Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

-El examen consta de cinco problemas de los cuales sólo se deben escoger cuatro**, en otro caso se corregirán los que se hayan escrito primero. Se ruega rodear con un círculo, en esta hoja, los números de los problemas elegidos.**

- Además, al final del examen se propone un ejercicio de mayor dificultad señalado como opcional, este último problema es voluntario **y se sugiere que lo intenten sólo aquellos que, habiendo completado el resto de los problemas, quieran optar a la matrícula de honor.**

EJERCICIOS

1) Responder breve pero razonadamente a los tres apartados siguientes:

a) Hallar una fórmula exacta para $f(n)=\sum_{d|n} d|\mu(d)|$ en términos de la factorización de n.

b) La suma de los divisores positivos de la forma $6k+1$ de un número, ¿es una función multiplicativa?

c) ¿Qué hora es 19^{1999} horas después de las once?

2) Caracterizar mediante condiciones de congruencia los primos, $p>3$, tales que $x^2+4x+7\equiv 0\ \ (p)$ tiene solución.

3) Sea $\alpha=\sum 5^{-n^5}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) α es un número irracional.

b) $\beta=\sqrt{3+\sqrt{\alpha}}$ también es irracional.

c) Existe un número natural, n, tal que la milésima cifra decimal de $n\beta$ es un 7.

4) Sabiendo que el grupo de clases de $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ y que está generado por $(3,1+\sqrt{-17})$, hallar el número de soluciones de $x^2+17y^2=9^{1999}$.

5) Sea la curva elíptica $E:\ y^2=x^3+8$ y sean $P=(2,4)$ y $Q=(1,3)$. Calcular $1999P+1999Q$.

OPCIONAL:

Estudiar si la serie $\sum\big(7+p^3\cos(\pi(p+2)/6)\big)^{-2}$ converge, donde p recorre los primos. (*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios).

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

-El examen consta de cinco problemas de los cuales sólo se deben escoger cuatro**, en otro caso se corregirán los que se hayan escrito primero. Se ruega rodear con un círculo, en esta hoja, los números de los problemas elegidos.**

- Además, al final del examen se propone un ejercicio de mayor dificultad señalado como opcional, este último problema es voluntario **y se sugiere que lo intenten sólo aquellos que, habiendo completado el resto de los problemas, quieran optar a la matrícula de honor.**

EJERCICIOS

1) Consideremos el número real $\alpha = \sum 7^{-n^7}$. Demostrar que: i) α es un número irracional. ii) $\beta = \sqrt{5+\sqrt{\alpha+2}}$ también es irracional. iii) Existe un entero positivo, n, tal que la vigésima primera cifra decimal de $n\beta$ es un 7.

2) Sea la curva elíptica $E : y^2 = x^3 + 8$ y sean $P, Q \in E$ dados por $P = (1, -3)$ y $Q = (2, -4)$. Calcular $1999P + 1999Q$.

3) Sabiendo que el grupo de clases de $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ y que está generado por $(3, 1+\sqrt{-17})$, hallar el número de soluciones de $x^2 + 17y^2 = 9^{1999}$.

4) Determinar mediante condiciones de congruencia los primos, $p > 3$, tales que $x^2 + 2x + 4 \equiv 0 \pmod{p}$ tiene solución.

5) Responder breve pero razonadamente a los tres apartados siguientes:

a) ¿Es multiplicativa la función que da la suma de los divisores positivos de la forma $6k + 1$ de un número?

b) Hallar una fórmula exacta para $f(n) = \sum_{d|n} d^{-1}|\mu(d)|$ en términos de la factorización de n.

c) Si mi reloj marca las diez, ¿qué hora será dentro de 31^{1999} horas?

OPCIONAL:

Estudiar si la serie $\sum \big(7 + p^3\cos(\pi(p+2)/6)\big)^{-2}$ converge, donde p recorre los primos. (*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios).

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

-El examen consta de cinco problemas de los cuales sólo se deben escoger cuatro**, en otro caso se corregirán los que se hayan escrito primero. Se ruega rodear con un círculo, en esta hoja, los números de los problemas elegidos.**

- Además, al final del examen se propone un ejercicio de mayor dificultad señalado como opcional, este último problema es voluntario **y se sugiere que lo intenten sólo aquellos que, habiendo completado el resto de los problemas, quieran optar a la matrícula de honor.**

EJERCICIOS

1) Sabiendo que el grupo de clases de $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ y que está generado por $(3, 1+\sqrt{-17})$, hallar el número de soluciones de $x^2 + 17y^2 = 9^{1999}$.

2) Sea α el número real definido por la serie infinita $\sum 6^{-n^6}$. Demostrar que: i) $\alpha \notin \mathbb{Q}$. ii) $\beta = \sqrt{1+\sqrt{\alpha+1}} \notin \mathbb{Q}$. iii) Existe un entero positivo, n, tal que la décima cifra decimal de $n\beta$ es un 5.

3) Sea la curva elíptica $E : y^2 = x^3 + 8$ y sean $P, Q \in E$ dados por $P = (2, 4)$ y $Q = (1, -3)$. Calcular $1999P - 1999Q$.

4) Responder breve pero razonadamente a los tres apartados siguientes:

a) ¿Qué hora marcará el reloj 43^{1999} horas después de las nueve?

b) Consideremos los divisores positivos de la forma $6k + 1$ de un número. ¿Es multiplicativa la función que asigna a cada número la suma de dichos divisores?

c) Hallar una fórmula exacta para $f(n) = \sum_{d|n} d^2|\mu(d)|$ en términos de la factorización de n.

5) Dar condiciones de congruencia sobre los primos, $p > 3$, necesarias y suficientes para que $x^2 - 6x + 12 \equiv 0 \pmod{p}$ tenga solución.

OPCIONAL:

Estudiar si la serie $\sum \big(7 + p^3 \cos(\pi(p+2)/6)\big)^{-2}$ converge, donde p recorre los primos. (*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios).

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

-El examen consta de cinco problemas de los cuales sólo se deben escoger cuatro, **en otro caso se corregirán los que se hayan escrito primero. Se ruega rodear con un círculo, en esta hoja, los números de los problemas elegidos.**

- Además, al final del examen se propone un ejercicio de mayor dificultad señalado como opcional, este último problema es voluntario **y se sugiere que lo intenten sólo aquellos que, habiendo completado el resto de los problemas, quieran optar a la matrícula de honor.**

EJERCICIOS

1) Encontrar condiciones de congruencia necesarias y suficientes sobre los primos, $p>3$, para que $x^2+8x+19\equiv 0 \ \ (p)$ tenga solución.

2) Sea la curva elíptica $E: y^2=x^3+8$ y sean $P,Q\in E$ dados por $P=(1,-3)$ y $Q=(2,4)$. Calcular $1999P-1999Q$.

3) Responder breve pero razonadamente a los tres apartados siguientes:

a) ¿Qué hora es 55^{1999} horas después de las once?

b) Hallar una fórmula exacta para $f(n)=\sum_{d|n} d^{-2}|\mu(d)|$ en términos de la factorización de n.

c) Consideremos los divisores positivos de la forma $6k+1$ de un número. ¿Es multiplicativa la función que asigna a cada número la suma de dichos divisores?

4) Sea $\alpha=\sum 2^{-n^2}$. Demostrar que: i) $\alpha\notin\mathbb{Q}$. ii) $\beta=\sqrt{7-\sqrt{\alpha}}\notin\mathbb{Q}$. iii) Existe un entero positivo, n, tal que la vigésima cifra decimal de $n\beta$ es un 3.

5) Sabiendo que el grupo de clases de $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ y que está generado por $(3,1+\sqrt{-17})$, hallar el número de soluciones de $x^2+17y^2=9^{1999}$.

OPCIONAL:

Estudiar si la serie $\sum\big(7+p^3\cos(\pi(p+2)/6)\big)^{-2}$ converge, donde p recorre los primos. (*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios).

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

-El examen consta de cinco problemas de los cuales sólo se deben escoger cuatro**, en otro caso se corregirán los que se hayan escrito primero. Se ruega rodear con un círculo, en esta hoja, los números de los problemas elegidos.**

- Además, al final del examen se propone un ejercicio de mayor dificultad señalado como opcional, este último problema es voluntario **y se sugiere que lo intenten sólo aquellos que, habiendo completado el resto de los problemas, quieran optar a la matrícula de honor.**

EJERCICIOS

1) Calcular la suma $\sum_{d|n} d^{-1}\phi(d)$ para $n = 100^{100}$.

2) Hallar una fórmula para las soluciones racionales de $x^2 + 2xy + 2y^2 = 5$. ¿Cuántas de ellas son enteras?

3) Responder breve pero razonadamente a los tres apartados siguientes:

a) Si $p > 2$ es primo, ¿con qué es congruente $(p^4 - 1)!$ módulo p^4?

b) Si $n \in \mathbb{Z}$, demostrar que $(n+6)(n+7)(n-4)/6 \in \mathbb{Z}$.

c) ¿Qué número representa la fracción continua periódica $[2, 3, 3, 3, \ldots]$?

4) Considérese el punto $P = (1, 2)$ de la curva elíptica $E : y^2 = x^3 + 3$. Hallar razonadamente otro punto racional, $Q = (x_0, y_0)$, en E con $y_0 > 0$ y demostrar que P no tiene orden 4. (Indicación: No es necesario calcular $3P$).

5) Sabiendo que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tiene número de clases dos, hallar el número de soluciones enteras de $x^2 + 5y^2 = 231^2$. (Nota: $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$).

OPCIONAL:

Si $\pi(n) = |\{p \text{ primo} : 1 < p \leq n\}|$, calcular

$$4\pi(1999) + \sum_{k=1}^{1999}\sum_{m=k}^{1999}(1-(-1)^m)\pi\left(\binom{m}{k} - 1\right) - 4\sum_{n=1}^{999}\sum_{k=1}^{n}\pi\left(\binom{2n+1}{k}\right).$$

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos ....

.... D.N.I. (o pasaporte)....................... Plan Nuevo (Sí/No).......

-El examen consta de cinco problemas de los cuales sólo se deben escoger cuatro**, en otro caso se corregirán los que se hayan escrito primero. Se ruega rodear con un círculo, en esta hoja, los números de los problemas elegidos.**

- Además, al final del examen se propone un ejercicio de mayor dificultad señalado como opcional, este último problema es voluntario **y se sugiere que lo intenten sólo aquellos que, habiendo completado el resto de los problemas, quieran optar a la matrícula de honor.**

EJERCICIOS

1) Hallar el número de soluciones enteras de $x^2+5y^2=273^2$. (Nota: Recuérdese que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tiene número de clases dos y nótese que $273=3\cdot 7\cdot 13$).

2) El punto $P=(1,2)$ pertenece a la curva elíptica $E:\ y^2=x^3+3$. Hallar razonadamente otro punto racional, $Q=(x_0,y_0)$, en E con $y_0>0$. y demostrar que P no tiene orden 4. (Indicación: No es necesario calcular $3P$).

3) Hallar una fórmula para las soluciones racionales de $3y^2+2xy+x^2=6$. ¿Cuántas de ellas son enteras?

4) Responder breve pero razonadamente a los tres apartados siguientes:

a) La fracción continua periódica $[1,4,4,4,\dots]$ representa un número irracional cuadrático, ¿cuál es?

b) Si $p>2$ es primo, ¿con qué es congruente $(p^3-1)!$ módulo p^3?

c) Si $n\in\mathbb{Z}$, demostrar que $(n+7)(n+8)(n-3)/6\in\mathbb{Z}$.

5) Calcular la suma $\sum_{d|n} d^{-1}\phi(d)$ para $n=75^{75}$.

OPCIONAL:

Si $\pi(n)=|\{p \text{ primo} : 1<p\le n\}|$, calcular

$$4\pi(1999)+\sum_{k=1}^{1999}\sum_{m=k}^{1999}(1-(-1)^m)\pi\left(\binom{m}{k}-1\right)-4\sum_{n=1}^{999}\sum_{k=1}^{n}\pi\left(\binom{2n+1}{k}\right).$$

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos ....

.... D.N.I. (o pasaporte)....................... Plan Nuevo (Sí/No).......

-El examen consta de cinco problemas de los cuales sólo se deben escoger cuatro**, en otro caso se corregirán los que se hayan escrito primero. Se ruega rodear con un círculo, en esta hoja, los números de los problemas elegidos.**

- Además, al final del examen se propone un ejercicio de mayor dificultad señalado como opcional, este último problema es voluntario **y se sugiere que lo intenten sólo aquellos que, habiendo completado el resto de los problemas, quieran optar a la matrícula de honor.**

EJERCICIOS

1) Sabiendo que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tiene número de clases dos, hallar el número de soluciones enteras de $x^2+5y^2=231^2$. (Nota: $231=3\cdot 7\cdot 11$).

2) Calcular la suma $\displaystyle\sum_{d|n} d^{-1}\phi(d)$ para $n=100^{100}$.

3) Hallar una fórmula para las soluciones racionales de $x^2+2xy+2y^2=5$. ¿Cuántas de ellas son enteras?

4) Responder breve pero razonadamente a los tres apartados siguientes:

a) Si $n\in\mathbb{Z}$, demostrar que $(n+6)(n+7)(n-4)/6\in\mathbb{Z}$.

b) Si $p>2$ es primo, ¿con qué es congruente $(p^4-1)!$ módulo p^4?

c) ¿Qué número representa la fracción continua periódica $[2,3,3,3,\ldots]$?

5) Considérese el punto $P=(1,2)$ de la curva elíptica $E:\ y^2=x^3+3$. Hallar razonadamente otro punto racional, $Q=(x_0,y_0)$, en E con $y_0>0$ y demostrar que P no tiene orden 4. (Indicación: No es necesario calcular $3P$).

OPCIONAL:

Si $\pi(n)=|\{p \text{ primo} : 1<p\le n\}|$, calcular

$$4\pi(1999)+\sum_{k=1}^{1999}\sum_{m=k}^{1999}(1-(-1)^m)\pi\Big(\binom{m}{k}-1\Big)-4\sum_{n=1}^{999}\sum_{k=1}^{n}\pi\Big(\binom{2n+1}{k}\Big).$$

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos ....

.... D.N.I. (o pasaporte)....................... Plan Nuevo (Sí/No).......

-El examen consta de cinco problemas de los cuales sólo se deben escoger cuatro**, en otro caso se corregirán los que se hayan escrito primero. Se ruega rodear con un círculo, en esta hoja, los números de los problemas elegidos.**

- Además, al final del examen se propone un ejercicio de mayor dificultad señalado como opcional, este último problema es voluntario **y se sugiere que lo intenten sólo aquellos que, habiendo completado el resto de los problemas, quieran optar a la matrícula de honor.**

EJERCICIOS

1) Hallar el número de soluciones enteras de $x^2+5y^2=273^2$. (Nota: Recuérdese que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tiene número de clases dos y nótese que $273=3\cdot 7\cdot 13$).

2) Responder breve pero razonadamente a los tres apartados siguientes:

a) Si $p>2$ es primo, ¿con qué es congruente $(p^3-1)!$ módulo p^3?

b) La fracción continua periódica $[1,4,4,4,\ldots]$ representa un número irracional cuadrático, ¿cuál es?

c) Si $n\in\mathbb{Z}$, demostrar que $(n+7)(n+8)(n-3)/6\in\mathbb{Z}$.

3) El punto $P=(1,2)$ pertenece a la curva elíptica $E:\ y^2=x^3+3$. Hallar razonadamente otro punto racional, $Q=(x_0,y_0)$, en E con $y_0>0$. y demostrar que P no tiene orden 4. (Indicación: No es necesario calcular $3P$).

4) Hallar una fórmula para las soluciones racionales de $3y^2+2xy+x^2=6$. ¿Cuántas de ellas son enteras?

5) Calcular la suma $\sum_{d\mid n} d^{-1}\phi(d)$ para $n=75^{75}$.

OPCIONAL:

Si $\pi(n)=|\{p \text{ primo} :\ 1<p\le n\}|$, calcular

$$4\pi(1999)+\sum_{k=1}^{1999}\sum_{m=k}^{1999}(1-(-1)^m)\pi\left(\binom{m}{k}-1\right)-4\sum_{n=1}^{999}\sum_{k=1}^{n}\pi\left(\binom{2n+1}{k}\right).$$

Apellidos y Nombre ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

EJERCICIOS

1) Calcular la suma $\sum_{d|n} \phi(d)|\mu(d)|$ para $n = (7!)^{2000}$. (Recuérdese que por definición $\phi(1) = \mu(1) = 1$).

2) Hallar todas las soluciones $x, y \in \mathbb{Q}$ de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 7y^2 + 6 = 0$ b) $x + y\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 10^{-n^2} = 0$.

3) Responder a los tres apartados siguientes:

a) Si el minutero del reloj está en la tercera división entre el cinco y el seis, ¿dónde estaba hace 11^{2000} minutos? b) Sabiendo que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ hay factorización única, ¿cuántos divisores de la forma $n + m\sqrt{-2}$ tiene 3? c) ¿Qué número representa la fracción continua periódica $[3, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots]$?

4) Sea la curva elíptica $E : y^2 = x^3 - 4$.

a) Dado $P = (2, 2)$, hallar $2P$. b) ¿Tiene E puntos (racionales) de orden dos? c) Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ tres puntos distintos de E, demostrar que $P_1 + P_2 + P_3 = O \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$. (Indicación: No es necesario usar la ecuación, sólo "ver" la geometría).

5) El anillo de enteros $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ tiene grupo de clases $\mathbb{Z}_4$. Sea $\phi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ la función que asigna a cada ideal su clase.

a) Probar que $(3) = \wp \cdot \overline{\wp}$ con $\phi(\wp) \neq \overline{0}$. b) Demostrar que si $\phi(\wp) = \overline{2}$ entonces $x^2 + 14y^2 = 3^2$ tendría 6 soluciones, lo cual es falso. c) Concluir de los apartados anteriores que $\phi(\wp) = \overline{1}$ ó $\phi(\wp) = \overline{-1}$ y hallar el número de soluciones de $x^2 + 14y^2 = 3^{2000}$.

OPCIONAL:

En un congreso de matemáticos dos de sus asistentes dicen que el número anterior a su número de inscripción es un cuadrado perfecto y el posterior es un cubo perfecto. Demostrar que alguno de ellos miente.

(*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios).

Instrucciones: El examen consta de cinco problemas de los que sólo se deben escoger cuatro (por favor rodear su número con un círculo). El último problema es opcional y se sugiere que sólo lo intenten los que quieran aspirar a matrícula de honor.

Apellidos y Nombre ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

EJERCICIOS

1) Responder a los tres apartados siguientes:

a) ¿Qué número representa la fracción continua periódica $[2, 3, 6, 3, 6, 3, 6 \ldots]$? b) Si el minutero del reloj está en la segunda división entre el tres y el cuatro, ¿dónde estará dentro de 71^{2000} minutos? c) Sabiendo que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ hay factorización única, ¿cuántos divisores de la forma $n + m\sqrt{-2}$ tiene -3?

2) Sea la curva elíptica $E : y^2 = x^3 + 12$.

a) Dado $P = (-2, 2)$, hallar $2P$. b) ¿Tiene E puntos (racionales) de orden dos? c) Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ tres puntos distintos de E, demostrar que $P_1 + P_2 + P_3 = O \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$. (Indicación: No es necesario usar la ecuación, sólo "ver" la geometría).

3) Hallar todas las soluciones $x, y \in \mathbb{Q}$ de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 3y^2 + 2 = 0$ b) $x + y\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 7^{-n^2} = 0$.

4) El anillo de enteros $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ tiene grupo de clases $\mathbb{Z}_4$. Sea $\phi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ la función que asigna a cada ideal su clase.

a) Probar que $(11) = \wp \cdot \overline{\wp}$ con $\phi(\wp) \neq \overline{0}$. b) Demostrar que si $\phi(\wp) = \overline{2}$ entonces $x^2+17y^2 = 11^2$ tendría 6 soluciones, lo cual es falso. c) Concluir de los apartados anteriores que $\phi(\wp) = \overline{1}$ ó $\phi(\wp) = \overline{-1}$ y hallar el número de soluciones de $x^2 + 17y^2 = 11^{2000}$.

5) Calcular la suma $\sum_{d|n} \phi(d)|\mu(d)|$ para $n = (8!)^{2000}$. (Recuérdese que por definición $\phi(1) = \mu(1) = 1$).

OPCIONAL:

En un congreso de matemáticos dos de sus asistentes dicen que el número anterior a su número de inscripción es un cuadrado perfecto y el posterior es un cubo perfecto. Demostrar que alguno de ellos miente.

(*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios).

Instrucciones: El examen consta de cinco problemas de los que sólo se deben escoger cuatro (por favor rodear su número con un círculo). El último problema es opcional y se sugiere que sólo lo intenten los que quieran aspirar a matrícula de honor.

Apellidos y Nombre ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

EJERCICIOS

1) Responder a los tres apartados siguientes:

a) ¿Qué número representa la fracción continua periódica $[5, 2, 4, 2, 4, 2, 4\ldots]$? b) Sabiendo que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ hay factorización única, ¿cuántos divisores de la forma $n+m\sqrt{-2}$ tiene 3? c) Si el minutero del reloj está en la cuarta división entre el siete y el ocho, ¿dónde estará dentro de 11^{2000} minutos?

2) Calcular la suma $\sum_{d|n} \phi(d)(\mu(d))^2$ para $n = (9!)^{2000}$. (Recuérdese que por definición $\phi(1) = \mu(1) = 1$).

3) Hallar todas las soluciones $x, y \in \mathbb{Q}$ de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 2y^2 + 1 = 0$ b) $x + y\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{-n^2} = 0$.

4) Sea la curva elíptica $E : y^2 = x^3 - 7$.

a) Dado $P = (2, 1)$, hallar $2P$. b) ¿Tiene E puntos (racionales) de orden dos? c) Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ tres puntos distintos de E, demostrar que $P_1 + P_2 + P_3 = O \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$. (Indicación: No es necesario usar la ecuación, sólo "ver" la geometría).

5) El anillo de enteros $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ tiene grupo de clases $\mathbb{Z}_4$. Sea $\phi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ la función que asigna a cada ideal su clase.

a) Probar que $(3) = \wp \cdot \overline{\wp}$ con $\phi(\wp) \neq \overline{0}$. b) Demostrar que si $\phi(\wp) = \overline{2}$ entonces $x^2 + 14y^2 = 3^2$ tendría 6 soluciones, lo cual es falso. c) Concluir de los apartados anteriores que $\phi(\wp) = \overline{1}$ ó $\phi(\wp) = \overline{-1}$ y hallar el número de soluciones de $x^2 + 14y^2 = 3^{2000}$.

OPCIONAL:

En un congreso de matemáticos dos de sus asistentes dicen que el número anterior a su número de inscripción es un cuadrado perfecto y el posterior es un cubo perfecto. Demostrar que alguno de ellos miente.

(*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios).

Instrucciones: El examen consta de cinco problemas de los que sólo se deben escoger cuatro (por favor rodear su número con un círculo). El último problema es opcional y se sugiere que sólo lo intenten los que quieran aspirar a matrícula de honor.

Apellidos y Nombre ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

EJERCICIOS

1) El anillo de enteros $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ tiene grupo de clases $\mathbb{Z}_4$. Sea $\phi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ la función que asigna a cada ideal su clase.

a) Probar que $(11) = \wp \cdot \overline{\wp}$ con $\phi(\wp) \neq \overline{0}$. b) Demostrar que si $\phi(\wp) = \overline{2}$ entonces $x^2+17y^2 = 11^2$ tendría 6 soluciones, lo cual es falso. c) Concluir de los apartados anteriores que $\phi(\wp) = \overline{1}$ ó $\phi(\wp) = \overline{-1}$ y hallar el número de soluciones de $x^2 + 17y^2 = 11^{2000}$.

2) Hallar todas las soluciones $x, y \in \mathbb{Q}$ de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 5y^2 + 4 = 0$ b) $x + y\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^{-n^2} = 0$.

3) Responder a los tres apartados siguientes:

a) ¿Qué número representa la fracción continua periódica $[1, 4, 8, 4, 8, 4, 8 \ldots]$? b) Si el minutero del reloj está en la cuarta división entre el nueve y el diez, ¿dónde estará dentro de 71^{2000} minutos? c) Sabiendo que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ hay factorización única, ¿cuántos divisores de la forma $n + m\sqrt{-2}$ tiene -3?

4) Sea la curva elíptica $E : y^2 = x^3 - 60$.

a) Si $P = (4, 2)$, hallar $2P$. b) ¿Tiene E puntos (racionales) de orden dos? c) Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ tres puntos distintos de E, demostrar que

$P_1 + P_2 + P_3 = O \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$. (<u>Indicación</u>: No es necesario usar la ecuación, sólo "ver" la geometría).

5) Calcular la suma $\sum_{d|n} \phi(d)\big(\mu(d)\big)^2$ para $n = (10!)^{2000}$. (Recuérdese que por definición $\phi(1) = \mu(1) = 1$).

OPCIONAL:

En un congreso de matemáticos dos de sus asistentes dicen que el número anterior a su número de inscripción es un cuadrado perfecto y el posterior es un cubo perfecto. Demostrar que alguno de ellos miente.

(*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios).

<u>Instrucciones</u>: El examen consta de cinco problemas de los que sólo se deben escoger cuatro (por favor rodear su número con un círculo). El último problema es opcional y se sugiere que sólo lo intenten los que quieran aspirar a matrícula de honor.

Apellidos y Nombre ....

.... D.N.I. (o pasaporte)....................... Plan Nuevo (Sí/No).......

EJERCICIOS

1) Responder a los tres apartados siguientes:

a) ¿Cuál es la última cifra del número $1^7 + 2^7 + \ldots + 1999^7 + 2000^7$? b) Estudiar si la curva elíptica $y^2 = x^3 - 2x + 1$ tiene un único punto racional de orden 2. c) Demostrar que un número es divisible por 11 si y sólo si la suma de las cifras en lugar par menos la suma de las cifras en lugar impar es divisible por 11.

2) Calcular la suma

$$\sum_{d|n} \sigma(d)(\mu(d))^3$$

para $n = 210^{2000} \cdot 2000^{210}$ donde σ es la función suma de divisores positivos y μ es la función de Möbius.

3) Hallar todas las soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$ de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 = 1 + 2y^2$, b) $x^2 - y^2 = 2000$, c) $x^4 - 4y^4 = 1$.

4) Dar condiciones de congruencia necesarias y suficientes sobre los primos $p > 3$ para que $x^2 + 5x + 7$ se pueda factorizar en $\mathbb{Z}_p$.

5) El anillo de enteros $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ tiene grupo de clases $\mathbb{Z}_4$. Sea $\phi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ la función que asigna a cada ideal su clase y $p > 7$ un número primo.

a) Demostrar que si $(p) = \wp \cdot \overline{\wp}$ entonces $x^2 + 14y^2 = p^2$ tiene 2 soluciones enteras si y sólo si $\phi(\wp) = \overline{1}$ ó $\phi(\wp) = \overline{-1}$, y tiene 6 en otro caso.

b) Sabiendo que $x^2 + 14y^2 = 3481$ tiene como soluciones únicas enteras $(59, 0)$ y $(-59, 0)$, hallar el número de soluciones enteras de $x^2 + 14y^2 = 3481^{1000}$.

OPCIONAL:

Hallar cuántos cubos perfectos superan en tres unidades a una suma parcial de la serie $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \ldots$.

(*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios y después pensar en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$).

Instrucciones: El examen consta de cinco problemas de los que sólo se deben escoger cuatro (por favor rodear su número con un círculo). El último problema es opcional y se sugiere que sólo lo intenten los que quieran aspirar a matrícula de honor.

Apellidos y Nombre ....

.... D.N.I. (o pasaporte)....................... Plan Nuevo (Sí/No).......

EJERCICIOS

1) Dar condiciones de congruencia necesarias y suficientes sobre los primos $p > 3$ para que $x^2 + 5x + 7$ se pueda factorizar en $\mathbb{Z}_p$.

2) El anillo de enteros $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ tiene grupo de clases $\mathbb{Z}_4$. Sea $\phi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ la función que asigna a cada ideal su clase y $p > 7$ un número primo.

a) Demostrar que si $(p) = \wp \cdot \overline{\wp}$ entonces $x^2 + 14y^2 = p^2$ tiene 2 soluciones enteras si y sólo si $\phi(\wp) = \overline{1}$ ó $\phi(\wp) = \overline{-1}$, y tiene 6 en otro caso.

b) Sabiendo que $x^2 + 14y^2 = 3481$ tiene como soluciones únicas enteras $(59, 0)$ y $(-59, 0)$, hallar el número de soluciones enteras de $x^2 + 14y^2 = 3481^{1000}$.

3) Calcular la suma

$$\sum_{d|n} \sigma(d)(\mu(d))^3$$

para $n = 210^{2000} \cdot 2000^{210}$ donde σ es la función suma de divisores positivos y μ es la función de Möbius.

4) Hallar todas las soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$ de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 = 1 + 2y^2$, b) $x^2 - y^2 = 2000$, c) $x^4 - 4y^4 = 1$.

5) Responder a los tres apartados siguientes:

a) ¿Cuál es la última cifra del número $1^7 + 2^7 + \ldots + 1999^7 + 2000^7$? b) Estudiar si la curva elíptica $y^2 = x^3 - 2x + 1$ tiene un único punto racional de orden 2. c) Demostrar que un número es divisible por 11 si y sólo si la suma de las cifras en lugar par menos la suma de las cifras en lugar impar es divisible por 11.

OPCIONAL:

Hallar cuántos cubos perfectos superan en tres unidades a una suma parcial de la serie $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \ldots$.

(*Sugerencia*: Hacer primero el resto de los ejercicios y después pensar en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$).

Instrucciones: El examen consta de cinco problemas de los que sólo se deben escoger cuatro (por favor rodear su número con un círculo). El último problema es opcional y se sugiere que sólo lo intenten los que quieran aspirar a matrícula de honor.

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos ....

.... D.N.I. (o pasaporte)........................ Plan Nuevo (Sí/No).......

-El examen consta de cinco problemas de los cuales sólo se deben escoger cuatro**, en otro caso se corregirán los que se hayan escrito primero. Se ruega rodear con un círculo, en esta hoja, los números de los problemas elegidos.**

- Además, al final del examen se propone un ejercicio de mayor dificultad señalado como opcional, este último problema es voluntario **y se sugiere que lo intenten sólo aquellos que, habiendo completado el resto de los problemas, quieran optar a la matrícula de honor.**

EJERCICIOS

1) Sabiendo que el número de clases de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ es dos, hallar el número de soluciones de $x^2 + 17y^2 = 1089^{1999}$.

2) Hallar una fórmula que dé todas soluciones racionales de $x^2 + xy + 3y^2 - 5 = 0$. ¿Cuántas de ellas son enteras?

3) Contestar breve pero razonadamente a las tres preguntas siguientes:

a) ¿Qué número representa la fracción continua $[2, 4, 4, 4, 4, \ldots]$?

b) Si p es un primo impar, ¿con qué es congruente $(p^2 - 1)!$ módulo p^2?

c) Sea p es un primo impar, si p tiene 4 representaciones como suma de dos cuadrados, ¿cuántas puede tener $p + 2$?

4) Sabiendo que 103 es primo, hallar cuántas soluciones tiene $x^5 - x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 21x - 21 \equiv 0 \ (103^2)$.

5) Dadas la curvas elípticas $E_a : y^2 = x^3 + a$ con $a \in \mathbb{Z}^+$, hallar todos los valores de a para los que E_a tiene algún punto de orden dos. De entre estos valores, encontrar alguno mayor que dos de manera que el grupo de Mordell-Weil no sea $\mathbb{Z}_2$.

OPCIONAL:

Estudiar si la serie $\sum \big(p^2 \cos(\pi(p+1)/4) + 13\big)^{-2}$ converge, donde p recorre los primos.