k+2}{3^j}) \Big).$$

Este conjunto es perfecto, lo cual no es una opinión sino una aplicación de la notación antes introducida (ejercicio, no muy fácil si uno quiere una solución breve). Los dos últimos resultados implican que C es no vacío y no numerable. Para aplicar el primero se puede considerar como F_j la parte de la intersección con $0 \leq k \leq 3^{n-1}$ y $n \leq j$. Otras propiedades curiosas del conjunto de Cantor son que sus componentes conexas son los puntos, que es autosemejante (igual a un par de fotocopias reducidas de sí mismo) y que para cualquier espacio métrico (X, d) existe una función continua y sobreyectiva $f : C \longrightarrow X$. Este increíble resultado es el teorema de Hausdorff-Alexandroff. Si uno ya ha hecho todos los deberes y tiene ganas de más, puede pasarse por la hemeroteca y tratar de leer poco a poco el artículo de Y. Benjamini "*Applications of the Universal Surjectivity of the Cantor Set*" American Mathematical Monthly 105 pp 832-839 (1998).

Una recta no es redonda, un hombre no es una mujer

En el capítulo anterior dijimos que los homeomorfismos establecían una equivalencia entre los abiertos de dos espacios topológicos y, por tanto, entre sus propiedades topológicas. Allí hallamos "a mano" algunos homeomorfismos entre espacios pero como sabíamos muy pocas propiedades y eran demasiado básicas, no pudimos distinguir entre espacios aparentemente bien distintos. En esta sección utilizaremos lo que hemos aprendido de conexión y compacidad con este cometido. Después de todo el *rollo* teórico de páginas anteriores, nos daremos un respiro sin teoremas, sólo con ejemplos. Si no se indica lo contrario, la topología empleada será la (inducida por la) usual.

Ejemplo: Los intervalos en $\mathbb{R}$: $I_1 = (a, b)$, $I_2 = [a, b]$ con $a < b$, no son homeomorfos porque I_2 es compacto pero I_1 no lo es.

Ejemplo: El disco unidad abierto en $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo al disco cerrado, porque el primero no es compacto y el segundo sí.

Seguramente muchos estén pensando que estos ejemplos son un poco absurdos porque un subespacio que es abierto en un espacio mayor no puede ser homeomorfo a otro que no lo es, pero este argumento no es en general válido (con excepciones, que aquí se aplican, recogidas en un profundo resultado mencionado al final de la sección). Para los más incrédulos, damos un ejemplo de un espacio tal que uno de sus abiertos es homeomorfo a uno de sus no abiertos.

Ejemplo: Consideremos el siguiente espacio:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y - 1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y + 1)^2 = 1\} \\ \cup \{(0, -2 - 1/n) \in \mathbb{R}^2 \ : \ n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

En este híbrido entre ocho y Manneken-Pis, el subconjunto $\mathcal{U} = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 1\}$ es abierto y homeomorfo a $C = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2 \le y < -1\}$ por medio de la simetría $(x, y) \mapsto (x, -y)$, pero este último conjunto no es abierto en X (¿por qué?). Por cierto, X no es homeomorfo, por ejemplo, a S^1 porque este último conjunto es conexo y X no lo es.

Ejemplo: Sabíamos que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a cualquier intervalo abierto, (a, b), pero no puede serlo a ninguno cerrado, $[a, b]$, por la compacidad de este último conjunto.

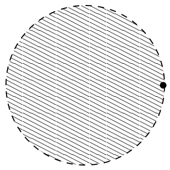
Nótese que ni siquiera puede existir una función continua y sobreyectiva $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ porque f debe alcanzar un máximo y un mínimo. Por otro lado, no sólo existe $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y sobreyectiva, sino que a base de unir curvas de Peano (véase el final del capítulo 42 de M. Kline "*Mathematical Thought form Ancient to Modern Times*" V.III Oxford University Press 1972), se puede obtener $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con las mismas propiedades, contradiciendo nuestra intuición acerca del concepto de dimensión.

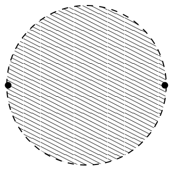
Ahora justifiquemos la primera parte del título.

Ejemplo: S^1 y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos, porque uno es compacto y el otro no. De la misma forma, S^n no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (recuérdes que S^n es la frontera de la bola unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$).

Cuando ninguno de los espacios que queremos comparar es compacto el problema de ver si son homeomorfos puede llegar a ser muy difícil. Por ejemplo, seguramente no existe ninguna demostración sencilla (sin usar las técnicas del siguiente capítulo) de que los siguientes espacios, donde D es el disco unidad abierto en $\mathbb{R}^2$, no son homeomorfos:

$$X = D \cup \{(1,0)\} \qquad\qquad Y = D \cup \{(1,0)\} \cup \{(-1,0)\}$$





Cuando uno de los conjuntos es, en algún sentido, "unidimensional", la técnica de eliminar algunos puntos es muy útil. El siguiente ejemplo es prototípico.

<u>Ejemplo</u>: Consideremos en $\mathbb{R}$ los espacios $X = [0,1)$, $Y = (0,1)$, entonces X e Y no son homeomorfos (nótese que ninguno de los dos es compacto y que ambos son conexos). Si existiera un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$, restringiendo al abierto $\mathcal{U} = X - \{0\}$ se tendría que $f\big|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow Y - \{f(0)\}$ también sería un homeomorfismo (¿por qué?). Pero esto es imposible porque, sea cual sea $f(0)$, $\mathcal{U}$ es conexo e $Y - \{f(0)\}$ no lo es.

<u>Ejemplo</u>: $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Si existiera $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo, entonces $\mathbb{R} - \{\vec{0}\}$ y $\mathbb{R}^n - \{f(\vec{0})\}$ serían homeomorfos, pero esto es una contradicción porque $\mathbb{R} - \{\vec{0}\}$ no es conexo y $\mathbb{R}^n - \{f(\vec{0})\}$ sí lo es. Para justificar rigurosamente esta última afirmación, podemos suponer, por simetría, $f(\vec{0}) = \vec{0}$ y decir que $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ es conexo por caminos porque $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ se pueden unir con una línea recta en $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ si $\vec{x}_1 \neq \lambda \vec{x}_2$, y por una quebrada en otro caso.

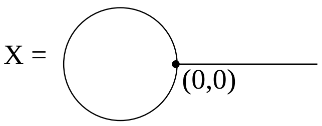
<u>Ejemplo</u>: S^1 no es homeomorfo a S^n, $n > 1$. Si suprimimos un punto el resultado es conexo en ambos casos. Necesitamos quitar al menos dos puntos a la circunferencia unidad, S^1, para desconectarla. Sean, por tanto, $p, q \in S^1$, $p \neq q$, entonces $S^1 - \{p\} - \{q\}$ tiene dos componentes conexas y sin embargo, cualquiera que sea $f : S^1 \longrightarrow S^n$, $S^n - \{f(p)\} - \{f(q)\}$ sólo tiene una (es conexo). Una demostración rápida de este hecho se reduce a aplicar la proyección estereográfica con $f(p)$ desempeñando el papel de "polo norte" y deducir que S^n menos dos puntos es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ menos un punto.

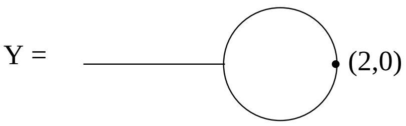
La simetría de los dos ejemplos anteriores no debiera inducir a confusión: no podemos especificar a nuestro antojo la imagen de un punto por el posible homeomorfismo.

<u>Ejemplo</u>: Los siguientes espacios

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x+1)^2 + y^2 = 1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\ y = 0\big\}$$

$$Y = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 = 1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 0,\ y = 0\big\}$$

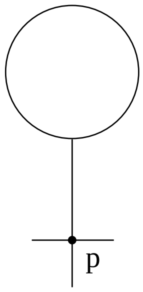


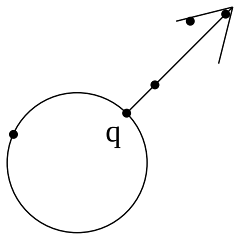


son claramente homeomorfos mediante un giro de 180° o una simetría, pero no puede existir ningún homeomorfismo con $f\big((0,0)\big) = (2,0)$ porque $X - \{(0,0)\}$ tiene dos componentes conexas mientras que $Y - \{(2,0)\}$ es conexo.

Dicen que para los ángeles y para algunas aves es una tarea difícil distinguir los sexos, pero con todos los trucos que sabemos ya, es cortar y contar.

<u>Ejemplo</u>: Los siguientes espacios (con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$ y sin considerar las "verrugas") no son homeomorfos:

$X =$ 

$Y =$ 

Si existiera un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$, consideremos $X - \{p\}$ e $Y - \{f(p)\}$ con p el centro de la cruz. El conjunto $X - \{p\}$ tiene cuatro componentes conexas y sin embargo

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } f(p) \in \text{circunferencia}-\{q\} & \Rightarrow & Y - \{f(p)\} \text{ es conexo} \\
\text{Si } f(p) = q & \Rightarrow & Y - \{f(p)\} \text{ tiene dos comp. conexas} \\
\text{Si } f(p) \in \text{cuerpo de la flecha} & \Rightarrow & Y - \{f(p)\} \text{ tiene dos comp. conexas} \\
\text{Si } f(p) = r & \Rightarrow & Y - \{f(p)\} \text{ tiene tres comp. conexas} \\
\text{Si } f(p) \in \text{punta de flecha}-\{r\} & \Rightarrow & Y - \{f(p)\} \text{ tiene dos comp. conexas}
\end{array}$$

con lo cual no hay homeomorfismo posible.

Como último ejemplo veamos uno en el que la topología no es la usual.

<u>Ejemplo</u>: $X = (0,1) \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico no es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Quitar puntos no nos lleva a ningún resultado porque el número de componentes conexas obtenidas es el mismo, por ello recurrimos a una propiedad más fina: X no es conexo por caminos (vimos un ejemplo muy parecido) y $\mathbb{R}$ sí lo es.

Para terminar y sólo como ilustración, citaremos un profundo y difícil resultado debido a L.E.J. Brouwer, llamado *Teorema de invariancia del dominio* que afirma: *Si X_1, $X_2 \subset \mathbb{R}^n$ son homeomorfos (con la topología inducidad por la usual), entonces X_1 es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si X_2 también lo es.*

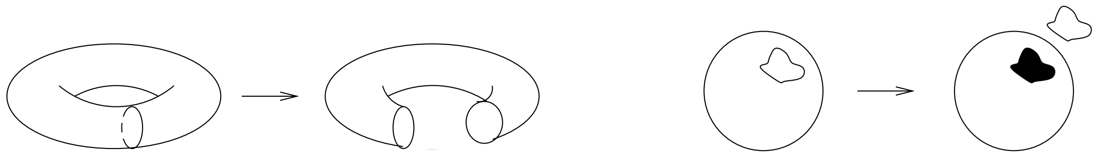
<u>Notación:</u> Muchas veces se llama "dominio" a un abierto conexo, de ahí el nombre del teorema.

Como aplicación, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ no pueden ser homeomorfos, porque si no $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ y $\mathbb{R}^4$ también lo serían, pero $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ no es un abierto de $\mathbb{R}^4$ (¿por qué?) y $\mathbb{R}^4$ sí lo es. De la misma forma se deduce que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos si $n \neq m$. Nosotros en esta sección hemos probado que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, $n \neq 1$, no son homeomorfos y el próximo capítulo veremos que tampoco lo son $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$, $n \neq 2$, pero parece que el resto de los casos requiere artillería pesada (= invariancia del dominio) que se escapa a este pacífico curso. Esto no es más de la muestra de lo elusivo que es el concepto de dimensión en Matemáticas. Quien tenga curiosidad puede leer el capítulo 16 del libro de I. Stewart "*The problems of Mathematics*" Oxford University Press 1987. Después, o antes, es aconsejable leer también el resto de los capítulos del libro porque es magnífico.

5. El Grupo Fundamental

Topología y grupos: una combinación explosiva

Podríamos pensar en generalizar la manera en la que habíamos probado que algunos espacios no eran homeomorfos suprimiendo ahora curvas de un espacio y estudiando la conexión del resultado. Por ejemplo, para ver que T^2 (la superficie de una rosquilla) y S^2 no son homeomorfos, podríamos suprimir un meridiano en T^2, con lo cual sigue de una pieza, y sea cual sea su imagen en S^2 seguro que descompone la superficie esférica en dos trozos.



Sobre el papel puede que sea un buen proyecto, pero es difícil de formalizar. Aunque parezca increíble, es muy complicado probar que una curva cerrada sin autointersecciones determina dos regiones en S^2 (éste es el famoso *Teorema de separación de Jordan*, enunciado por C. Jordan en 1893 y probado completamente por O. Veblen en 1905). De todos modos esta idea tiene gran importancia porque dio lugar, en manos de E. Betti y sobre todo de H. Poincaré, al nacimiento de los llamados grupos de homología (nada que ver con las homologías de la Geometría Proyectiva) y a la reducción de problemas topológicos a otros combinatorios.

Resulta que una idea aparentemente equivalente es mucho más asequible: estudiar los "lazos" que se pueden hacer con curvas dentro del espacio considerado. Por ejemplo, en T^2 un meridiano y un paralelo parecen esencialmente diferentes, esto es, uno no se puede deformar en el otro, sin embargo en S^2 parece que cualquier par de curvas de goma se podrían transformar la una en la otra (para transformar un meridiano en otro basta un giro). En el desarrollo de esta idea se asignará un grupo de "lazos" a cada espacio topológico, de manera que a veces se podrán traspasar algunos problemas de la Topología a la Teoría de Grupos, originándose una rama de las Matemáticas llamada *Topología Algebraica* (que aquí será más bien *Topología* algebraica).

Definición: Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Se dice que α es un <u>lazo con base en x_0</u> si $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ es una función continua con $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. En este caso al lazo determinado por $\alpha(1-t)$ se le llama <u>lazo inverso</u> y se suele escribir $\overline{\alpha}$.

<u>Notación:</u> Denotaremos mediante c_{x_0} el <u>lazo constante</u> $c_{x_0}(t) = x_0$.

Ejemplo: Considerando el lazo con base en $(1,0)$, $\alpha = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$, se tiene que $\overline{\alpha} = (\cos(2\pi t), -\operatorname{sen}(2\pi t))$. Y considerando $\beta = (\cos(2\pi t^2), \operatorname{sen}(2\pi t^2))$ se deduce $\overline{\beta} = (\cos(2\pi(t^2 - 2t)), \operatorname{sen}(2\pi(t^2 - 2t)))$.

Tanto α como β representan una circunferencia recorrida una vez en sentido antihorario, mientras que $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ la recorren en sentido horario. Nótese que al representar un lazo por su imagen (su dibujo) no vemos, entre otras cosas, la dirección y la velocidad con que se recorre.

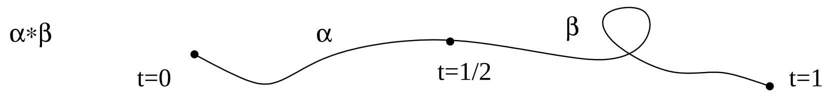
Una propiedad fundamental de los lazos es que se pueden "componer" poniendo uno a continuación de otro. A pesar de que la terminología es la misma, no tiene que ver con la composición de funciones.

Definición: Dados dos lazos α, β con base en x_0, se define su composición como

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Observación: Los caminos, esto es, funciones continuas α, $\beta : [0,1] \longrightarrow X$, también se pueden componer siempre que $\alpha(1) = \beta(0)$ y se pueden definir sus caminos inversos de la misma forma que en el caso de los lazos. Cada vez que compongamos dos caminos daremos por supuesto, por tanto, que ya hemos verificado que el extremo final del primero coincide con el origen del segundo.

Como ya mencionamos, la continuidad de la composición está asegurada por el *Pasting Lemma*. Nótese que hay que escribir $2t$ y $2t-1$ para que α y β se recorran el doble de rápido (en el primer medio segundo y en el segundo medio segundo, respectivamente) y así $\alpha * \beta$ se recorra en el tiempo unidad.



Como cabía esperar, que un lazo sea deformable en otro recibe un nombre raro, y ya están ocupados *isomorfismo, homomorfismo* y *homeomorfismo*.

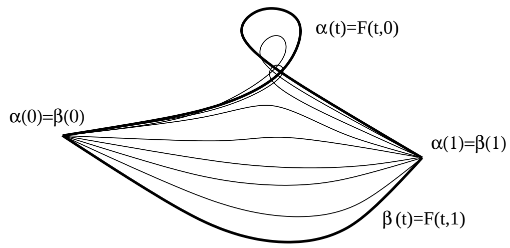
Definición: Sea X un espacio topológico y α y β dos lazos con el mismo punto base o dos caminos con $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$. Se dice que $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ es una homotopía y que α es homótopo a β si F es continua y

$$F(t,0) = \alpha(t), \qquad F(t,1) = \beta(t) \qquad \text{para todo } t \in [0,1]$$
$$F(0,s) = \alpha(0), \qquad F(1,s) = \beta(1) \qquad \text{para todo } s \in [0,1].$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^n$ cualquier par de lazos o caminos como antes son homótopos por medio de la combinación convexa

$$F(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t).$$

De alguna forma, una homotopía se comporta con las curvas como esos programas de ordenador que permiten transformar poco a poco una imagen en otra, o elaborar la película de la evolución transformando a la mona Chita en cualquier *top-model* del momento.



Nótese que las homotopías no son únicas: puede haber multitud de maneras de transformar α en β y para nuestros propósitos será indiferente conocer la fórmula explícita de estas transformaciones. Sólo queremos saber si α se puede verdaderamente transformar en β, pero no cómo. Esto aparecerá reflejado claramente en la definición de *grupo fundamental*

> *No me desagradaba ver algo en movimiento; me apartaba de todas aquellas existencias inmóviles que me miraban como con ojos fijos. Me decía, siguiendo el balanceo de las ramas: los movimientos nunca existen del todo, son pasos intermedios entre dos existencias, tiempos débiles.*

Es importante notar que los lazos pueden tener autointersecciones y que partes de ellos pueden colapsar a un punto por el proceso de homotopía, ya que para cada s fijo, $F(\,\cdot\,,s)$ es continua pero no necesariamente un homeomorfismo. Por ejemplo, considerando los *nudos* en $\mathbb{R}^3$, que son los lazos homeomorfos a S^1, con el mismo punto base; todos ellos son homótopos según el ejemplo anterior y sin embargo, como mencionamos en el tercer capítulo acerca de S^1 y el nudo trébol, típicamente no es posible en $\mathbb{R}^3$ deshacer un nudo en otro sin romperlo. La homotopía correspondiente deberá crear autointersecciones y colapsar lazadas. El estudio de los nudos esencialmente diferentes que se pueden construir en $\mathbb{R}^3$ constituye una bella parte de la Topología Algebraica llamada Teoría de Nudos (no confundir con la Teoria di Nudi al contárselo a nuestros amigos italianos).

Después de leerlo algunas veces, el siguiente resultado debiera ser evidente o al menos natural para todos. La demostración se incluye para practicar con estos conceptos.

Lema 5.1: *La relación de homotopía entre lazos, o caminos con los mismos extremos, es una relación de equivalencia.*

Dem.: 1) α es homótopo a sí mismo por la homotopía $F(t,s)=\alpha(t)$.

2) Si $F(t,s)$ es una homotopía entre α y β, $F(t,1-s)$ lo es entre β y α.

3) Si $F(t,s)$ es una homotopía entre α y β y $G(t,s)$ es otra entre β y γ, entonces

$$H(t,s)=\begin{cases} F(t,2s) & 0\le s\le 1/2\\ G(t,2s-1) & 1/2\le s\le 1\end{cases}$$

es una homotopía entre α y γ. ■

Notación: Normalmente escribiremos $[\alpha]$ para denotar la clase de equivalencia de α. Nótese que si α_1 y α_2 son homótopos entre sí y β_1 y β_2 son homótopos entre sí, entonces $\alpha_1*\beta_1$ y $\alpha_2*\beta_2$ también lo son (para cada s fijo las homotopías definen sendos caminos, basta componerlos). Así pues podemos definir

$$[\alpha]*[\beta]=[\alpha*\beta].$$

Apelando a un ejemplo conocido, esto es lo mismo que se hacía en las clases de restos módulo n en que $\overline{x}\cdot\overline{y}$ se definía como $\overline{x\cdot y}$ y no dependía de los representantes elegidos: módulo 5 se tiene $\overline{2}\cdot\overline{3}=\overline{6}=\overline{7}\cdot\overline{8}=\overline{56}=\dots$

Vamos por fin a la definición estrella de este capítulo (que se debe a H. Poincaré en las postrimerías del siglo XIX).

Definición: Sea X un espacio topológico y sea $x_0\in X$. Se llama grupo fundamental de X relativo al punto base x_0 y se denota con $\pi_1(X,x_0)$ al conjunto de clases de equivalencia de lazos con base en x_0 bajo la relación de homotopía, dotado con la operación composición.

Quitando *rollo*: el grupo fundamental está formado por todos los posibles lazos no homótopos con base en x_0.

Parece claro que si añadimos γ después de $\alpha*\beta$ es lo mismo que (homótopo a) añadir $\beta*\gamma$ después de α, y que $c_{x_0}*\alpha$ es lo mismo que α y que $\alpha*\overline{\alpha}$ es lo mismo que c_{x_0}... En definitiva que $\pi_1(X,x_0)$ es realmente un grupo. Todo esto parece muy fácil pero cuando uno mira la demostración es realmente impenetrable e imposible de recordar, por ello merece la pena complementarla o sustituirla por la idea general que subyace.

Cuando queremos comprender una cosa, nos situamos frente a ella. Solos, sin ayuda, de nada podría servir todo el pasado del mundo. Y después la cosa desaparece y lo que hemos comprendido desaparece con ella.

Las ideas generales son algo más halagador. Y además, los profesionales y los mismos aficionados acaban siempre por tener razón.

Esencialmente lo que ocurre es que al componer caminos se introducen “cambios de velocidad” y necesitamos una homotopía correctora para controlarlos. Por ejemplo, en $(\alpha*\beta)*\gamma$, γ ocupa la mitad del tiempo y α la mitad de la mitad, mientras que en $\alpha*(\beta*\gamma)$ es a la inversa, con lo cual la homotopía correspondiente debe acelerar gradualmente γ y lentificar α. Lo alambicado de las homotopías involucradas complica la demostración, la cual sugerimos saltar en una primera lectura (y no aconsejamos más).

Proposición 5.2: *El grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$ es realmente un grupo, esto es*

$$1)\ [\alpha]*([\beta]*[\gamma])=([\alpha]*[\beta])*[\gamma]$$

$$2)\ [\alpha]*[c_{x_0}]=[c_{x_0}]*[\alpha]=[\alpha]$$

$$3)\ [\alpha]*[\overline{\alpha}]=[\overline{\alpha}]*[\alpha]=[c_{x_0}].$$

Nota: Para recordar la definición de grupo, véase el final de la sección.

Dem.: 1) Tenemos que probar que $\alpha*(\beta*\gamma)$ es homótopo a $(\alpha*\beta)*\gamma$, para ello basta definir la homotopía llovida del cielo

$$F(t,s)=\begin{cases}\alpha\big(\frac{4t}{s+1}\big) & 0\le t\le \frac{s+1}{4}\\ \beta(4t-s-1) & \frac{s+1}{4}\le t\le\frac{s+2}{4}\\ \gamma\big(\frac{4t-s-2}{2-s}\big) & \frac{s+2}{4}\le t\le 1\end{cases}$$

y comprobar (ejercicio mecánico) que

$$F(\,\cdot\,,0)=\alpha*(\beta*\gamma), \qquad F(\,\cdot\,,1)=(\alpha*\beta)*\gamma.$$

2) Considerando

$$F(t,s)=\begin{cases}\alpha\big(\frac{2t}{2-s}\big) & 0\le t\le \frac{2-s}{2}\\ x_0 & \frac{2-s}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

se tiene que α (tómese $s=0$) y $\alpha*c_{x_0}$ (tómese $s=1$) son homótopos. Un razonamiento simétrico cambiando en la fórmula anterior t por $1-t$ y α por $\overline{\alpha}$ prueba que α y $c_{x_0}*\alpha$ también lo son.

3) Definiendo

$$F(t,s)=\begin{cases}\alpha(2ts) & 0\le t\le 1/2\\ \alpha(2s(1-t)) & 1/2\le t\le 1\end{cases}$$

se tiene $F(t,0)=c_{x_0}(t)$ y $F(t,1)=(\alpha*\overline{\alpha})(t)$, de donde $[\alpha]*[\overline{\alpha}]=[c_{x_0}]$. Cambiando t por $1-t$ se tiene $[\overline{\alpha}]*[\alpha]=[c_{x_0}]$. ■

Ejemplo: Como en $\mathbb{R}^n$ todos los lazos son homótopos entre sí, para cualquier $x_0\in\mathbb{R}^n$ se tiene $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)=\{[c_{x_0}]\}$. Es decir, es el grupo trivial, el que sólo tiene un elemento. Podemos escribir $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)\cong\{e\}$, $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)\cong\{0\}$.

Como sólo lo hemos escrito de tres formas diferentes veamos una más.

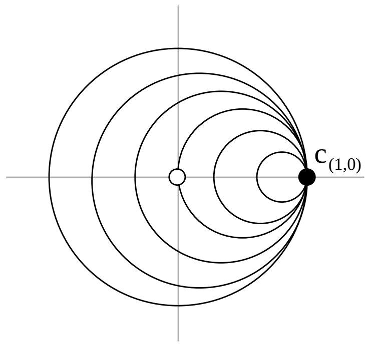
Definición: Se dice que un espacio topológico, X, es simplemente conexo si es conexo por arcos y $\pi_1(X,x_0)$ es el grupo trivial.

Observación: Más adelante veremos que esta definición no depende de x_0.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo. Además la homotopía "universal"

$$F(t,s)=(1-s)\alpha(t)+s\beta(t)$$

sirve para demostrar que, en general, cualquier subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.



Un error típico es usar demasiado la homotopía anterior. Nótese que una homotopía no puede salirse del espacio que estemos considerando y si un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no es convexo no podemos usar $F(t,s)$ como antes. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ al intentar pasar el lazo $\alpha(t)=(\cos(2\pi t),\operatorname{sen}(2\pi t))$ a $c_{(1,0)}$ parece que, cualquiera que sea la homotopía, tenemos que pasar obligatoriamente por $(0,0)$ y salirnos del espacio. Si esto es cierto, α y $c_{(1,0)}$ no son homótopos y $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ no es simplemente conexo.

Ejemplo (otra vez lo mismo): Si $q\in S^n$, $S^n-\{q\}$ es simplemente conexo. Tomando como q el polo norte (si no lo es hacemos que lo sea con un giro) como la proyección estereográfica $p : S^n - \{q\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, podemos pasar un lazo en $S^n - \{q\}$ a uno en $\mathbb{R}^n$, contraerlo a c_{x_0} y después volver a $S^n - \{q\}$.

Del ejemplo anterior se tiene que todo lazo α en S^n tal que $\operatorname{Im} \alpha \neq S^n$ es homótopo al lazo constante. Parece obvio que para $n > 1$ no hay lazos con $\operatorname{Im} \alpha = S^n$. Parece obvio pero no lo es, de hecho existen y por culpa de esos dichosos lazos la demostración de que S^n, $n > 1$, es simplemente conexo se complica bastante de manera que no entran muchas ganas de escribirla y dejaremos algún sencillo detalle al lector.

Te quejas porque las cosas no se disponen a tu alrededor como un ramillete de flores, sin tomarte la molestia de hacer nada.

Esencialmente probaremos que cualquiera de los lazos "malos" es homótopo a uno "bueno".

Proposición 5.3: *Si $n > 1$, S^n es simplemente conexo.*

Dem.: Recuérdese que

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Los abiertos $\mathcal{U}_1 = S^n \cap \{x_{n+1} > -1/2\}$ y $\mathcal{U}_2 = S^n \cap \{x_{n+1} < 1/2\}$ son subconjuntos de S^n simplemente conexos (ejercicio, utilícese la estereográfica).

Sea α un lazo con $\alpha(0) \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ (siempre podemos suponer que éste es el caso por simetría). Para empezar (que nadie se asuste) aplicamos el lema del número de Lebesgue al recubrimiento $\alpha^{-1}(\mathcal{U}_1) \cup \alpha^{-1}(\mathcal{U}_2)$ para encontrar $0 = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n = 1$ con $t_{j+1} - t_j < \delta$ tales que $\alpha(t) \in \mathcal{U}_1$ o $\alpha(t) \in \mathcal{U}_2$ si $t_j \le t \le t_{j+1}$. Quizá eliminando y renumerando algunos de los t_j conseguimos que la imagen de $[t_j, t_{j+1}]$ por α esté alternativamente en $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ (Ejercicio: escribir todo esto con detalle). Así que definiendo

$$\alpha_j(t) = \alpha((1-t)t_j + t\, t_{j+1}), \qquad j = 0, 1 \dots, n-1,$$

se tiene $\operatorname{Im} \alpha_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\operatorname{Im} \alpha_1 \subset \mathcal{U}_2$, $\operatorname{Im} \alpha_2 \subset \mathcal{U}_1$,...etc. Sean $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$,...caminos en $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ conectando $\alpha_1(0)$ con $\alpha_1(1)$, $\alpha_3(0)$ con $\alpha_3(1)$, $\alpha_5(0)$ con $\alpha_5(1)$,...(su existencia está asegurada por la conexión por caminos de $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$). Como los caminos $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$,...y $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$,...estám incluidos en $\mathcal{U}_2$ y tienen los mismos extremos es fácil ver que existen homotopías F_1, F_3, F_5,...entre ellos (ejercicio, de hecho en cualquier simplemente conexo todos los caminos con los mismos extremos son siempre homótopos). Consideremos finalmente

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \in [t_{2j}, t_{2j+1}] \\ F_{2j-1}\big(\dfrac{t - t_{2j-1}}{t_{2j} - t_{2j-1}}, s\big) & \text{si } t \in [t_{2j-1}, t_{2j}]. \end{cases}$$

Entonces F es una homotopía entre α y un camino β con $\operatorname{Im} \beta \subset \mathcal{U}_1$. Como $\mathcal{U}_1$ es simplemente conexo, se tiene $[\alpha] = [c_{x_0}]$. ■

Observación: Nótese que en la demostración anterior no se utilizan propiedades muy específicas de S^n, lo cual sugiere alguna generalización que mencionaremos en una sección posterior.

¿Que alguien ha llegado hasta aquí y no sabe nada de grupos? Bueno... puede consultar este brevísimo

Apéndice de Teoría de grupos:

Definición: Un grupo $(G, *)$, es un conjunto G dotado con una operación (una función) $* : G \times G \longrightarrow G$ con las siguientes propiedades:

1) Asociativa: $g_1, g_2, g_3 \in G \ \Rightarrow \ (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$.

2) Elemento neutro: Existe $e \in G$ tal que $g * e = e * g = g$ para todo $g \in G$.

3) Elemento inverso: Para cada $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

Además, si se cumple

4) Conmutativa: $g_1, g_2 \in G \ \Rightarrow \ g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

se dice que el grupo es abeliano o conmutativo.

Con las operaciones y conjuntos que solemos manejar, la obstrucción para ser grupo suele radicar en la tercera propiedad, esto es, en que la operación que utilicemos no se pueda *deshacer*.

Ejemplo: $\mathbb{Z}$ con la suma (es decir, $* = +$) es un grupo abeliano. El elemento neutro es cero y el inverso de n es $-n$ porque $n + (-n) = 0$.

Ejemplo: $\mathbb{Z}$ con la multiplicación tiene elemento neutro, el 1, pero no es un grupo porque, por ejemplo, 3 no tiene inverso ($3 \cdot x = 1$ no tiene solución en $\mathbb{Z}$). De otra forma, $2 \cdot 3 = 6$ pero no podemos *deshacer* la operación pasando el 6 al 3 multiplicando por un entero.

Ejemplo: Las matrices reales cuadradas $n \times n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, no forman un grupo con la multiplicación porque hay matrices que no tienen inversa. Sin embargo las matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con determinante no nulo, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, sí forman un grupo con la multiplicación. Este grupo no es abeliano, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación: Los grupos $\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot\big)$ son muy generales porque contienen como subgrupos (grupos dentro de ellos) copias de todos los grupos finitos (abelianos y no abelianos) y muchos de los infinitos. Por ejemplo, si cambiamos de nombre a los elementos de $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ de la siguiente forma:

$$\overline{0} \leftrightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{1} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \overline{2} \leftrightarrow B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

entonces $(\mathbb{Z}_3, +)$ es lo mismo que $(G, \cdot)$ donde $G = \{I, A, B\}$ y cualquier igualdad en el primer grupo se transforma en otra equivalente en el segundo grupo y viceversa. De esta manera $\overline{1} + \overline{1} = \overline{2}$, $\overline{1} + \overline{2} = \overline{0}$ y $\overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$, corresponden respectivamente a $A \cdot A = B$, $A \cdot B = I$ y $A \cdot A \cdot A = I$.

Este proceso de cambiar los nombres de los elementos (y quizá de la operación de grupo) para obtener otro grupo, se llama isomorfismo.

DEFINICIÓN: Dados dos grupos $(G, *)$ y $(G', \cdot)$, se dice que son <u>isomorfos</u> si existe una función biyectiva $f : G \longrightarrow G'$ tal que $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$.

En general se emplea una notación "rococó" para nombrar a las funciones que se comportan bien con respecto a la operación de grupo (que pasan "productos en productos").

DEFINICIÓN: Sean $(G, *)$ y $(G', \cdot)$, dos grupos. Se dice que $f : G \longrightarrow G'$ es un <u>homomorfismo</u> si satisface $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$. Además se dice que es un <u>monomorfismo</u> si es un homomorfismo inyectivo y que es un <u>epimorfismo</u> si es un homomorfismo sobreyectivo.

DEFINICIÓN: Se llama <u>núcleo</u> de un homomorfismo $f : G \longrightarrow G'$ al conjunto

$$\operatorname{Ker} f = \{g \in G \,:\, f(g) \text{ es el elemento neutro de } G'\}.$$

<u>Observación:</u> Esta definición es una generalización de la usada en Álgebra Lineal y, como allí, se cumple que f es inyectiva (monomorfismo, en nuestro caso) si y sólo si $\operatorname{Ker} f$ es el elemento neutro (nótese que los homomorfismos siempre envían el neutro en el neutro).

<u>Ejemplo</u>: $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ son isomorfos por medio de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida como $f(x) = e^x$.

<u>Ejemplo</u>: $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_9$ dada por la suma de las cifras módulo 9, es un homomorfismo pero no es monomorfismo porque, por ejemplo $f(103) = \overline{4} = f(67)$ o porque $f(306) = \overline{0}$ implica $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.

<u>Ejemplo</u>: Consideremos los grupos $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ y la función

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{con } f(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

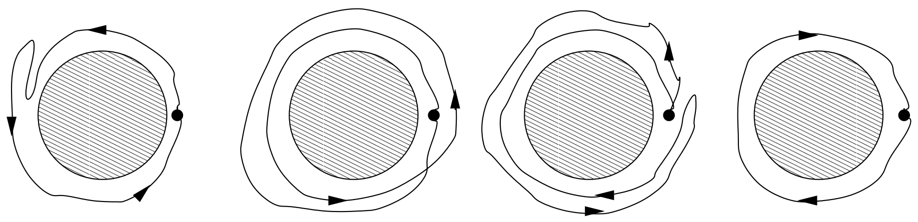
Entonces f es homomorfismo porque $f(n+m) = f(n) \cdot f(m)$ y evidentemente no es sobreyectiva pero sí inyectiva, es decir, es monomorfismo pero no epimorfismo.

La recta real se enrolla

Toda esta sección está dedicada a hallar un grupo fundamental no trivial. El espacio a considerar no podía ser otro que el más perfecto, la musa y *miss* de las Matemáticas: la circunferencia.

> [...] *el mundo de las explicaciones y razones no es el de la existencia. Un círculo no es absurdo: se explica por la rotación de un segmento de recta en torno a uno de sus extremos. Pero un círculo no existe.*

Antes de nada vamos a tratar de intuir el resultado. Para verlos mejor, dibujemos los lazos en S^1 un poco separados de S^1 o pensemos que son "nudos" alrededor de una barandilla.



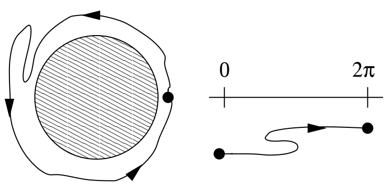
Cada uno de los lazos dibujados parece que no se puede deformar en ninguno de los otros. Si nos mandasen explicar por qué, diríamos que el primero da una vuelta, el segundo dos, el tercero parece que va a dar una pero después se arrepiente y no da ninguna (es homótopo la lazo constante) y el cuarto da menos una vuelta (una vuelta en sentido negativo). Esto sugiere que los lazos en S^1, salvo homotopías, están caracterizados por el número de vueltas que dan, esto es, tenemos una biyección

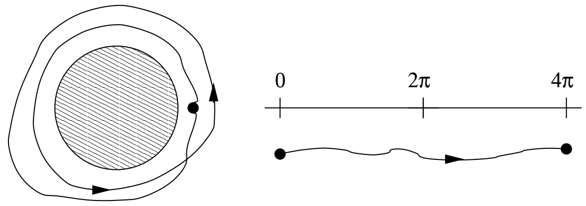
$$\begin{aligned}\pi_1(S^1, x_0) &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ [\alpha] &\longmapsto \text{ n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de vueltas de } \alpha\end{aligned}$$

que de hecho es un isomorfismo, cuando en $\mathbb{Z}$ se considera la suma, porque al componer un camino que da n vueltas con otro que da m, obtenemos un tercero que da $n+m$ vueltas.

La principal dificultad está en definir rigurosamente el número de vueltas. Un primer intento podría ser contar cuántas veces pasa el lazo por el punto base, pero esto no es adecuado porque siempre podemos, como en el tercer ejemplo, pasar varias veces y después volver para atrás. Habría que tener en cuenta la dirección en la que se pasa por el punto base, pero sin saber si se tiene una derivada no nula, esto es imposible.

La idea que funciona es cortar el lazo por el punto base y *desenrollarlo* sobre $\mathbb{R}$.





Si comenzamos a desenrollar en 0, acabaremos en $2\pi \cdot \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de vueltas.

Nuestra primera y principal tarea en esta sección será dar sentido matemático a desenrollar un lazo para llegar a una definición rigurosa del número de vueltas en la demostración del Teorema 5.6. Con ello probar, por ejemplo que el primer y el tercer lazo de los antes citados no son homótopos es tan complicado como el aserto del maestro peripatético: "Una vez no es ninguna vez". Llegar al isomorfismo $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ sólo requiere ir un poco más allá.

La razón última por la que los lazos en S^1 se pueden desenrollar en $\mathbb{R}$ es que $\mathbb{R}$ y S^1 son localmente (en intervalos pequeños) iguales (homeomorfos) y que existe una función, $p(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ que permite *enrollar* todo $\mathbb{R}$ en S^1.

Definición: Sean X y E espacios topológicos y sea $p : E \longrightarrow X$ continua y sobreyectiva. Se dice que p es una <u>proyección recubridora</u> y que E es un <u>espacio recubridor</u> de X si para todo $x \in X$ existe un entorno $\mathcal{U}(x)$ con $p^{-1}(\mathcal{U}(x)) = \bigcup \mathcal{V}_\alpha$ donde $\mathcal{V}_\alpha$ son abiertos disjuntos en E tales que $p\big|_{\mathcal{V}_\alpha} : \mathcal{V}_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}(x)$ es un homeomorfismo.

<u>Ejemplo (En realidad, El Ejemplo)</u>: $\mathbb{R}$ es un espacio recubridor de S^1 con proyección recubridora $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $p(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$.

Es obvio que p es continua y sobreyectiva. Comprobemos la definición para $x = (1, 0) \in S^1$. Los otros casos son similares. Tomemos en S^1 el abierto $\mathcal{U} = S^1 \cap \{x > 0\}$, entonces

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_n.$$

Cada uno de estos intervalos es abierto en $\mathbb{R}$ y homeomorfo por p a $\mathcal{U}$ porque $\mathcal{U}$ se puede escribir en polares como $(-\pi/2, \pi/2)$ y $p\big|_{\mathcal{V}_n}$ es simplemente $t \mapsto t - 2\pi n$.

<u>Ejemplo</u>: $\mathbb{R}^+$ no es un espacio recubridor de S^1 con $p : \mathbb{R}^+ \longrightarrow S^1$, $p(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$.

Toamndo como antes $\mathcal{U} = S^1 \cap \{x > 0\}$, se tiene

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = [0, \frac{\pi}{2}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \mathcal{V}_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n.$$

Pero $\mathcal{V}_0 = [0, \pi/2)$ no puede ser homeomorfo por p a $\mathcal{U}$. Una manera rápida de probarlo sin mirar a p es decir que $\mathcal{V}_0 - \{0\}$ es conexo pero $\mathcal{U} - \{\text{cualquier punto}\}$ no lo es.

Ahora vamos a hacer un *lifting* a los caminos en S^1 para estirarlos sobre $\mathbb{R}$. Esto tiene su gracia, aunque sea poca, porque el término *elevación* en la siguiente definición es la traducción de *lifting* en la terminología anglosajona.

Definición: Sea E un espacio recubridor de X y p su proyección recubridora. Dada $f : A \longrightarrow X$, se dice que $\widetilde{f}$ es una <u>elevación</u> de f si $p(\widetilde{f}(x)) = f(x)$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

El diagrama sugiere el nombre de elevación si acordamos que E está "por encima" de X. La expresión *el diagrama es conmutativo* se utiliza para indicar que da lo mismo ir de A a X directamente que a través de E y es la consigna mil veces repetida en muchos libros de Álgebra y de Topología cuyos personajes diagramas adquieren, como las nubes, caprichosas formas intangibles materializadas en nombres como *lema de la serpiente*, *lema del hexágono*, *lema de la mariposa*...

Ahora probaremos que todos los caminos, en particular los lazos, se pueden desenrollar en el espacio recubridor. Éste es el principal lema auxiliar para calcular el grupo fundamental de S^1.

Lema 5.4: (*Lifting lemma.* Lema de la elevación) *Sean E, X y p como antes. Fijado $x_0 \in X$ y $e_0 \in E$ con $p(e_0) = x_0$, todo camino, α, en X con $\alpha(0) = x_0$ admite una única elevación, $\widetilde{\alpha}$, en E con $\widetilde{\alpha}(0) = e_0$.*

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\widetilde{\alpha}}{\nearrow} & E \\ & & \downarrow p \\ [0,1] & \xrightarrow[\alpha]{} & X \end{array}$$

Dem.: La idea es sencilla: aunque no podamos escribir $\widetilde{\alpha} = p^{-1} \circ \alpha$ porque p no tiene por qué ser inyectiva, si lo podemos hacer en "intervalos pequeños" donde p es homeomorfismo.

Consideremos el recubrimiento, $\mathcal{C}$ de X por los $\mathcal{U}(x)$ que aparecen en la definición de espacio recubridor cuando x varía en X, entonces $\alpha^{-1}(\mathcal{U}(x))$ da lugar a un recubrimiento de $[0,1]$. Tomando N con $1/N$ menor que el número de Lebesgue del recubrimiento (véase el capítulo anterior) tenemos que cada intervalo $[j/N,(j+1)/N]$, $j = 0,1,2,\dots,N-1$, cumple $\alpha([j/N,(j+1)/N]) \subset \mathcal{U}_j$ con $\mathcal{U}_j \in \mathcal{C}$.

Por definición, $p^{-1}(\mathcal{U}_0)$ contiene a un abierto $\mathcal{W}_0$ con $e_0 \in \mathcal{W}_0$ tal que $p\big|_{\mathcal{W}_0} : \mathcal{W}_0 \longrightarrow \mathcal{U}_0$ es un homeomorfismo, así pues, esto implica

$$\widetilde{\alpha}(t) = \big(p\big|_{\mathcal{W}_0}\big)^{-1} \circ \alpha(t) \qquad \text{para } t \in [0, 1/N].$$

De la misma forma, $p^{-1}(\mathcal{U}_1)$ contiene a un abierto $\mathcal{W}_1$ con $(p\big|_{\mathcal{W}_0})^{-1}\big(\alpha(1/N)\big) \in \mathcal{W}_1$ tal que $p\big|_{\mathcal{W}_1} : \mathcal{W}_1 \longrightarrow \mathcal{U}_0$ es un homeomorfismo y por tanto

$$\widetilde{\alpha}(t) = \big(p\big|_{\mathcal{W}_1}\big)^{-1} \circ \alpha(t) \qquad \text{para } t \in [1/N, 2/N].$$

Procediendo inductivamente de la misma forma, tras N pasos se completa la prueba. ■

También las homotopías se pueden elevar.

Lema 5.5: *Sean E, X, p, x_0 y e_0 como antes, entonces cada homotopía de caminos $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ con $F(0,0) = x_0$ admite una única elevación, $\widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$ tal que $\widetilde{F}$ es una homotopía de caminos con $\widetilde{F}(0,0) = e_0$.*

Dem.: La construcción de la elevación $\widetilde{F}$ es análoga a la hecha en la demostración anterior para caminos. Ahora hay que considerar $[j/N,(j+1)/N] \times [k/N,(k+1)/N]$

y notar que dos cuadrados adyacentes no comparte un punto sino todo un "intervalo" cerrado. Los detalles se dejan al lector. Lo que falta por probar es que esta elevación, $\widetilde{F}$, es realmente una homotopía entre los caminos $\widetilde{F}(t,0)$ y $\widetilde{F}(t,1)$, esto es, que $\widetilde{F}(0,s)$ y $\widetilde{F}(1,s)$ son constantes cuando $s \in [0,1]$.

Como F es homotopía de caminos, $F(0,s)$ es constante, de hecho $F(0,s) = x_0$. Consideremos $\mathcal{U}(x_0)$ y $\mathcal{V}_\alpha$ como en la definición de espacio recubridor. Cada uno de los $\mathcal{V}_\alpha$ debe contener exactamente un elemento de $p^{-1}(\{x_0\})$ ya que $p\big|_{\mathcal{V}_\alpha} : \mathcal{V}_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}(x_0)$ es un homeomorfismo. Sea

$$A = \{\widetilde{F}(0,s) \,:\, s \in [0,1]\}.$$

Por definición de elevación $p(A) = \{F(0,s) \,:\, s \in [0,1]\} = \{x_0\}$ y se tiene $A \subset p^{-1}(\{x_0\})$. Por otra parte

$$A = \bigcup_\alpha A \cap \mathcal{V}_\alpha$$

y si A contuviera más de un punto, esta igualdad daría lugar a una separación de A. lo cual es una contradicción porque $[0,1]$ es conexo y $\widetilde{F}$ es continua. Un argumento idéntico prueba que $\widetilde{F}(1,s)$ también es constante. ■

Con estos dos resultados podemos llegar por fin al objetivo de esta sección.

Teorema 5.6: $\pi_1(S^1,(1,0)) \cong \mathbb{Z}$.

Dem.: Como ya dijimos, el isomorfismo viene dado por el *número de vueltas*, el cual, multiplicado por 2π coincide con el punto al que se llega al *desenrollar* sobre $\mathbb{R}$. Escribiendo todo esto con rigor, tomamos $X = S^1$, $E = \mathbb{R}$, $p(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $x_0 = (1,0)$, $e_0 = 0$ y definimos

$$v([\alpha]) = \frac{\widetilde{\alpha}(1)}{2\pi} \qquad \text{para cada lazo con base en } x_0,\ \alpha, \text{ en } S^1.$$

Esta definición tiene sentido gracias al lema anterior que asegura que lazos homótopos tienen elevaciones homótopas y, por tanto, con los mismos extremos.

Nótese que $p(\widetilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = x_0$ implica que $v([\alpha]) \in \mathbb{Z}$. Queremos demostrar que

$$v : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

es un isomorfismo. Para ello basta probar que es una función biyectiva y que es un homomorfismo (no falta la "e", recuérdese que un homomorfismo es una función entre grupos que preserva las operaciones).

1) *v es sobreyectiva.* Tomando $\alpha_N(t) = (\cos(2\pi N t), \operatorname{sen}(2\pi N t))$, se tiene que $v([\alpha_N]) = N$ porque $\widetilde{\alpha}_N(t) = 2\pi N t$.

2) *v es inyectiva.* Si $v([\alpha]) = v([\beta])$ entonces $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$, $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0) = 0$ y $F(t,s) = p((1-s)\widetilde{\alpha}(t) + s\widetilde{\beta}(t))$ es una homotopía entre α y β, esto es $[\alpha] = [\beta]$.

3) *v es homomorfismo.* Tenemos que demostrar

$$v([\alpha] * [\beta]) = v([\alpha]) + v([\beta]).$$

Consideremos el camino en $\mathbb{R}$ definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \widetilde{\beta}(2t-1) + \widetilde{\alpha}(1) & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Como $\widetilde{\alpha}(1)$ es un múltiplo entero de 2π, se tiene que $p \circ \gamma = \alpha * \beta$ y por tanto $\gamma = \widetilde{\alpha * \beta}$. De aquí

$$v([\alpha] * [\beta]) = v([\alpha * \beta]) = \frac{\gamma(1)}{2\pi} = \frac{\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1)}{2\pi} = v([\alpha]) + v([\beta])$$

y el teorema queda demostrado. ■

Observación: Como subproducto de la prueba se deduce que todo lazo con base en x_0 es homótopo a $\alpha_N(t) = (\cos(2\pi N t), \operatorname{sen}(2\pi N t))$ para algún $N \in \mathbb{Z}$, es decir, los únicos lazos distintos en la circunferencia, salvo homotopías, consisten en dar cierto número de vueltas.

Sorprendentemente, una cantidad discreta como el número de vueltas, admite representaciones analíticas bajo condiciones de regularidad. Por ejemplo, si $\alpha(t) = (a(t), b(t))$ es un lazo en S^1 con derivada continua entonces, con la notación de la demostración anterior,

$$v([\alpha]) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (ab' - ba').$$

De hecho la elevación de α admite la siguiente fórmula integral (véase M.P. do Carmo "*Geometría diferencial de curvas y superficies*" Alianza Universidad Textos 1990)

$$\widetilde{\alpha}(t) = \int_0^t (ab' - ba').$$

Estas fórmulas pueden considerarse dentro de la llamada Topología Diferencial y se aplican en varios resultados de "Geometría Global", entre ellos el Teorema de Gauss-Bonnet. Es difícil resistir la tentación de comentar una joya matemática de tal calibre: Cuanto mayor es una esfera menor es la curvatura en cada punto (por eso la Tierra nos parece plana). Usando las definiciones y unidades adecuadas, se tiene que para toda esfera la integral de la curvatura es 4π. El teorema de Gauss-Bonnet afirma, entre otras cosas, que aunque modifiquemos la esfera como si fuera una bola de barro, sin romper ni pegar trozos, la superficie obtenida seguirá cumpliendo que la integral de la curvatura es 4π. De hecho, cualquier superficie compacta en $\mathbb{R}^3$ con esta propiedad debe ser homeomorfa a la superficie esférica. En general hay una inesperada conservación global de la curvatura, preservada por homeomorfismos diferenciables, en las superficies compactas de $\mathbb{R}^3$ que además las caracteriza. Según se dice, dependiendo del valor de cierta "curvatura global del Universo" éste existirá eternamente o colapsará.

Pero, ¿hay más ejemplos?

El panorama que se ha presentado hasta ahora no es demasiado halagüeño: Es verdad que fijado un punto hemos conseguido asignar un grupo a cada espacio topológico, pero incluso para un espacio tan sencillo como S^1, nos ha llevado toda una sección calcularlo y no parece que la técnica usada sea fácilmente generalizable. Seguramente el lector espera algo así como “en esta sección veremos un método para calcular el grupo fundamental de un espacio topológico genérico...”, pero no; los resultados que veremos aquí sólo se aplicarán a espacios que tienen demasiado que ver con S^1. Aunque nos guardaremos algún as en la manga (especialmente el *Teorema de Seifert-van Kampen*, véase el final de la sección), esto es sólo el reflejo de lo complicados que pueden ser los grupos fundamentales y lo compleja que se hace la Teoría de la Homotopía desde el comienzo. Como ejemplo diremos que todavía nadie sabe si S^3 es la única variedad compacta tridimensional, salvo homeomorfismos, que es simplemente conexa (*Conjetura de Poincaré*, véase el libro de I. Stewart citado al final del último capítulo).

Comencemos con un ejemplo realmente tonto.

Ejemplo: Consideremos el espacio N (inicial de nota) con la topología usual, definido como

$$N = I \cup S^1 \qquad \text{con } I = \{(-2, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \le y \le 1\}.$$

Todos los lazos con base en $x_0 = (1, 0)$ deben permanecer en S^1 y todos los lazos con base en $y_0 = (-2, -1)$ deben permanecer en I, porque estas son las componentes conexas de N. Como $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ e I es simplemente conexo, se tiene

$$\pi_1(N, x_0) \cong \mathbb{Z}, \qquad \pi_1(N, y_0) \cong \{0\}.$$

Esto no tiene nada de sorprendente porque hemos considerado dos espacios conexos en lugar de uno, pero nos puede hacer pensar que quizá se pueda variar el grupo fundamental haciendo variar el punto base.

Proposición 5.7: *Si X es conexo por caminos y $x_0, y_0 \in X$, entonces*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, y_0).$$

Dem.: Sea γ un camino cualquiera con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y_0$. Vamos a probar que

$$\begin{aligned} \phi \;:\; \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [\overline{\gamma} * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Es biyectiva con inversa $\phi^{-1}([\beta]) = [\gamma * \beta * \overline{\gamma}]$ ya que

$$(\phi^{-1} \circ \phi)([\alpha]) = [\gamma * (\overline{\gamma} * \alpha * \gamma) * \overline{\gamma}] = [\alpha] \;\Rightarrow\; \phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{Id}$$

y lo mismo con $\phi \circ \phi^{-1}$. También se cumple

$$\phi([\alpha_1]) * \phi([\alpha_2]) = [\overline{\gamma} * \alpha_1 * \gamma] * [\overline{\gamma} * \alpha_2 * \gamma] = [\overline{\gamma} * \alpha_1 * \alpha_2 * \gamma] = \phi([\alpha_1 * \alpha_2])$$

y por tanto ϕ es homomorfismo. ■

Ejemplo: Para cualquier $x_0 \in S^1$, se tiene $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, lo cual ya estaba muy claro por la propia simetría de la circunferencia.

Veamos ahora otro resultado que, aunque sencillo, es muy importante.

Teorema 5.8: *Para cada función continua $f : X \longrightarrow Y$ se define $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ como $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$, entonces:*

1) *f_* es un homomorfismo de grupos y si f es la identidad f_* también lo es.*

2) *Para $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ continuas, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

3) *Si f es un homeomorfismo, f_* es un isomorfismo.*

Dem.: 1) Si f es la identidad, $f(x) = x$, entonces $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [\alpha]$. Por otra parte, la propiedad de homomorfismo se sigue de la relación

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta),$$

que es trivial recordando la definición de $\alpha * \beta$.

2) Es una consecuencia obvia de la propiedad asociativa $(g \circ f) \circ \alpha = g \circ (f \circ \alpha)$.

3) Por los apartados anteriores, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y $(f \circ f^{-1})(y) = y$ implican $((f^{-1})_* \circ f_*)([\alpha]) = [\alpha]$ y $(f_* \circ (f^{-1})_*)([\alpha]) = [\alpha]$, así que f_* tiene una inversa, $f_*^{-1} = (f^{-1})_*$. ■

En el lenguaje de la *Teoría de Categorías* el resultado anterior, sobre todo 2), expresa la *functorialidad*. El *functor*, en este caso, es la forma de asignar a cada *objeto* de la *categoría* de los espacios topológicos con un punto fijado, un *objeto* de la *categoría* de los grupos, de manera que la composición de *morfismos* (funciones entre ellos) sea respetada. Cuando uno encuentra un *functor* debiera ponerse contento porque ha encontrado una relación entre dos partes de las Matemáticas, en este caso la Topología y la Teoría de Grupos.

Es importante notar que el recíproco de 3) no es cierto en general, por ejemplo $\pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) \cong \{0\} \cong \pi_1(S^2, x_0)$ pero $\mathbb{R}^2$ y S^2 no son homeomorfos. En el lenguaje antes mencionado esto se expresa diciendo que el functor no es *completamente fiel*. Debemos entender el proceso de asignación $(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ como una "función" (functor) que asigna un grupo a un espacio topológico (fijado un punto) sin llegar a caracterizarlo.

> *La función no explicaba nada; permitía comprender en conjunto lo que era una raíz, pero de ningún modo 'ésa'. Esa raíz, su color, su forma, su movimiento detenido, estaba... por debajo de toda explicación. Cada una de sus cualidades se le escapaba un poco,* [...]

Como contrapunto diremos que se conocen todas las superficies compactas (variedades bidimensionales) y sus grupos fundamentales. Tras comprobar que son distintos, se sigue que el grupo fundamental sí es determinante en el caso de superficies compactas. Sin embargo, recuérdese la Conjetura de Poincaré, queda mucho por hacer en otros casos.

Más cultura matemática: Una idea para distinguir más espacios es introducir grupos de "lazos" de dimensiones mayores: bidimensionales, tridimensionales, etc. En esta línea, W. Hurewicz generalizó $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_n(X, x_0)$ en los años 30, pero estos nuevos grupos resultan ser bastante desconocidos incluso en espacios muy sencillos. En contraste, los llamados grupos de homología y cohomología (relacionados con la idea citada al comienzo del capítulo) permiten cálculos sencillos e incluso representaciones geométricas y analíticas.

Su definición excede el contenido del curso pero sus ventajas son patentes sin más que comprobar que en casi cualquier libro titulado “Topología Algebraica”, H_n y H^n aparecen innumerablemente más veces que π_n.

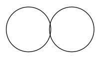
Veamos cómo utilizar el teorema anterior para probar que algunos espacios no son simplemente conexos.

Ejemplo: Consideremos el espacio

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x+1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

y la función

$$\begin{aligned} f \ : \quad A &\longrightarrow S^1 \\ (x, y) &\longmapsto (|x| - 1, y) \end{aligned}$$

f :  $\xrightarrow{\text{(doblar)}} S^1$

Tomando el lazo en A con base en $(2, 0)$, $\beta(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t)$, se tiene $f_*([\beta]) = [\alpha]$ con α el lazo que genera $\pi_1(S^1, (1, 0))$, $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Si β fuera homótopo al lazo trivial (esto es, si $[\beta]$ fuera el elemento neutro), como f_* es homomorfismo, α también lo sería, lo cual es una contradicción. Por tanto A no es simplemente conexo, de hecho, al ser α generador, se tiene un epimorfismo (homomorfismo sobreyectivo)

$$f_* \ : \ \pi_1(A, (2, 0)) \longrightarrow \pi_1(S^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}.$$

Esto nos dice que aun sin calcular $\pi_1(A, (2, 0))$, debe “contener” en algún sentido a $\mathbb{Z}$. Por curiosidad, diremos que este grupo no es abeliano y está aproximadamente descrito al final de la sección.

Por fin vamos a ver un problema que no sabíamos resolver con las técnicas de capítulos anteriores.

Ejemplo: La corona $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x^2 + y^2 < 9\}$ no es homeomorfa al rectángulo $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x < 2, 1 < y < 2\}$.

Si existiera un homeomorfismo $f : Q \longrightarrow C$, considerando $r_0 = f^{-1}((2, 0))$ y definiendo $g : C \longrightarrow S^1$ como $g(x, y) = (x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$, se llega a una contradicción con el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(Q, r_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(C, (2, 0)) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(S^1, (1, 0)) \\ \{0\} & \underset{\text{(isomorfismo)}}{\xrightarrow{\text{biyectiva}}} & ¿? & \underset{\text{(epimorfismo)}}{\xrightarrow{\text{sobreyectiva}}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

La sobreyectividad de g_* se sigue como antes observando que $\beta(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$ se aplica en $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, el generador de $\pi_1(S^1, (1, 0))$.

La moraleja de estos ejemplos es que los espacios con agujeros no son simplemente conexos.

El siguiente resultado nos dice que si *aplastamos* poco a poco un espacio en uno de sus subespacios, el grupo fundamental no varía. Primero definimos lo que es *aplastar poco a poco*: una especie de homotopía pero con espacios topológicos en lugar de con caminos.

DEFINICIÓN: Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que A es un retracto por deformación fuerte de X, si existe una función continua $R : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tal que para todo $x \in X$, todo $a \in A$ y todo $s \in [0,1]$, se cumple

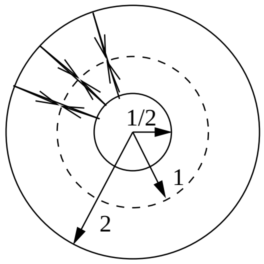
$$1)\ R(x,0) = x \qquad 2)\ R(x,1) \in A \qquad 3)\ R(a,s) = a.$$

Ejemplo: La circunferencia S^1 es un retracto por deformación fuerte de la corona

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1/4 < x^2 + y^2 < 4\}$$

tomando

$$R(\vec{x}, s) = (1-s)\vec{x} + s\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}.$$



Observación: Es importante notar que la imagen de R debe estar en X, esto es, que en los pasos intermedios del *aplastamiento* no nos podemos salir fuera del espacio considerado. Por ejemplo, $C \cup \{(3,0)\}$ no sería un retracto por deformación fuerte de S^1 con R como antes, porque, en general $R((3,0),s) \notin C \cup \{(3,0)\}$.

Proposición 5.9: *Si A es un retracto por deformación fuerte de X, para cualquier $a_0 \in A$ se tiene*

$$\pi_1(X, a_0) \cong \pi_1(A, a_0).$$

Dem.: Sea $j : A \longrightarrow X$ la inclusión y $f : X \longrightarrow A$ la función definida como $f(x) = R(x,1)$. Si probamos que las composiciones indicadas en los siguientes diagramas

$$\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, a_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(A, a_0)$$

$$\pi_1(X, a_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(A, a_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, a_0)$$

son la identidad, se deduce que f_* tiene a j_* como inversa y que es un isomorfismo.

En el primer diagrama $j_* \circ f_* = \mathrm{Id}$ es trivial ya que $f(j(a)) = a$. En el segundo, consideremos cualquier $[\alpha] \in \pi_1(X, a_0)$. La función $R(\alpha(t), s)$ define una homotopía de α en el lazo $\beta(t) = R(\alpha(t), 1)$ con $\mathrm{Im}\,\beta \subset A$, así pues $f\big(j(\beta(t))\big) = \beta(t)$, es decir $f_* \circ j_*([\beta]) = [\beta]$ y, como $[\alpha] = [\beta]$, se deduce el resultado. ∎

Ejemplo: Cualquier corona circular, C, es homeomorfa a la corona circular del último ejemplo (ejercicio: dar una fórmula para tal homeomorfismo) y S^1 es un retracto por deformación fuerte de ella, por tanto

$$\pi_1(C, c_0) \cong \pi_1(S^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}.$$

Ejemplo: Considerando R como antes, esto es,

$$R(\vec{x}, s) = (1-s)\vec{x} + s\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||} \qquad \text{con } \vec{x} \in \mathbb{R}^2,$$

se tiene que S^1 es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$, con lo cual

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} \qquad \text{con } x_0 = (1,0).$$

En particular, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ no son homeomorfos.

Ejemplo: Por medio de

$$R\big((x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), s\big) = (x_1, x_2, \dots, x_n, (1-s)x_{n+1}),$$

se tiene que $\mathbb{R}^n$ es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1}$, así tenemos una nueva manera de probar que $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo partiendo de que $\mathbb{R}$ lo es.

Este último ejemplo también es consecuencia del siguiente resultado que afirma que el grupo fundamental respeta los productos cartesianos.

Proposición 5.10: *Sean X, Y espacios topológicos con $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, entonces*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

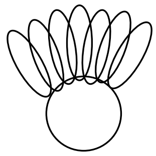
Dem.: Por razones obvias modificaremos la notación para las proyecciones, nombrándolas como p^X y p^Y con $p^X : X \times Y \longrightarrow X$, $p^Y : X \times Y \longrightarrow Y$.

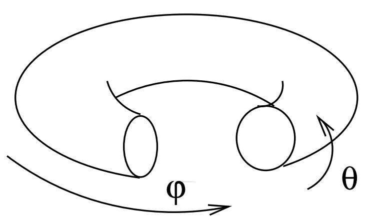
Definamos el siguiente homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto (\ p^X_*([\alpha])\ ,\ p^Y_*([\alpha])\ ) \end{aligned}$$

Es obvio que ϕ es sobreyectiva (epimorfismo) porque la antiimagen de $([\beta_1], [\beta_2])$ contiene al lazo en $X \times Y$ dado por $\alpha(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$. Por otra parte, si β_1 y β_2 son homótopos al lazo constante por las homotopías F_1 y F_2 respectivamente, entonces §$\alpha = (\beta_1, \beta_2)$ también lo es por la homotopía $F(t,s) = (F_1(t,s), F_2(t,s))$ en $X \times Y$. Por consiguiente, el núcleo de ϕ es trivial y ϕ es inyectiva. ■

Notación: Se llama toro (bidimensional) al espacio $T^2 = S^1 \times S^1$ con la topología usual. Nótese que geométricamente corresponde (es homeomorfo) a la superficie de una rosquilla porque es lo que se obtiene al poner una circunferencia "sobre" cada punto de una circunferencia. Una forma de verlo analíticamente, es notar que los puntos de S^1 están determinados por un ángulo $0 \le \theta \le 2\pi$ con 0 y 2π identificados, mientras que los de un toro están determinados por un par de ángulos, latitud y longitud, (θ, ϕ) con $0 \le \theta, \phi \le 2\pi$ y las mismas identificaciones.





Ejemplo: Para cualquier $x_0 = (p_1, p_2) \in T^2$

$$\pi_1(T^2, x_0) \cong \pi_1(S^1, p_1) \times \pi_1(S^1, p_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

En particular S^2 y T^2 no son homeomorfos: una rosquilla no es un balón de fútbol.

Ejemplo: El grupo fundamental del cilindro

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 = 1,\ -1 \le z \le 2\} = S^1 \times [-1, 2]$$

es, para cualquier punto $x_0 \in K$,

$$\pi_1(K, x_0) \cong \pi_1(S^1, p_1) \times \pi_1([-1, 2], p_2) \cong \mathbb{Z} \times \{0\} \cong \mathbb{Z}.$$

Para terminar esta sección mencionaremos brevemente un importante resultado que no hemos incluido aquí porque se sale del alcance del curso. Nótese primero que en la demostración de que S^n era simplemente conexo no usamos ninguna propiedad especial de S^n, solamente que $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ eran abiertos simplemente conexos y $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ conexo por caminos, por lo cual la misma demostración sirve para probar

Si $X = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ con $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ simplemente conexos y $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ conexo por caminos, entonces X es simplemente conexo.

El *Teorema de Seifert-van Kampen* va mucho más allá y en una versión muy restringida, que no contiene exactamente al resultado anterior, pero lo complementa, afirma que

Si $X = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ con $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ conexos por caminos y $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ es simplemente conexo, entonces el grupo fundamental de X es isomorfo al producto libre de los de $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$.

Lo del producto libre de grupos significa el grupo formado por todas las *palabras* cuyas "letras" son alternativamente elementos distintos del neutro, de cada uno de los grupos. Por ejemplo, en el espacio formado por dos circunferencias tangentes, el grupo fundamental es isomorfo al producto libre de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$. Algunos elementos son 2**6**(-1)**1**, **1**4**6**4, donde los números en negrita (¿o negrota?) distinguen el grupo $\mathbb{Z}$ de una de las circunferencias, digamos la de la izquierda. Así 2**6**(-1)**1** corresponde al lazo cuya receta de caja fuerte es: "Da dos vueltas a la circunferencia de la derecha, después seis a la de la izquierda, una en sentido negativo a la de la derecha y termina con una a la de la izquierda".

Algunos teoremas bonitos

Lo poco que hemos logrado arañar de la Topología Algebraica es suficientemente poderoso para que podamos resolver algunos problemas que estaban fuera de nuestro alcance con los métodos de capítulos anteriores y además enunciar algunos teoremas que casi todos los matemáticos, licenciados o no, tildarían de bonitos.

> *–¿Los retratos del gran salón? Señor –dice con una sonrisa temblorosa–, no entiendo nada de pintura. Claro, no se me escapa que Bordurin es un gran pintor, veo que tiene, ¿cómo se dice?, oficio, paleta. Pero el placer, señor, el placer estético me es ajeno.*
>
> *Le digo con simpatía:*
>
> *–A mí me pasa lo mismo con la escultura.*
>
> *–¡Ah, señor! A mí también. Y con la música, y con la danza. Sin embargo, no carezco de ciertos conocimientos. Bueno, es inconcebible: he visto jóvenes que no sabían ni la mitad de lo que yo sé y, sin embargo, plantados delante de un cuadro, parecían experimentar placer.*

Para abrir boca, comencemos con algunos ejemplos relacionados con homeomorfismos.

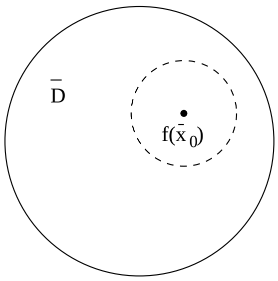
Ejemplo: $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para $n > 2$.

Si existiera un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ podemos suponer, quizá componiendo con una traslación, que $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Por tanto $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ sería homeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, pero S^1 y S^{n-1} son, respectivamente, retractos por deformación fuerte de estos espacios por medio de $R(\vec{x}, s) = (1-s)\vec{x} + s\vec{x}/||\vec{x}||$ y se tiene

$$\pi_1(\mathbb{R}^2-\{\vec{0}\}, \vec{x_0}) \cong \pi_1(S^1, \vec{x_0}) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(\mathbb{R}^n-\{\vec{0}\}, \vec{x_0}) \cong \pi_1(S^{n-1}, \vec{x_0}) \cong \{0\} \quad \text{para } n > 2.$$

Ejemplo: Sea D la bola abierta unidad en $\mathbb{R}^2$, entonces cualquier homeomorfismo $f : \overline{D} \longrightarrow \overline{D}$ manda el interior en el interior y la frontera (esto es, S^1) en la frontera.

Supongamos que existiera un punto $\vec{x_0} \in \text{Fr}(\overline{D}) = S^1$ con $f(\vec{x_0}) \in \text{Int}(\overline{D}) = D$ entonces $\overline{D} - \{\vec{x_0}\}$ sería simplemente conexo (por ser convexo) y $\overline{D} - \{f(\vec{x_0})\}$ no lo sería por tener un agujero, por tanto no pueden ser homeomorfos.



Para probar rigurosamente que $\overline{D} - \{f(\vec{x_0})\}$ no es simplemente conexo podemos hacer varias cosas: 1) Si tenemos suerte y $f(\vec{x_0}) = (0,0)$ hacemos el retracto de siempre a S^1. 2) Si sabemos algo de variable compleja, aplicamos una transformación de Möbius y el caso anterior. 3) Tomando $\epsilon > 0$ tal que $B(f(\vec{x_0}), \epsilon) \subset \overline{D}$, tras aplicar $\vec{y} \mapsto \epsilon^{-1}(\vec{y} - f(\vec{x_0}))$ a $\overline{D} - \{f(\vec{x_0})\}$, podemos usar el retracto de siempre.

Ejemplo: Con la notación anterior $D \cup \{(1,0)\} \cup \{(-1,0)\}$ y $D \cup \{(1,0)\}$ no son homeomorfos porque con un razonamiento como el de antes tenemos que las imágenes de $(1,0)$ y de $(-1,0)$ sólo pueden ser $(1,0)$ y se perdería la inyectividad.

Veamos ahora los resultados bonitos. Aunque el primero no lo es tanto, al menos sorprende.

Proposición 5.11: *Sea D la bola abierta unidad en $\mathbb{R}^2$, entonces no existe ninguna función continua $f : \overline{D} \longrightarrow S^1$ tal que sea la identidad en la frontera (esto es, $f\big|_{S^1}(x) = x$).*

Dem.: Sea $x_0 = (1,0)$, entonces se tiene el homomorfismo

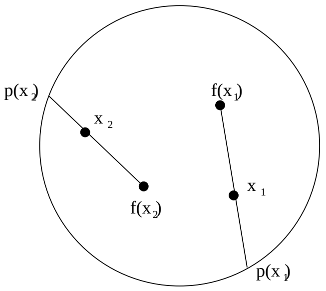
$$f_* : \pi_1(\overline{D}, x_0) \longrightarrow \pi_1(S^1, x_0).$$

Como $\pi_1(\overline{D}, x_0) \cong \{0\}$, para todo lazo α con base en x_0 $f_*([\alpha])$ debe ser homótopo al lazo constante en S^1, pero si $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ se tiene $f_*([\alpha]) = [\alpha]$ que es un generador de $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$. ■

El siguiente resultado fue anunciado en un capítulo anterior y muestra lo poderosas que son las técnicas algebraicas en Topología (aunque es posible probarlo por métodos elementales menos directos. Véase M. de Guzmán "Mirar y ver" Alhambra 1977).

Teorema 5.12: (Teorema de Brouwer $n = 2$) *Una función continua de una bola cerrada de $\mathbb{R}^2$ en sí misma, deja al menos un punto fijo.*

Dem.: Obviamente podemos suponer que la bola cerrada es $\overline{D}$, la bola unidad.



Supongamos que existiera $f : \overline{D} \longrightarrow \overline{D}$ continua con $f(x) \neq x$, $\forall x \in \overline{D}$. Sea $p(x) \in S^1$ el punto de intersección con S^1 de la semirrecta que parte de $f(x)$ y pasa por x, entonces $p : \overline{D} \longrightarrow S^1$ es una función continua cuya restricción a S^1 es la identidad, lo cual contradice el resultado anterior. ■

Observación: Este teorema, generalizado a $\mathbb{R}^n$, fue probado por L.E.J. Brouwer en 1910. Por otro lado, un poderoso teorema de Topología Algebraica debido a S. Lefschetz en 1926, permite "determinar", en función de ciertas propiedades cualitativas, el número de punto fijos de una función continua definida en una variedad compacta. Por ejemplo, si $f : S^2 \longrightarrow S^2$ es continua y no manda ningún punto a su antípoda entonces "esencialmente" tiene dos puntos fijos. Para perfilar el significado de esta afirmación, diremos que es fácil imaginar una función tal con dos puntos fijos (un giro), es difícil imaginarla con uno (indicación incomprensible: síganse las líneas de fuerza en un dipolo eléctrico) e imposible con ninguno.

Ejemplo: Un folio rectangular es homeomorfo a uno circular, por tanto cuando lo arrugamos y lo superponemos sobre uno idéntico, siempre hay algún punto cuya proyección no ha cambiado de lugar.

Ejemplo: El sistema

$$(x + \operatorname{sen}(|x - y|) + 3)(x^{-1}e^{xy} + x + 3y^4x^{-1}) = 1$$

$$\cos x + \operatorname{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2} + y^{-1} = -5$$

tiene alguna solución $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolver el sistema es lo mismo que hallar un punto fijo, $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$, de

$$f(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$$

con

$$\begin{aligned} f_1(x, y) =& x(e^{xy} + x^2 + 3y^4)^{-1} - \operatorname{sen}(|x - y|) - 3, \\ f_2(x, y) =& -(5 + \cos x + \operatorname{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2})^{-1}. \end{aligned}$$

Está claro que f_1 y f_2 están acotadas, así que para R suficientemente grande se tiene $f\big(\overline{B}((0, 0), R)\big) \subset \overline{B}((0, 0), R)$ y se puede utilizar el teorema de Brouwer.

Ahora probaremos el teorema de Borsuk-Ulam para $n = 2$ que también fue anunciado anteriormente. Separaremos primero un resultado auxiliar que contiene casi toda la demostración.

Proposición 5.13: *No existe ninguna función continua $f : S^2 \longrightarrow S^1$ satisfaciendo $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in S^2$.*

Dem.: Sea f con las propiedades mencionadas, quizá componiendo con un giro podemos suponer $f(1, 0, 0) = (1, 0)$.

Sea α el ecuador de S^2, $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 0)$; como S^2 es simplemente conexo, $f_*([\alpha])$ es el elemento neutro de $\pi_1(S^2, (1, 0))$ y por tanto (véase la demostración del isomorfismo $\pi_1(S^2, (1, 0)) \cong \mathbb{Z})$ debe ser $v(f_*([\alpha])) = \widetilde{f \circ \alpha}(1)/(2\pi) = 0$.

Por otra parte, consideremos el camino en $\mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \widetilde{\beta}(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \widetilde{\beta}(2t - 1) + \widetilde{\beta}(1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

donde $\widetilde{\beta}$ es una elevación (con $\widetilde{\beta}(0) = 0$) del camino en S^1

$$\beta(t) = f(\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), 0).$$

De $p \circ \widetilde{\beta} = \beta(1) = f(-1, 0, 0) = -f(1, 0, 0) = (-1, 0)$ se sigue $\widetilde{\beta}(1) = (2k + 1)\pi$, recuérdese que $p(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, y un cálculo directo prueba $p \circ \gamma = f \circ \alpha$, así que $\gamma = \widetilde{f \circ \alpha}$ y $\gamma(1) = \widetilde{f \circ \alpha}(1) \neq 0$. ■

Teorema 5.14: (Teorema de Borsuk-Ulam $n = 2$) *Si $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es continua existe algún $\vec{x} \in S^2$ tal que $f(\vec{x}) = f(-\vec{x})$.*

Observación: En particular, en la superficie terrestre hay al menos un punto en el que la presión y la temperatura coincide con la de sus antípodas.

Dem.: Si $f(\vec{x}) \neq f(-\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in S^2$, definamos la función $g : S^2 \longrightarrow S^1$

$$g(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}) - f(-\vec{x})}{||f(\vec{x}) - f(-\vec{x})||}.$$

La relación $g(\vec{x}) = -g(-\vec{x})$ contradice el resultado anterior. ■

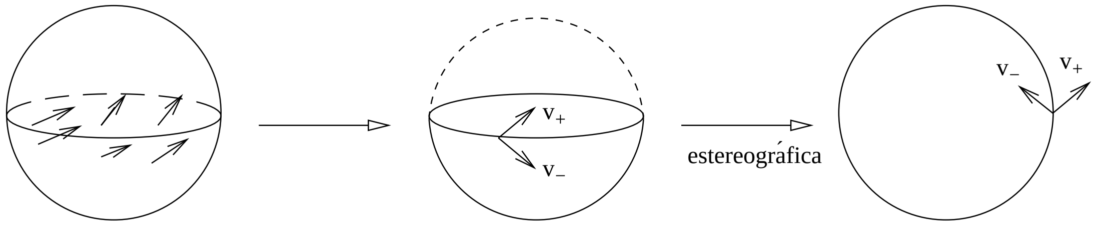
Veamos ahora uno de los teoremas típicos para hacer propaganda de la Topología Algebraica.

Teorema 5.15: (Teorema de la bola de pelo) *Sobre una esfera no existe ningún campo de vectores tangentes y no nulos continuo.*

Observación: El nombre viene de que a veces el teorema se enuncia diciendo que no se puede peinar una bola de pelo sin hacer algún remolino. (Los *punks* no son contraejemplo porque sus pelos no son tangentes ni los *pijos* peinados hacia atrás tampoco porque su cabeza no es una bola de pelo, ni la de nadie, por muy *hippie* que sea). Como consecuencia del teorema de Lefschetz al que antes nos hemos referido, hay "esencialmente" dos remolinos. Por otra parte, un toro (la figura geométrica) se puede peinar sin remolinos y, en general, el teorema de Poincaré-Hopf afirma que en una esfera con k "asas" aparecen "esencialmente" $2k-2$ remolinos.

Dem.: Siempre podemos suponer que los vectores de un campo que no se anula son unitarios: basta dividir por su norma.

Con una simetría por el ecuador podemos pasar el campo de vectores del hemisferio norte al sur y así obtenemos dos campos de vectores en el hemisferio sur, ambos simétricos en el ecuador. Aplicando la proyección estereográfica (los vectores del campo se proyectan de la forma lógica: conservando ángulos con respecto a las proyecciones de los meridianos y paralelos), obtenemos dos campos de vectores unitarios, v_+ y v_-, en una bola cerrada de $\mathbb{R}^2$, digamos la bola unidad tras una homotecia, de manera que en la frontera v_+ y v_- son simétricos a través de (las tangentes a) S^1.



Sea $w = w(x, y)$ el campo de vectores unitario que asigna al punto (x, y) el vector que subtiende un ángulo igual a la suma de los ángulos de v_+ y v_- (esto es como multiplicarlos considerándolos números complejos). Según la propiedad de simetría

$$w(\cos t, \operatorname{sen} t) = \big(\cos(\pi + 2t), \operatorname{sen}(\pi + 2t)\big)$$

(nótese que los ángulos de v_+ y v_- son $ang._\pm = \pi/2 + t \mp \theta$), con lo cual, si $\gamma(t) = w(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$, $[\gamma] \in \pi_1(S^1, (-1, 0))$ y no es el elemento neutro (da dos vueltas). Pero esto es una contradicción porque

$$F(t, s) = w\big((1-s)(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) + s(-1, 0)\big)$$

es una homotopía en S^1 entre γ y el lazo constante $c_{(-1,0)}$. ■

También es verdad que teoremas como el anterior generan una especie de antipropaganda de las Matemáticas invitando a preguntar "¿y para qué quiero peinar una bola de pelo?" Uno puede ser radical diciendo que seguramente para tan poco como estudiar el origen del Universo. De hecho es lo mismo: "El Big-Bang ocurrió hace n años" es la traducción poética para los periódicos y documentales de "Las 'ecuaciones diferenciales del universo' tienen una singularidad en $t = -n$" y el teorema anterior sirve para demostrar que en el plano de fases de algunas ecuaciones diferenciales deben aparecer puntos singulares. Realmente el teorema, por serlo, es menos engañoso (¿Y si las ecuaciones de la Física se estropeasen fatalmente cuando el tiempo se hace muy negativo? ¿Y si la Teoría General de la Relatividad fuera incorrecta a escala cosmológica? (Una primera versión de las ecuaciones de Einstein implicaba que el Universo es estacionario, no se expande).

No hay finalidades ni justificaciones necesarias, sólo excusas para disfrutar haciendo o viendo cosas bellas y artísticas, aunque ello sea perfectamente criticable por no ser útiles ni acabar con el hambre en el mundo.

> *Decir que hay imbéciles que obtienen consuelo con las bellas artes. Como mi tía Bigeois: "Los 'Preludios' de Chopin me ayudaron tanto cuando murió tu pobre tío." Y las salas de concierto rebosan de humillados, de ofendidos que, con los ojos cerrados, tratan de transformar sus rostros pálidos en antenas receptoras. Se figuran que los sonidos captados corren en ellos, dulces y nutritivos, y que sus padecimientos se convierten en música, como los del joven Werther; creen que la belleza se compadece de ellos.*

El estudio del comportamiento local y global en variedades de los *tipos de peinados* y sus generalizaciones (*fibrados vectoriales* para los amigos) desempeña un papel de importancia en Física y permite resolver problemas que escapan a las técnicas del curso. Como ejemplo de esto último, nótese que una banda cilíndrica (un brazalete), C, y una banda de Möbius, M, son compactas conexas y, por poderse retraer a S^1, tienen el mismo grupo fundamental. Sin embargo, en C es fácil encontrar dos *peinados* linealmente independientes (por ejemplo todos los pelos hacia el este y todos los pelos hacia el sur) mientras que si existiera en M, haciendo el producto vectorial de ambos obtendríamos un campo de vectores normales continuo en M, lo cual es imposible (¿por qué? Nótese que cada vector normal se da la vuelta al moverse por el ecuador. Si todavía existe, véanse las antenas de las hormigas de `http://www.worldofescher.com/gallery/MobiusStripIILg.html`).

Como fin de fiesta, veamos la demostración de un teorema bien conocido que, según se dice, no puede admitir una prueba algebraica (quien quiera opinar lo contrario que espere a cursar Álgebra II, lea el capítulo 18 del libro de I. Stewart "Galois Theory" Chapman and Hall 1991 y no haga caso de las disculpas).

Teorema 5.16: (Teorema fundamental del Álgebra) *Cualquier polinomio en $\mathbb{C}[x]$ de grado $n > 0$ tiene n raíces en $\mathbb{C}$, contando multiplicidades.*

Dem.: Como es bien sabido, procediendo inductivamente, basta demostrar que tiene una raíz. También podemos suponer que el polinomio es mónico (el coeficiente de mayor grado es uno) y que los coeficientes son reales considerando el producto por el polinomio que tiene sus coeficientes conjugados. (Ejercicio: Poner todo esto en claro).

Sea, por tanto , $P \in \mathbb{R}[x]$ mónico y digamos que P no tiene raíces en $\mathbb{C}$. En particular no las tendrá en $\mathbb{R}$ y podemos suponer $P(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Identificando cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x+iy \in \mathbb{C}$ y con un punto de S^1 cuando $x^2+y^2=1$, se tiene que para cualquier r

$$\gamma_r(t) = \frac{P(\alpha_r(t))}{|P(\alpha_r(t))|} \qquad \text{donde } \alpha_r(t) = re^{2\pi it} = r\cos(2\pi t) + ir\,\mathrm{sen}\,(2\pi t),$$

es un lazo en S^1 con base en $(1,0) = 1+0i$. La homotopía $F(t,s) = \gamma_{(1-s)r}(t)$ prueba que es siempre homótopo al lazo constante $\gamma_0 = c_{(1,0)}$. Por ser P de grado n y mónico

$$\lim_{R\to\infty} \frac{P(\alpha_R(t))}{(\alpha_R(t))^n} = 1,$$

y se tiene que para R suficientemente grande

$$H(t,s) = \frac{(1-s)P(\alpha_R(t)) + s(\alpha_R(t))^n}{|(1-s)P(\alpha_R(t)) + s(\alpha_R(t))^n|}$$

es una homotopía bien definida entre los lazos γ_R y $\cos(2\pi nt) + i\,\mathrm{sen}\,(2\pi nt)$ (el límite anterior asegura que el denominador no se anula). Pero esto es una contradicción porque este último lazo no es homótopo al lazo constante. ■

FIN

Un libro. Naturalmente, al principio sólo sería un trabajo aburrido y fatigoso; no me impediría existir ni sentir que existo. Pero llegaría un momento en que el libro estaría escrito, estaría detrás de mí, y pienso que un poco de claridad caería sobre mi pasado.