Elegir sólo <u>cuatro</u> problemas. Cada uno vale $2'5$ puntos.

---

1) Responder razonadamente a las siguientes preguntas breves:

a) ¿Se cumple en el espacio de Minkowski la desigualdad triangular para vectores espaciales?

b) ¿Cómo se puede escribir la ecuación de Maxwell $\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} = -\int_{\partial S} \vec{E}$ (para toda superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con frontera) en forma diferencial, sin incluir integrales?

c) Sea $v \oplus w = (v+w)/(1+vw)$ la fórmula de adición de velocidades. Si $0 < v_1 < v_2 < 1$, $0 < w_1 < w_2 < 1$, ¿se cumple $v_1 \oplus w_1 < v_2 \oplus w_2$? ¿qué significa físicamente?

---

2) Rectilandia es una recta real $\mathbb{R}$ en la que el espacio-tiempo tiene la métrica

$$-\big(4 - e^{-(x^2-1)^2}\big)dt^2 + dx^2.$$

a) Sea $t = t(\tau)$, $x = x(\tau)$, la línea de universo parametrizada por el tiempo propio de una partícula material que parte del reposo desde p. Esto es, con $x(0) = p$ y $x'(0) = 0$. Calcular el signo de la “aceleración” $x''(0)$ dependiendo de si p pertenece a $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ o $(1, +\infty)$.

b) Justificar por qué los rectilandeses piensan que en su universo hay un sol en $p = -1$ y otro idéntico en $p = 1$. Estudiar qué ocurre cuando se deja un objeto con velocidad inicial nula en $p = 0$, -1 ó 1, y cómo lo explicarían los rectilandeses.

---

3) Cerca de un agujero negro, Ana y Blanca permanecen estáticas y alineadas en $r = 10GM/3$ y $r = 36GM/13$, respectivamente (en coordenadas de Schwarzschild relativistas).

a) Si Ana ve a las 16:00 de su reloj que el de Blanca marca la misma hora, calcular qué hora verá en el de Blanca cuando el suyo marque las 22:00.

b) Si Blanca dispara una bala tangencialmente con $d\varphi/d\tau = 0'009$ en el instante inicial, hallar $d\varphi/d\tau$ cuando la bala pase por $r = 27GM/13$. (*Indicación*: $\frac{d}{d\lambda}\big(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}\big) = 0 \ \Rightarrow$?).

---

4) Considérese en $\mathbb{R}^2$ el tensor $T = \frac{\partial}{\partial x} \otimes dx + x\frac{\partial}{\partial x} \otimes dy$. Sean T^i_j y $\widetilde{T}^i_j$ las componentes de T en coordenadas cartesianas (x, y) y en coordenadas polares (r, θ), respectivamente. Comprobar que $T^1_1 + T^2_2 = \widetilde{T}^1_1 + \widetilde{T}^2_2$ calculando los sumandos, y explicar por qué se cumple esta igualdad.

---

5) Considérese el modelo de universo $C = \lambda_0(1 - \cos v)$, $t = \lambda_0(v - \operatorname{sen} v)$ con $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$.

a)Hallar en términos de λ_0 la duración de este universo desde el *big-bang* al *big-crunch*. Calcular también cuánto tiempo permanece expandiéndose y cuánto contrayéndose.

b) Hallar la relación entre λ_0 y K_0 para que este modelo satisfaga la ecuación de Friedman $(dC/dt)^2 + k = 8\pi G\rho C^2/3$ con $\rho C^3 = K_0$ y $k = 1$.

Escoger sólo cuatro ejercicios

---

1) Responder razonadamente a las siguientes cuestiones breves:

a) ¿Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|^2 \le \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2$ para vectores espaciales en el espacio de Minkowski?

b) Considérese $\mathbb{R}^2$ con la base canónica. Sea D el tensor determinante y $T = D\otimes D\otimes D$, ¿cuánto vale la componente T_{122112}?

c) ¿Cómo se escribe en unidades no relativistas la fórmula $E=\sqrt{p^2+m^2}$ donde p indica momento lineal (masa·velocidad) y E energía (Fuerza·espacio)?

---

2) a) Blanca está en los alrededores de un agujero negro en $r = 150GM/71$ (en coordenadas de Schwarzschild relativistas), y según ella ha tardado 16 minutos en hacer los deberes. Ana, sin embargo, asegura que Blanca ha tardado una hora. Hallar la coordenada radial de Ana para que ambas tengan razón.

b) Se llama momento generalizado p_φ a $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$ donde $\mathcal{L}$ es el lagrangiano correspondiente a la métrica de Schwarzschild. Probar que p_φ permanece constante a lo largo de la trayectoria de cualquier partícula que se mueve en los alrededores del agujero negro.

---

3) Considérese el espacio-tiempo $M=\{(t,x,y,z)\ :\ t>0\}$ dotado de la métrica

$$ds^2 = -t^{-2}dt^2 + t^{-2}dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Hallar las ecuaciones diferenciales que definen las líneas de universo. Calcular explícitamente la ecuación de alguna línea de universo parametrizada por el tiempo propio con $x,y,z=$ cte.

---

4) En $\mathbb{R}^3$ se considera el tensor $T = y\frac{\partial}{\partial x}\otimes dx + \frac{\partial}{\partial y}\otimes dz + \frac{\partial}{\partial z}\otimes dz$. Si T^i_j y $\widetilde{T}^i_j$ son las componentes de T en coordenadas cartesianas (x,y,z) y en cilíndricas (r,θ,z), respectivamente. Hallar $\widetilde{T}^1_1$ y $\widetilde{T}^3_3$. Probar además que $T^1_1+T^2_2+T^3_3=\widetilde{T}^1_1+\widetilde{T}^2_2+\widetilde{T}^3_3$.

---

5) a) Explicar por qué con la métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + C^2(t)\big((1-kr^2)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2\big), \qquad C>0;$$

el caso $C'>0$ corresponde a un universo en expansión, y el caso $C'<0$ a uno en contracción.

b) Considérese el modelo de universo con $k=0$, que responde a la ecuación de Friedmann $(C')^2 = 8\pi G\rho\ C^2/3$ con ρC^3 constante. Hallar la edad del universo, t_0, en función de la constante de Hubble $H_0 = C'(t_0)/C(t_0)$.

Instrucciones: 1) El examen dura dos horas y media aproximadamente. 2) Se deben escoger sólo cuatro problemas. 3) No es necesario entregar la hoja de enunciados. 4) Recuérdese escribir el nombre (con letra clara). 5) Cada ejercicio vale dos puntos y medio. 6) No hace falta usar calculadora.

Escoger sólo cuatro ejercicios

1) Responder razonadamente a las siguientes cuestiones breves:

a) Si dejamos caer un reloj hacia un agujero negro, ¿nos parecerá que atrasa o que adelanta?

b) En un espacio-tiempo que satisface las ecuaciones de campo con $T^{\alpha\beta} = 0$, ¿cuánto vale la curvatura escalar R?

c) ¿Cómo se escribe en unidades no relativista la fórmula $\widetilde{p} = (p - vE)/\sqrt{1-v^2}$ donde p y $\widetilde{p}$ indican momento lineal (masa·velocidad) y E energía (Fuerza·espacio)?

---

2) Sea Λ la transformación de Lorentz en el espacio de Minkowski. Comprobar que $\langle \Lambda\vec{x}, \Lambda\vec{x}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle$. ¿Existe $\lim_{n\to\infty} \Lambda^n \vec{x}$ para un $\vec{x}$ arbitrario?

---

3) Considérese el espacio-tiempo $M = \{(t, x, y, z) \ : \ x > 0\}$ dotado de la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + x^{-2}dx^2 + x^{-2}dy^2 + dz^2.$$

a) Hallar las ecuaciones diferenciales que definen las líneas de universo.

b) Calcular explícitamente la ecuación de una línea de universo parametrizada por el tiempo propio τ con $t = 5\tau/3$, $y = z = 0$.

---

4) Sean los tensores en $\mathbb{R}^2$

$$T = 2dx - dy, \qquad S = 6dx + 3dy, \qquad R = \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x}.$$

Calcular sus componentes $\widetilde{T}_i$, $\widetilde{S}_i$, $\widetilde{R}^{ij}$, cuando se emplean coordenadas polares. Probar que $\widetilde{T}_i\widetilde{S}_j\widetilde{R}^{ij} = 0$.

---

5) a) Sabiendo que, con la notación de la métrica de Robertson-Walker, $C = C(t)$ es cóncava ($C'' < 0$) y en la actualidad es creciente, deducir que el Universo tiene una edad finita.

b) Explicar el corrimiento hacia el rojo cosmológico, esto es, que el espectro de frecuencias de la luz que llega de las galaxias lejanas aparece desviado hacia las frecuencias menores.

Instrucciones: 1) El examen dura dos horas y media aproximadamente. 2) Se deben escoger sólo cuatro problemas. 3) No es necesario entregar la hoja de enunciados. 4) Recuérdese escribir el nombre (con letra clara). 5) Cada ejercicio vale dos puntos y medio. 6) No hace falta usar calculadora.