Solución del parcial del 21/03/2002

1) En electrodinámica se suelen escribir el campo eléctrico y el magnético en la forma
$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A},$$
donde ϕ y $\vec{A}$ son funciones, una escalar y otra vectorial, que cumplen $\operatorname{div}\vec{A} + c^{-2}\partial\phi/\partial t = 0$. Demostrar que si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes entonces se cumple $\partial^2\phi/\partial t^2 = c^2\Delta\phi$ y $\partial^2\vec{A}/\partial t^2 = c^2\Delta\vec{A}$.

Nota: A pie de página se daban las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes y la relación $\Delta\vec{F} = \nabla(\operatorname{div}\vec{F}) - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F}$.

Solución: Al derivar con respecto de t en $\partial\phi/\partial t = -c^2\operatorname{div}\vec{A}$ y sustituir $\partial\vec{A}/\partial t = -\nabla\phi - \vec{E}$, se tiene
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -c^2\operatorname{div}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = c^2\operatorname{div}\nabla\phi + c^2\operatorname{div}\vec{E} = \Delta\phi + c^2\operatorname{div}\vec{E},$$
y el último sumando es nulo por la primera ecuación de Maxwell.

Por otra parte, al derivar $\partial\vec{A}/\partial t = -\nabla\phi - \vec{E}$ con respecto de t y sustituir $\partial\phi/\partial t = -c^2\operatorname{div}\vec{A}$, se sigue
$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = c^2\nabla\operatorname{div}\vec{A} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$
Y de la cuarta ecuación de Maxwell y la fórmula para $\Delta\vec{F}$, se tiene
$$c^2\nabla\operatorname{div}\vec{A} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = c^2\nabla\operatorname{div}\vec{A} - c^2\operatorname{rot}\vec{B} = c^2\Delta\vec{A}.$$

2) Responder a las siguientes cuestiones breves:

a) ¿Se cumple la desigualdad triangular $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ en el espacio de Minkowski? b) ¿Es un tensor la aplicación que asigna a cada par de vectores en $\mathbb{R}^n$ la suma de sus primeras coordenadas (en la base canónica)? c) La estrella Sirio está a 9 años luz de la Tierra, ¿es posible que para algún observador un viajero espacial tarde sólo 8 años en llegar?

Solución: a) No. Por ejemplo, si $\vec{a} = (1,1,0,0)$ y $\vec{b} = (1,0,1,0)$, se tiene $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 0$ y sin embargo $\|\vec{a}+\vec{b}\| > 0$.

b) No, porque no es multilineal. Por ejemplo, si $\vec{e}_1$ es el primer vector de la base canónica, $T(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = 2$ y $T(2\vec{e}_1,\vec{e}_1) = 3 \ne 2T(\vec{e}_1,\vec{e}_1)$.

c) Sí. Para el propio viajero espacial, si va a velocidad constante $v = c\sqrt{17}/9$ el tiempo transcurrido será $9\sqrt{1 - v^2/c^2} = 8$. (Nótese que esto no contradice que la velocidad de la luz sea máxima porque dicho viajero mide una distancia a la estrella menor que 9 años luz).

3) Sea el tensor $\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que en la base canónica tiene componentes $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \ne j$.

a) Probar que una matriz $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ aplica bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ en bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $a^k_i a^l_j \delta_{kl} = \delta_{ij}$.

b) Probar que un tensor $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $T_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (en la base canónica), tiene las mismas componentes en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $T = \lambda\, \delta$ donde λ es una constante.

Solución: a) Nótese que δ no es más que el producto escalar usual, $\delta(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v}\cdot\vec{w}$. De modo que $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base ortonormal si y sólo si $\delta(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$. Al aplicar A a $\mathcal{B}$ se obtienen los vectores $\{a^r_1\vec{e}_r, \ldots, a^r_n\vec{e}_r\}$. Según lo dicho, éstos formarán una base ortonormal si y sólo si $\delta(a^k_i\vec{e}_k, a^l_j\vec{e}_l) = \delta_{ij}$. Lo cual, empleando que $\delta(\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \delta_{kl}$, equivale a la fórmula del enunciado.

b) Sean $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ bases iguales salvo que los dos primeros vectores aparecen intercambiados. Entonces la componente T_{11} empleando $\mathcal{B}$ es $T(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$ y la componente correspondiente T'_{11} empleando $\mathcal{B}'$ es $T(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$. Para que sean iguales, $T_{11} = T_{22}$. Considerando otras bases en las que $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_3$, $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_4$, $\ldots$, $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_n$, aparezcan intercambiados, se tiene $T_{11} = T_{22} = \ldots = T_{nn}$ y por tanto $T_{ij} = \lambda\delta_{ij}$; es decir, $T = \lambda\,\delta$. En el otro sentido, según el apartado a), las componentes de δ permanecen invariantes al cambiar a una base ortonormal; y por tanto lo mismo ocurrirá con $T = \lambda\,\delta$.

---

4) Sea la subvariedad $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 1 + x^2 + y^2\}$ y considérese la métrica G inducida por la usual de $\mathbb{R}^3$, empleando la carta en polares $\phi : (x, y, z) \mapsto (r, \theta)$ con $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Calcular $G(\partial/\partial r + 2\partial/\partial\theta, \partial/\partial\theta)$.

Solución: La métrica inducida corresponde a sustituir en la métrica usual de $\mathbb{R}^3$, $dX^2 + dY^2 + dZ^2$, la parametrización que corresponde a la carta del enunciado: $X = r\cos\theta$, $Y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $Z = 1 + r^2$. De modo que

$$G = (\cos\theta\; dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta\; d\theta)^2 + (\mathrm{sen}\,\theta\; dr + r\cos\theta\; d\theta)^2 + (2r\; dr)^2 = (1 + 4r^2)dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

En notación moderna, $G = (1 + 4r^2)\; dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$. Por definición

$$G(\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}) = G(\partial_1 + 2\partial_2, \partial_2) = g_{12} + 2g_{22} = 0 + 2r^2 = 2r^2.$$

<u>Nota</u>: Para otra forma de hacerlo véanse los comentarios finales en el siguiente examen.

Solución del parcial del 22/03/2002

---

1) Sean $\vec{E}$ y $\vec{B}$ soluciones de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes, de la forma $\vec{E} = (f(x, t), g(x, t), 0)$, $\quad \vec{B} = (0, 0, h(x, t))$.

a) Demostrar que f es constante. b) Demostrar con detalle que $\partial^2 g/\partial t^2 = c^2\partial^2 g/\partial x^2$ y $\partial^2 h/\partial t^2 = c^2\partial^2 h/\partial x^2$. c) Hallar un ejemplo de campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (no constantes) con las propiedades descritas en el enunciado.

<u>Nota</u>: Se daban a pie de página las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes.

Solución: a) Con las expresiones del enunciado para $\vec{E}$ y $\vec{B}$, se tiene $\operatorname{div}\vec{E} = \partial f/\partial x$ y

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f & g & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{k}, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = -\frac{\partial h}{\partial x}\mathbf{j}.$$

La primera y la cuarta ecuaciones de Maxwell se traducen en

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad y \qquad \big(0, -c^2\frac{\partial h}{\partial x}, 0\big) = \big(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t}, 0\big).$$

De aquí, $\partial f/\partial x = \partial f/\partial t = 0$. Es decir, f no depende de x ni de t y es constante.

b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, la tercera y la cuarta ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como

$$\big(0, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\big) = \big(0, 0, -\frac{\partial h}{\partial t}\big), \qquad \big(0, -c^2\frac{\partial h}{\partial x}, 0\big) = \big(0, \frac{\partial g}{\partial t}, 0\big).$$

Derivando alternativamente la ecuación $\partial g/\partial x = -\partial h/\partial t$ con respecto de x y de t, y sustituyendo $-c^2\partial h/\partial x = \partial g/\partial t$, se obtienen las ecuaciones de ondas buscadas.

c) Tómese $f \equiv 0$. El apartado b) implica que g debe ser una "onda" de velocidad c, un ejemplo es $g(x,t) = \operatorname{sen}(x - ct)$. La primera y segunda ecuaciones de Maxwell se cumplen trivialmente, mientras que la tercera y la cuarta, según b), equivalen a $\partial g/\partial x = -\partial h/\partial t$, $-c^2\partial h/\partial x = \partial g/\partial t$; lo que con la elección de g permite escoger $h(x,t) = c^{-1}\operatorname{sen}(x - ct)$. En definitiva, un posible ejemplo es

$$\vec{E} = (0, \operatorname{sen}(x - ct), 0), \qquad \vec{B} = (0, 0, c^{-1}\operatorname{sen}(x - ct)).$$

---

2) Si un observador se mueve con respecto a nosotros por el eje X a velocidad v y lanza un objeto hacia arriba (eje Z') con velocidad inicial w, probar que la velocidad inicial medida por nosotros será, en unidades relativistas, $\sqrt{v^2 + w^2 - v^2w^2}$. *Indicación*: Aplicar la regla de la cadena a $\big((dx/dt)^2 + (dz/dt)^2\big)(dt/dt')^2$.

Solución: Sean x, z, t y x', z', t' son las posiciones y tiempos del objeto medidas por cada uno de los observadores. Las velocidades (en módulo) medidas por ellos son

$$V = \sqrt{\big(\frac{dx}{dt}\big)^2 + \big(\frac{dz}{dt}\big)^2} \qquad \text{y} \qquad w = \sqrt{\big(\frac{dx'}{dt'}\big)^2 + \big(\frac{dz'}{dt'}\big)^2} = \frac{dz'}{dt'}.$$

(Nótese que si el segundo observador lanza el objeto hacia arriba se tiene $dx'/dt' = 0$). Por la regla de la cadena

$$V^2\big(\frac{dt}{dt'}\big)^2 = \big(\frac{dx}{dt'}\big)^2 + \big(\frac{dz}{dt'}\big)^2.$$

La transformación de Lorentz implica $t = \gamma(t' + vx')$, $x = \gamma(x' + vt')$, $z = z'$. Por tanto, empleando $dx'/dt' = 0$ y $dz'/dt' = w$,

$$V^2\gamma^2 = \gamma^2 v^2 + w^2,$$

que sustituyendo $\gamma^2 = 1/(1-v^2)$, implica la fórmula del enunciado.

---

3) Se dice que un tensor $(0,2)$ es antisimétrico si la matriz formada por sus componentes en cierta base es antisimétrica.

a) Demostrar que si un tensor $(0,2)$ es antisimétrico empleando una base, lo es usando cualquier otra. b) Dar un ejemplo de tensor antisimétrico $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ para $n = 2$ y otro para $n = 3$. c) La igualdad

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 10 \\ -53 & -23 \end{pmatrix}$$

prueba que al cambiar de base una matriz antisimétrica no se obtiene en general otra matriz antisimétrica. Explicar por qué esto no contradice a).

Solución: a) Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ dos bases. Si T es antisimétrico usando $\mathcal{B}$ entonces $T(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s) = -T(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_r)$ para todo $1 \le r, s \le n$. Cada $\mathbf{e}'_i$ se escribe como una combinación lineal, $a_i^r \mathbf{e}_r$, de elementos de $\mathcal{B}$. Por consiguiente

$$T(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = T(a_i^r \mathbf{e}_r, a_j^s \mathbf{e}_s) = a_i^r a_j^s T(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s) = -a_i^r a_j^s T(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_r) = -T(a_j^s \mathbf{e}_s, a_i^r \mathbf{e}_r) = -T(\mathbf{e}'_j, \mathbf{e}'_i).$$

Y por tanto T es antisimétrico usando $\mathcal{B}'$

b) El tensor determinante en $\mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(\vec{v}, \vec{w}) = \det\,[\vec{v}, \vec{w}]$; y el tensor que da la primera coordenada del producto vectorial; $S : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $S(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{e}_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$; cumplen $T(\vec{v}, \vec{w}) = -T(\vec{w}, \vec{v})$, $S(\vec{v}, \vec{w}) = -S(\vec{w}, \vec{v})$. En particular son antisimétricos.

c) El cambio de base de la matriz que se muestra en la igualdad es el adecuado si se la trata como matriz de una aplicación lineal. Lo que corresponde a considerarla como matriz de componentes de un tensor $(1,1)$, no de uno $(0,2)$.

---

4) Sea la subvariedad $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - y + x^2\}$ y considérese la métrica G inducida por la usual de $\mathbb{R}^3$, empleando la carta $\phi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$. Calcular $G(\partial_1 + \partial_2, \partial_2)$.

Solución: La métrica inducida corresponde a sustituir en la métrica usual de $\mathbb{R}^3$, $dX^2 + dY^2 + dZ^2$, la parametrización que corresponde a la carta del enunciado: $X = x$, $Y = y$, $Z = 1 - y + x^2$. De modo que

$$G = dx^2 + dy^2 + (-dy + 2x\ dx)^2 = (1 + 4x^2)dx^2 + 2dy^2 - 4x\ dx\ dy$$

En notación moderna, $G = (1 + 4x^2)\ dx \otimes dx + 2dy \otimes dy - 2x\ dx \otimes dy - 2x\ dy \otimes dx$. Por definición $G(\partial_1 + \partial_2, \partial_2) = g_{12} + g_{22} = -2x + 2$.

Otra forma de resolver el problema es emplear que ∂_1 y ∂_2, como vectores de $\mathbb{R}^3$ vienen dados en cada punto de $\phi^{-1}(x, y)$ por $\vec{v} = (1, 0, 2x)$ y $\vec{w} = (0, 1, -1)$. La métrica inducida es la heredada del producto escalar usual, de modo que $g_{12} + g_{22} = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} = -2x + 2$.