Modelo A   Seminario   Marzo 2001   **Inicial del 1^{er} apellido:**

Nombre y apellidos: ....

....**DNI (o pasaporte):**............................

1. Sean $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ y $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ soluciones de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Supongamos que $E_3 = 0$ y que E_1 y E_2 no dependen de la variable z.

a) Demostrar que si en algún instante, $t = t_0$, B_1 y B_2 se anulan, entonces se anulan para todo tiempo.

b) En la situación del apartado anterior, esto es, $\vec{B} = (0, 0, B_3)$, demostrar con detalle que B_3 satisface la ecuación de ondas $\partial^2 B_3 / \partial t^2 = c^2 \Delta B_3$ con $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$.

2. Responder brevemente a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué velocidad debe alejarse de nosotros un cohete de 50 metros para que nos parezca que mide 40? Si un astronauta mira nuestro reloj desde el cohete, ¿le parecerá que atrasa o que adelanta?

b) Dada la fórmula $p' = (p - vE)/\sqrt{1 - v^2}$ donde p y p' indican momentos lineales (masa·velocidad) y E energía (Fuerza·espacio), ¿cómo se escribe en unidades no relativistas?

c) Al aplicar la fórmula de adición de velocidades, $V = (v + w)/(1 + vw)$ a $v, w \in [0, 1)$, siempre se obtiene que $V \in [\max(v, w), 1)$. ¿Qué significado físico tiene esto? ¿Cómo se demuestra?

3. Considérese la métrica

$$ds^2 = x^{-2}(dx^2 - dy^2)$$

definida en el semiplano derecho. Calcular los símbolos de Christoffel correspondientes y las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas.

4. Hallar la componente T_{1111} del tensor cuatro veces covariante $T = G \otimes G$ donde G es la métrica inducida por la usual en el plano

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 5\}$$

y se emplea la carta

$$\begin{aligned} \phi \ : \ M &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

Modelo B	Seminario	Marzo 2001	**Inicial del 1$^{\text{er}}$ apellido:**

Nombre y apellidos: ....

....**DNI (o pasaporte):**............................

1. Considérese la métrica

$$ds^2 = -y^{-2}(dx^2 - dy^2)$$

definida en el semiplano superior. Calcular los símbolos de Christoffel correspondientes y las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas.

2. Hallar la componente T_{2222} del tensor cuatro veces covariante $T = G \otimes G$ donde G es la métrica inducida por la usual en el plano

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + y + z = 1\}$$

y se emplea la carta proyección $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y, z) = (x, y)$.

3. Sean $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ y $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ soluciones de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes:

$$\text{div } \vec{E} = 0, \qquad \text{div } \vec{B} = 0, \qquad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Supongamos que $E_3 = 0$ y que E_1 y E_2 no dependen de la variable z.

a) Demostrar que si en algún instante, $t = t_0$, B_1 y B_2 se anulan, entonces se anulan para todo tiempo.

b) En la situación del apartado anterior, esto es, $\vec{B} = (0, 0, B_3)$, demostrar con detalle que B_3 satisface la ecuación de ondas $\partial^2 B_3/\partial t^2 = c^2 \Delta B_3$ con $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$.

4. Responder brevemente a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué velocidad debe alejarse de nosotros un cohete de 50 metros para que nos parezca que mide 40? Si un astronauta mira nuestro reloj desde el cohete, ¿le parecerá que atrasa o que adelanta?

b) Al aplicar la fórmula de adición de velocidades, $V = (v + w)/(1 + vw)$ a $v, w \in [0, 1)$, siempre se obtiene que $V \in [\max(v, w), 1)$. ¿Qué significado físico tiene esto? ¿Cómo se demuestra?

c) Dada la fórmula

$$p' = \frac{p - vE}{\sqrt{1 - v^2}}$$

donde p y p' indican momentos lineales (masa·velocidad) y E energía (Fuerza·espacio), ¿cómo se escribe en unidades no relativistas?

$\boxed{\text{MODELO C}}$ SEMINARIO Marzo 2001 **Inicial del 1$^{\underline{\text{er}}}$ apellido:** $\boxed{}$

Nombre y apellidos:...

....**DNI (o pasaporte):**............................

1. Responder brevemente a las siguientes preguntas:

a) Al aplicar la fórmula de adición de velocidades, $V = (v+w)/(1+vw)$ a $v, w \in [0, 1)$, siempre se obtiene que $V \in [\max(v, w), 1)$. ¿Qué significado físico tiene esto? ¿Cómo se demuestra?

b) ¿A qué velocidad debe alejarse de nosotros un cohete de 50 m para que nos parezca que mide 40? Si un astronauta mira nuestro reloj desde el cohete, ¿le parecerá que atrasa o que adelanta?

c) Dada la fórmula $p' = (p - vE)/\sqrt{1-v^2}$ donde p y p' indican momentos lineales (masa·velocidad) y E energía (Fuerza·espacio), ¿cómo se escribe en unidades no relativistas?

2. Considérese la métrica

$$ds^2 = x^{-2}(dx^2 - dy^2)$$

definida en el semiplano derecho. Calcular los símbolos de Christoffel correspondientes y las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas.

3. Sean $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ y $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ soluciones de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes:

$$\text{div } \vec{E} = 0, \qquad \text{div } \vec{B} = 0, \qquad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Supongamos que $E_3 = 0$ y que E_1 y E_2 no dependen de la variable z.

a) Demostrar que si en algún instante, $t = t_0$, B_1 y B_2 se anulan, entonces se anulan para todo tiempo.

b) En la situación del apartado anterior, esto es, $\vec{B} = (0, 0, B_3)$, demostrar con detalle que B_3 satisface la ecuación de ondas $\partial^2 B_3/\partial t^2 = c^2 \Delta B_3$ con $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$.

4. Hallar la componente T_{2222} del tensor cuatro veces covariante $T = G \otimes G$ donde G es la métrica inducida por la usual en el plano

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + y + z = 6\}$$

y se emplea la carta

$$\begin{aligned} \phi \ : \ M &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

Modelo D Seminario Marzo 2001 **Inicial del 1er apellido:**

Nombre y apellidos: ....

.... **DNI (o pasaporte):** ....

1. Hallar la componente T_{1111} del tensor cuatro veces covariante $T = G \otimes G$ donde G es la métrica inducida por la usual en el plano

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 5\}$$

y se emplea la carta proyección $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y, z) = (x, y)$.

2. Considérese la métrica

$$ds^2 = -y^{-2}(dx^2 - dy^2)$$

definida en el semiplano superior. Calcular los símbolos de Christoffel correspondientes y las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas.

3. Responder brevemente a las siguientes preguntas:

a) Dada la fórmula $p' = (p - vE)/\sqrt{1 - v^2}$ donde p y p' indican momentos lineales (masa·velocidad) y E energía (Fuerza·espacio), ¿cómo se escribe en unidades no relativistas?

b) Al aplicar la fórmula de adición de velocidades,

$$V = (v + w)/(1 + vw)$$

a $v, w \in [0, 1)$, siempre se obtiene que $V \in [\max(v, w), 1)$. ¿Qué significado físico tiene esto? ¿Cómo se demuestra?

c) ¿A qué velocidad debe alejarse de nosotros un cohete de 50 metros para que nos parezca que mide 40? Si un astronauta mira nuestro reloj desde el cohete, ¿le parecerá que atrasa o que adelanta?

4. Sean $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ y $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ soluciones de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes:

$$\text{div } \vec{E} = 0, \qquad \text{div } \vec{B} = 0, \qquad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Supongamos que $E_3 = 0$ y que E_1 y E_2 no dependen de la variable z.

a) Demostrar que si en algún instante, $t = t_0$, B_1 y B_2 se anulan, entonces se anulan para todo tiempo.

b) En la situación del apartado anterior, esto es, $\vec{B} = (0, 0, B_3)$, demostrar con detalle que B_3 satisface la ecuación de ondas $\partial^2 B_3/\partial t^2 = c^2 \Delta B_3$ con $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$.

Modelo E   Seminario   Marzo 2001   **Inicial del 1^er^ apellido:** ☐

Nombre y apellidos: ....

.... **DNI (o pasaporte):** ....

1. Diremos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ representan una *onda electromagnética plana* si se cumplen las siguientes propiedades:

• Son soluciones de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes:

$$\text{div}\, \vec{E} = 0, \qquad \text{div}\, \vec{B} = 0, \qquad \text{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \text{rot}\, \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

• El vector $\vec{E}$ está siempre contenido en el plano YZ y no depende de x.

• En el tiempo inicial $t = 0$, se tiene que $B_2 = B_3 = 0$.

a) Demostrar que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son ortogonales en todo tiempo y todo punto.

b) Encontrar un ejemplo no trivial ($\vec{E}, \vec{B} \neq$ cte.) de onda electromagnética plana con $\vec{E}$ y $\vec{B}$ no dependiendo de z.

2. Si una masa en reposo m se descompone en dos masas m_1 y m_2, demostrar que las energías de m_1 y de m_2 son respectivamente (en unidades relativistas)

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} \qquad \text{y} \qquad E_2 = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m}$$

3. Dada la métrica

$$ds^2 = u\, du^2 + \cos^2 u\, dv^2$$

definida en cierta variedad. Hallar los símbolos de Christoffel correspondientes y las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas.

4. Sea G la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}^3$ en

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 - y^2 z = z\}$$

y sea $T = G \otimes G$. Hallar los g_{ij} en alguna carta y calcular el valor de $g^{ij} g^{kl} T_{ijkl}$.