Seminario 2001

(una odisea en el espacio-tiempo)

Fernando Chamizo Lorente

Estas notas están estructuradas en cinco capítulos divididos en secciones que incluyen una parte teórica, una colección de problemas y un complemento final que podría calificarse de miscelánea. La parte teórica es un reflejo bastante fiel de los contenidos que se tratarán en las lecciones, excepto que la sección 5.3 y quizá la parte final de la 3.2 se minimizarán o se suprimirán. La exposición también trata de reflejar la de las lecciones, incluyéndose notas a pie de página nombradas con "uff" (abreviatura de "Uff, no entiendo nada") y "clp" (abreviatura de "Comentarios en letra pequeña") que, respectivamente, insisten sobre los puntos que pueden parecer difíciles o chocantes e ilustran las explicaciones con comentarios adicionales.

Los problemas que acompañan a cada sección son una parte fundamental del curso. Van unidos esencialmente a la sección en la que se proponen y constituyen una buena forma de comprobar si se han entendido los contenidos principales. Los problemas señalados con una flecha, "$\rightarrow$", están especialmente recomendados y los que tienen un nivel de dificultad mayor están precedidos por un asterisco.

Al final de cada sección se incluyen algunos epígrafes bajo los que se recogen contenidos subjetivos y accesorios que pueden separarse del resto del curso. En primer lugar se citan, sin un criterio fijo, acontecimientos científicos o simplemente anécdotas, que guardan alguna conexión con la sección correspondiente. A continuación se hace un resumen muy a grandes rasgos, no exhaustivo, de las palabras clave y los puntos principales de la teoría. Finalmente se indican algunas de las posibles aplicaciones e interrelaciones con otras partes de la Física y las Matemáticas.

Madrid, Febrero de 2001.

Fernando Chamizo Lorente.

Temario

1. La teoría especial de la relatividad

1.1. Las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell desempeñan un papel fundamental en la creación de la Teoría de la Relatividad. Prueba de ello es que A. Einstein comenzó su famosísimo artículo de 1905 [**Ei1**] haciendo referencia a ellas, las dedicó la mitad de las páginas, y a lo largo de su vida las señaló varias veces como su principal motivación para crear la relatividad. Pero la mayoría de las veces esto no se ve reflejado en los manuales básicos y el autor de [**Tr**] califica como una de las "mentiras de la Ciencia", perpetuada en muchísimos libros de texto, citar la prioridad del famoso experimento de A.A. Michelson y E.W. Morley como motivación frente al contenido teórico de dichas ecuaciones. De hecho, al menos una vez, el propio Einstein dijo que no conocía los resultados de tal experimento antes de 1905 (aunque seguramente sólo no los recordaba, véase [**Pa**] p. 126, [**Sa**] p. 62, [**Za**] p. 9).

Las ecuaciones de Maxwell son una serie de ecuaciones en derivadas parciales, obtenidas experimentalmente, que regulan los fenómenos electromagnéticos en el vacío. Concretamente:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \textbf{1)}\ \operatorname{div}\vec{E}=\epsilon_0^{-1}\rho & \textbf{2)}\ \operatorname{div}\vec{B}=0 \\[2em] \textbf{3)}\ \operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \textbf{4)}\ \operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array}}$$

donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son la intensidad de campo eléctrico y la inducción magnética, respectivamente, ρ es la densidad de carga, $\vec{j}$ es la densidad de corriente y ϵ_0 y μ_0 son dos constantes, aproximadamente, $\epsilon_0 = 8'854\cdot 10^{-12}N^{-1}m^{-2}C^2$, $\mu_0 = 1'257\cdot 10^{-6}m\,kg\,C^{-2}$. Seguramente estas ecuaciones tienen un aspecto impresionante para el que no las conoce de antemano y mucho más para los contemporáneos de J.C. Maxwell a mediados del siglo XIX. A pesar de su aspecto, sólo expresan de forma matemática (y útil) el contenido de algunos experimentos que hoy en día son muy familiares para cualquiera con cierta cultura científica.

Veamos primero el significado de los "personajes" de estas ecuaciones para después explicarlas una por una.

La intensidad de campo eléctrico, $\vec{E}$, es la fuerza por unidad de carga, es decir, una carga unidad en un campo de intensidad $\vec{E}$ sufre una fuerza dada por este mismo vector. Como la fuerza eléctrica entre dos cargas estáticas q y q' a distancia r es $||\vec{F}|| = Kqq'/r^2$ (ley de Coulomb), el módulo de la intensidad de campo generado por q es $||\vec{E}|| = Kq/r^2$. Normalmente se escribe $K = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ lo cual puede considerarse con la definición de ϵ_0. El significado de $\vec{B}$ es (o debería ser) en esencia similar para la fuerza magnética, pero curiosamente no se han encontrado en la naturaleza cargas magnéticas individuales, llamadas *monopolos*, aunque todos podemos experimentar con un imán que puede considerarse como dos cargas magnéticas, una en cada polo, o estudiar la fuerza que la inducción magnética ejerce en partículas cargadas en movimiento que es $q\vec{v}\times\vec{B}$ (donde q es la carga y $\vec{v}$ es la velocidad). De modo que los campos electromagnéticos se manifiestan en el mundo material ejerciendo sobre las partículas la llamada <u>fuerza de Lorentz</u>

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Esta fórmula se puede considerar como la definición de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ o como la quinta ecuación de Maxwell. Cualitativamente podemos ver el primer término en nuestra experiencia diaria atrayendo papelitos tras frotar una regla de plástico y el segundo término, observando cómo se deforma la imagen de un televisor[clp] cuando ponemos sobre la pantalla un imán potente. Por otra parte, la <u>densidad de carga</u> ρ es, como su nombre indica, la carga por unidad de volumen. Para una partícula unidimensional de carga unidad, ρ es en algún sentido la delta de Dirac: en el punto en que está situada la carga $\rho = \infty$ mientras que $\rho = 0$ en el resto y además $\int \rho = 1$. Ciertamente esto es sólo una abstracción de la realidad física en la cual detectamos distribuciones continuas de carga (muchas cargas infinitesimales combinadas) y por tanto ρ es una función en el sentido habitual. Finalmente, la <u>densidad de corriente</u> $\vec{j}$ es la densidad de carga en un punto multiplicada por la velocidad de la carga (infinitesimal) en dicho punto, $\vec{j} = \rho\vec{v}$.

Pasemos ahora a explicar el significado de cada una de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

1) $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \epsilon_0^{-1}\rho}$

Sea C un cuerpo sólido arbitrario en $\mathbb{R}^3$ y sea S la superficie cerrada que define su frontera. Por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_C \operatorname{div}\vec{E}\, d\mathrm{Vol}. \tag{1.1}$$

La intensidad del campo generado por una partícula de carga q situada en $\vec{r}_0$ (supondremos que $\vec{r}_0 \notin S$) es, por la ley de Coulomb[uff]

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{||\vec{r}-\vec{r}_0||^3}, \qquad \text{con } \vec{r} = (x, y, z).$$

[clp] En algún lugar se dice que esto podría ser perjudicial para el televisor. Aunque no haya una razón clara para ello, mejor evitarlo.

[uff] Esto no es más que trasladar a $\vec{r}_0$ la fórmula $\vec{E}=Kq\vec{u}_r/r^2$ donde $\vec{u}_r=\vec{r}/r$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{r}$ y $r=||\vec{r}||$.

Un cálculo prueba que fuera de la singularidad $\vec{r} = \vec{r_0}$ se tiene $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ y por tanto (1.1) implica $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ para $\vec{r_0} \notin C$. Si $\vec{r_0} \in C$, reemplazamos C por $C - B(\vec{r_0}, \delta)$, donde $B(\vec{r_0}, \delta)$ denota la bola de centro $\vec{r_0}$ y radio δ. Es fácil comprobar (incluso sin hacer el cálculo explícito) que en la frontera de $B(\vec{r_0}, \delta)$ se tiene $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0^{-1} q$, así pues

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{si la carga } q \text{ está en el exterior de } C \\ \epsilon_0^{-1} q & \text{si la carga } q \text{ está en el interior de } C. \end{cases} \tag{1.2}$$

Si, en vez de por una carga, el campo eléctrico $\vec{E}$ está generado por muchas (infinitas) cargas diferenciales dq, cada una generando un campo $d\vec{E}$, con una densidad continua ρ se tiene por la definición de ρ, (1.2) y (1.1)

$$\int_C \epsilon_0^{-1} \rho \, d\mathrm{Vol} = \int_C \epsilon_0^{-1} dq = \int_S \Big(\int_C d\vec{E} \Big) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_C \operatorname{div} \vec{E} \, d\mathrm{Vol}.$$

Pero si la primera y la última integral coinciden para cualquier cuerpo sólido C es que los integrandos coinciden.

En ausencia de campos magnéticos se puede probar el recíproco, esto es, que todos los campos que cumplen $\operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} \rho$ son superposiciones de campos generados por cargas eléctricas infinitesimales. En resumen, la primera ecuación de Maxwell es una forma difícil pero interesante de decir que en electrostática la fuerza es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Cuando tenemos cargas en movimiento el argumento que nos ha llevado a la primera ecuación de Maxwell no es válido porque no está claro que la sencilla ley de Coulomb sea también válida en este caso (de hecho no lo es). Pero podemos considerar verificado hasta el límite de los experimentos actuales que $\operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} \rho$ también se cumple para campos eléctricos no generados por cargas estáticas.

2) $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$

Los campos magnéticos aparecen generados por dipolos, esto es, siempre que hay un polo norte también hay infinitamente cerca un polo sur con lo que la "densidad de carga magnética" (tal término no existe) es siempre cero. Así que podríamos tratar de deducir esta ecuación como la anterior. Pero esto no deja de ser una metáfora de la realidad, porque no se han detectado todavía en la naturaleza monopolos magnéticos, constituyendo por parejas los dipolos. Si existieran los monopolos magnéticos entonces podríamos definir la densidad de carga magnética y la primera y la segunda ecuaciones de Maxwell serían idénticas, salvo constantes. De hecho el propio Maxwell empleó esencialmente este argumento ([**Ma**] V. II p. 27), introduciendo "masas y densidades magnéticas" y una fuerza regida por la fórmula m_1m_2/r^2 (véase [**Ma**] V. II p. 3) donde consideraba que m_1 y m_2 eran las "intensidades magnéticas de los polos". Maxwell justificaba experimentalmente estos argumentos diciendo que cada uno de los extremos de un imán muy largo y fino se comporta como un "centro de fuerzas".

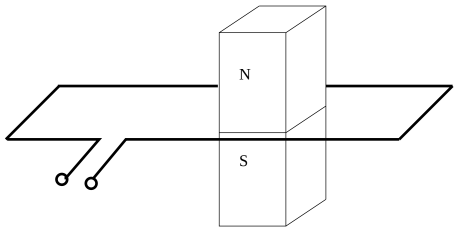
Una explicación más convincente pasa por considerar los campos magnéticos como generados por cargas en movimiento, que supondremos, para simplificar, confinadas en un hilo conductor estático. Según la ley experimental enunciada por P.S. Laplace [**Gi**] (también llamada menos propiamente de Biot y Savart), la contribución a $\vec{B}(\vec{r})$ de una porción infinitesimal del conductor, digamos fijada en $\vec{r}_0$ y con la dirección del eje X, es proporcional a

$$(1,0,0) \times \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{||\vec{r}-\vec{r}_0||^3}.$$

De la fórmula $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G}$ se deduce sin esfuerzo $\operatorname{div}\vec{B}=0$.

3) $\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t}$

Es bien conocido el efecto observado por M. Faraday y J. Henry consistente en que al pasar un imán por una espira conductora, digamos cuadrada para fijar ideas, aparece una corriente eléctrica circulando por ella.



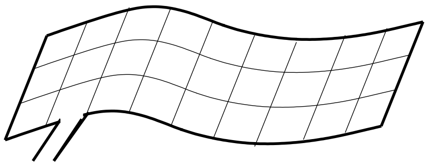
La "cantidad de electricidad" (fuerza electromotriz, para ser precisos) a lo largo de toda la espira, L, es la suma de la que circula en cada trocito infinitesimal, es decir, $\int_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$. El experimento que hoy día no sorprende a nadie, muestra que cuanto más deprisa pasemos el imán o cuantos más imanes pongamos en la superficie S que limita la espira, mayor es la fuerza electromotriz inducida, lo que sugiere

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = K\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}.$$

La constante K se toma negativa para respetar ciertas convenciones acerca de lo que es el sentido positivo y el sistema internacional de unidades se ha ajustado de manera que

$K = -1$ (pero con otras unidades usadas en muchos textos $K = -\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$).

Cualquiera que sea la forma o curvatura de la espira podemos siempre dividirla en pequeñas regiones aproximadamente cuadradas en las que se aplica la fórmula anterior y sumar los resultados, así que tiene validez general.



$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Aplicando el teorema de Stokes a la primera integral se tiene

$$\int_S \mathrm{rot}\, \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Como la primera y la última integral coinciden cualquiera que sea S, se deduce la tercera ecuación de Maxwell.

4) $\boxed{\mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0\, \partial \vec{E}/\partial t}$

Excepto por el asunto de los monopolos magnéticos, existe una simetría entre los campos eléctricos y magnéticos, así que en ausencia de cargas individuales deberíamos tener por analogía con la tercera ecuación

$$\mathrm{rot}\, \vec{B} = K' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

En ausencia de cargas esta ecuación es correcta y la constante K' en el sistema internacional se escribe $K' = \epsilon_0 \mu_0$. Sin embargo, si existen cargas en movimiento no puede ser cierta, porque tomando la divergencia y usando la primera ecuación

$$0 = \mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\, \mathrm{div}\, \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

lo cual no es coherente (típicamente si las cargas se mueven $\partial\rho/\partial t \neq 0$). Por consiguiente debería añadirse un término cuya divergencia compense a $\mu_0\, \partial\rho/\partial t$, este término es $\mu_0 \vec{j}$. Su justificación experimental es, de nuevo, bien conocida, ya que una corriente eléctrica fluyendo por un conductor rectilíneo desvía una aguja magnética (experiencia de Oersted) aunque el campo electrico no dependa del tiempo. También un solenoide atrae objetos de hierro al conducir la corriente eléctrica.

A decir verdad esta explicación de la cuarta ecuación es engañosa desde el punto de vista histórico ya que primero se halló el término $\mu_0\vec{j}$ con los experimentos citados (véase **[Fe-Le-Sa]** §18.1) y después Maxwell modificó la ecuación añadiendo $\epsilon_0\mu_0\,\partial\vec{E}/\partial t$, que es más difícil de medir experimentalmente, para respetar la ley de conservación de la carga[clp].

Para terminar esta exposición, diremos las ecuaciones de Maxwell son perfectamente correctas en el mundo en el que nos movemos (para comprobarlas basta encender la televisión, si no funciona no es que las ecuaciones de Maxwell fallen sino que hay que llamar al técnico) pero no reflejan las propiedades del micromundo cuántico. Conciliar la teoría de campos electromagnéticos y la Física cuántica es todavía un tema de estudio, la electrodinámica cuántica, que no se ha completado satisfactoriamente.

A continuación veremos uno de los fenómenos físicos que ha tenido más influencia en la historia reciente de la humanidad: la existencia de ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío en ausencia de cargas y corrientes, adquieren una forma especialmente simétrica

$$\operatorname{div}\vec{E}=0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{B}=0, \qquad \operatorname{rot}\vec{B}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Si derivamos con respecto de t en la última ecuación y sustituimos en la tercera, se obtiene

$$\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}.$$

Usando la relación

$$\Delta\vec{F}=\nabla(\operatorname{div}\vec{F})-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F},$$

donde $\Delta\vec{F}=\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial z^2}$, y aplicando la primera ley de Maxwell, se deduce

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=c^2\Delta\vec{E}.$$

[clp] Como tantas otras leyes de conservación, ésta es una fórmula integral expresando que todo lo que entra sale (no desaparecen cargas), y con el teorema de la divergencia se llega a una relación entre $\operatorname{div}\vec{j}$ y $\partial\rho/\partial t$.

donde se ha escrito, como es habitual, $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. Es decir, cada componente de $\vec{E}$ (y, simétricamente, de $\vec{B}$) satisface la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big). \tag{1.3}$$

Veamos que el nombre que recibe esta ecuación está en consonancia con lo que representa, al menos en un caso sencillo. Para ello supongamos que u no depende de y y z, esto es, $u = u(x,t)$ satisface la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La solución general de esta ecuación es

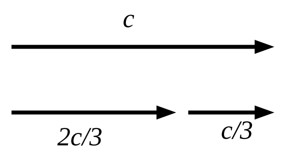
$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

donde f y g son funciones arbitrarias dos veces derivables. Teniendo en cuenta el tiempo que se dedica en los cursos de ecuaciones en derivadas parciales a resolver la ecuación de ondas, esto parece demasiado fácil pero lo difícil es, en cierto modo, expresar f y g en términos de los datos determinados por las condiciones iniciales. Observando la solución vemos que u es realmente una *onda*, para ser más precisos, la superposición de dos ondas en general. Una, dada por f, que viaja hacia la derecha y otra, dada por g, que viaja hacia la izquierda.

La solución de (1.3) es técnicamente más complicada pero responde a la misma idea, excepto que en una dimensión sólo existen derecha e izquierda mientras que en tres hay infinitas direcciones (así que la diferencia en complicación es como de los "flippers" a las videoconsolas). Concretamente, para cada vector unitario $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, $u(\vec{x},t) = f(\vec{x} - c\vec{n}t)$ es solución de (1.3) y, en cierto sentido (véase [**Dy-Mc**]), la solución general es superposición de todas estas soluciones particulares.

La constante c indica la velocidad con la que avanza la onda y tiene como valor $c = (8'854 \cdot 10^{-12} \cdot 1'267 \cdot 10^{-6})^{-1/2} = 2'99\ldots \cdot 10^8$ que coincide con la velocidad de la luz, en metros por segundo, lo que lleva a conjeturar con Maxwell (véase [**Ma**] Ch. XX, especialmente p. 436) que realmente <u>la luz es una onda electromagnética</u>.

De lo dicho, resulta que si un observador mide la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío, digamos de la luz, y no es c entonces las ecuaciones de Maxwell no se pueden cumplir para él. Por otra parte, *en buena lógica*, si en punto del espacio alejado de toda referencia digamos algo a medio camino entre las Nubes de Magallanes y la Vía Láctea (o en una carretera de Teruel), un observador enciende una linterna y mide velocidad c, otro observador con velocidad relativa $2c/3$ "corriendo" hacia la luz debiera medir $c/3$. Esto parece tan incontestable como que $1 = 2/3 + 1/3$.



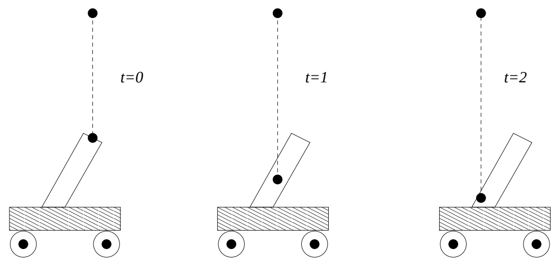
Si este argumento es correcto, para el segundo observador no se cumplirían las ecuaciones de Maxwell por estar en movimiento relativo, pero esto es un poco extraño porque él podría decir que está en reposo y que es el primer observador el que se mueve.

Recurriendo a un ejemplo más manejable podemos encontrar la solución que se dio por cierta en el siglo XIX. Pensemos en el sonido, también satisface una ecuación de ondas [**Al-Fi**] que implica que su velocidad en el aire es constante y de más de $1000\,km/h$, pero si medimos lo que tarda en llegar el ruido de los motores al exterior de la cabina de un avión comercial, esta velocidad se reduce a unos cientos mientras que otras mediciones muestran que la velocidad del sonido recobra su valor en el interior del avión. La solución a esta paradoja es que las ecuaciones del sonido sólo tienen sentido con respecto al aire, porque el sonido no es otra cosa que expansiones y compresiones del aire. Si el aire se mueve debemos movernos con él para usar las ecuaciones correspondientes. En el exterior del avión el aire se va quedando atrás y tarda más en llegar el sonido. Pero volviendo a nuestro caso, si estamos en el vacío, digamos en el camino que recorre la luz del Sol a la Tierra, no hay prácticamente nada perceptible que "sostenga" la luz. Retomando un nombre usado en la antigüedad, se supuso que había algo así como un aire de luz, el *éter* (o éter luminífero) que ocupaba el aparente vacío. Las ecuaciones de Maxwell sólo serían válidas en reposo con respecto al éter.

A finales del XIX no había ingenios mecánicos suficientemente rápidos (ni ahora los hay) como para medir directamente diferencias apreciables entre la velocidad de la luz en el éter en reposo o en movimiento pero se tenían bastantes evidencias en contra de la existencia de tal sustancia gracias a experimentos astronómicos o indirectos. Veamos brevemente dos de los más famosos que llevan a un resultado contradictorio y por tanto a rechazar la hipótesis del éter.

1. La aberración de la luz

Supongamos que queremos recoger dentro de una probeta (larga y estrecha) una gota de agua que cae desde una gotera. Para que la gota caiga justo en el fondo, la probeta debe colocarse obviamente en vertical. Pero si la fijamos en un carrito móvil con movimiento uniforme y tenemos la suerte de que la gota pase a través de la boca de la probeta, para que llegue al fondo de ésta debe permanecer inclinada en la dirección de movimiento ya que de esa manera el fondo estará situado en la vertical cuando la gota haya bajado.



La tangente del ángulo de la probeta con respecto a la vertical debe ser el cociente entre las velocidades del carrito y la gota. Cambiemos la gotera por una estrella (muy lejana) que esté justo en la vertical respecto al plano de la órbita terrestre, la gota por la luz que irradia, la probeta por un gran telescopio y el carrito por la Tierra. Como la velocidad de la Tierra es de unos $30\,km/s$ y $c = 300\,000\,km/s$, la variación del ángulo de la posición aparente de la estrella cuando la Tierra va y vuelve en su órbita circular alrededor del Sol es aproximadamente $2 \cdot \operatorname{arc\,tg}(30/300\,000) \approx 4'\,12''$. Esta variación se llama *aberración de la luz* y se ha detectado experimentalmente (desde el siglo XVIII) así que la Tierra no puede arrastrar el éter porque entonces es como si el carrito arrastrara la gotera consigo y se tendría que el ángulo de inclinación es cero.

2. El experimento de Michelson-Morley

Las ondas electromagnéticas que constituyen la luz visible tienen una frecuencia gigantesca en comparación incluso con las ondas de radio que llegan a un receptor de FM. Por tanto la separación entre dos nodos sucesivos es pequeñísima, del orden de $6 \cdot 10^{-7} m$, con lo cual que una onda que llegue un poco antes o un poco después se traduce en que haya o no haya interferencias destructivas (véase [**Al-Fi**] §22).

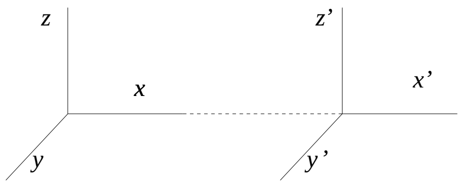
Michelson primero en solitario y después en colaboración con Morley en diferentes experimentos (el más famoso en 1887) estudiaron la interferencia de dos rayos de luz en direcciones opuestas. Si la Tierra no arrastrase el éter consigo, la luz en la dirección de movimiento de la Tierra tendría una velocidad relativa menor que c en unos $30\,km/s$ mientras que en la dirección opuesta habría un incremento de la velocidad, con ello los dos rayos no llegarían al tiempo a un punto fijado y habría interferencia. Tal fenómeno no se observó a pesar de la gran precisión de los experimentos, así pues la Tierra no puede arrastrar el éter.

Por cierto, este proceso tan fino de interferencia es lo que se usa, con luz láser, para leer las pequeñas hendiduras del orden de $10^{-6} m$ correspondientes a ceros y unos en un disco compacto (pero esto no lo hicieron ni Michelson ni Morley, sino Philips y Sony).

Para terminar, veamos otra contradicción más teórica entre las ecuaciones de Maxwell, la fuerza de Lorentz y nuestro sentido común, sin hacer referencia a las ondas electromagnéticas.

Supongamos un observador en reposo en O que utiliza las coordenadas de espacio y tiempo (x, y, z, t) y otro que se mueve con velocidad v en la dirección del eje OX. Si los ejes espaciales son paralelos y los orígenes coinciden inicialmente, nuestra intuición y Galileo nos dicen que las coordenadas (x', y', z', t') usadas por el segundo observador se relacionan con las del primero mediante

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t. \tag{1.4}$$



Esta relación se llama transformación de Galileo. Si el segundo observador posee una gran carga en el origen ésta generará, según sus mediciones, un campo eléctrico $\vec{E}'$, dado por la ley de Coulomb, pero ningún campo magnético, $\vec{B}' = \vec{0}$, sobre pequeñas cargas de prueba, q, estáticas para él. La fuerza de Lorentz medida será

$$\vec{F} = q(\vec{E}' + \vec{0} \times \vec{B}') = q\vec{E}' = q(E_1', E_2', E_3').$$

Por otra parte, el primer observador ve las cargas en movimiento y detecta campos eléctricos y magnéticos, $\vec{E}$ y $\vec{B}$, no nulos en general. Según él la fuerza será

$$\vec{F} = q(\vec{E} + (v, 0, 0) \times \vec{B}) = q(E_1, E_2 - vB_3, E_3 + vB_2).$$

Parece claro que la fuerza no depende del sistema de referencia (por mucho que corramos no aumentan nuestros bíceps). Si nuestros argumentos fueran correctos, se tendría

$$E_1' = E_1, \qquad E_2' = E_2 - vB_3, \qquad E_3' = E_3 + vB_2 \tag{1.5}$$

$\boxed{\text{Estas ecuaciones son falsas}}$

Sin embargo estas ecuaciones no pueden tener validez general si queremos que las ecuaciones de Maxwell se cumplan para ambos observadores. Concretamente, si para el segundo observador se cumple $\operatorname{div} \vec{E}' = 0$ (fuera de la carga), entonces

$$0 = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial (E_2 - vB_3)}{\partial y} + \frac{\partial (E_3 + vB_2)}{\partial z} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} + v\left(\frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y}\right)$$

$$= \operatorname{div} \vec{E} - (v, 0, 0) \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t}$$

donde hemos aplicado la primera y la última ecuaciones de Maxwell para el primer observador. Pero esto es contradictorio porque según se aleje la carga el campo disminuirá y $\partial E_1/\partial t$ no será nulo. Más adelante veremos que las ecuaciones de Maxwell se cumplen para observadores en movimiento y por tanto <u>las ecuaciones (1.5) son falsas</u>, sin embargo la pequeñez del factor v/c^2 hace sospechar que son muy aproximadas para las velocidades a las que estamos acostumbrados.

Problemas 1.1

$\rightarrow$**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Cómo se puede explicar físicamente a partir de las ecuaciones de Maxwell que la función $(\vec{r}-\vec{r_0})||\vec{r}-\vec{r_0}||^{-3}$, con $\vec{r}=(x,y,z)$ y $\vec{r_0}$ constante, tenga divergencia nula para $\vec{r}\neq\vec{r_0}$? ¿Y que su rotacional sea nulo?

ii) ¿Cuánto vale el flujo magnético $\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$ en una superficie cerrada?

iii) ¿Cómo se podría aplicar la tercera ecuación de Maxwell para probar que la respuesta a la pregunta anterior es una constante?

iv) ¿Por qué si dos funciones continuas f y g cumplen $\int_C f\,d\mathrm{Vol}=\int_C g\,d\mathrm{Vol}$ para cualquier cuerpo sólido $C\subset\mathbb{R}^3$, entonces $f=g$?

v) O. Roemer observó en 1676 que, estando el Sol, la Tierra y Júpiter alineados, un eclipse en una luna de Júpiter ocurría $1000\,s$ antes cuando la Tierra estaba entre medias que cuando el Sol lo estaba. De ahí dedujo que la velocidad de la luz era aproximadamente $225\,000\,km/s$. ¿Qué valor pensaba Roemer que tenía el radio de la órbita terrestre?

2) Comprobar que verdaderamente la divergencia y el rotacional de $(\vec{r}-\vec{r_0})||\vec{r}-\vec{r_0}||^{-3}$ son nulos para $\vec{r}\neq\vec{r}_0$.

$\rightarrow$**3)** Explicar por qué el campo eléctrico generado por una carga estática puntual es un campo conservativo y hallar su potencial. Sabiendo que una carga en movimiento rectilíneo uniforme, $\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}t$, genera un campo magnético no constante, probar que su campo eléctrico no es conservativo y que no viene dado por la fórmula $\vec{E}=K\big(\vec{r}-\vec{r}(t)\big)||\vec{r}-\vec{r}(t)||^{-3}$ con K constante (es decir, que la ley de Coulomb no es válida para cargas en movimiento).

$\rightarrow$**4)** Demostrar con razonamientos sencillos el resultado mencionado en la teoría afirmando que si $\vec{E}$ es la intensidad de campo eléctrico producido por una carga q situada en $\vec{r_0}$ entonces $\int\vec{E}\cdot d\vec{S}=\epsilon_0^{-1}q$ se verifica para cualquier superficie esférica con centro en $\vec{r_0}$. (*Indicación*: Probar que $\int\vec{E}\cdot d\vec{S}=q(4\pi\epsilon_0R^2)^{-1}\int 1dS$).

$\rightarrow$**5)** Probar que los únicos campos vectoriales $\vec{F}=\nabla\phi$ (esto es, conservativos) con ϕ radial y $\operatorname{div}\vec{F}=0$ en $\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}$ son de la forma $\vec{F}=C\vec{r}||\vec{r}||^{-3}$ donde $\vec{r}=(x,y,z)$ y C es una constante. (*Indicación*: Aplicar el teorema de la divergencia de Gauss para demostrar que el flujo de $\vec{F}$ es constante a través de todas las superficies esféricas centradas en $\vec{0}$, y proceder como en el problema anterior).

$\rightarrow$**6)** Explicar por qué la siguiente ecuación, llamada "ley de conservación de la carga", debe cumplirse para toda región sólida C con frontera S, si las cargas no se crean ni se destruyen:

$$\int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_C \rho\, d\text{Vol}.$$

Deducir de esta ley que $\operatorname{div}\vec{j} = -\partial\rho/\partial t$. Por tanto $\mu_0\vec{j}$ es el término que le falta a $\operatorname{rot}\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$ para que al tomar la divergencia no contradiga la primera ecuación de Maxwell.

7) A la cantidad $\frac{\epsilon_0}{2}||\vec{E}||^2 + \frac{1}{2\mu_0}||\vec{B}||^2$ se le llama densidad de energía. Comprobar que realmente tiene unidades de energía entre volumen. Calcular la energía total en el exterior de una carga estática de radio R. (Nota: El comportamiento singular cuando $R\to 0^+$ es el origen de algunos problemas teóricos todavía no resueltos en la Física actual).

8) Comprobar que

$$\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G} \qquad \text{y} \qquad \Delta\vec{F} = \nabla(\operatorname{div}\vec{F}) - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F}.$$

$\rightarrow$**9)** Probar que la solución general en $C^2(\mathbb{R}^2)$, de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

es

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct).$$

(*Indicación*: Utilícese que $u(x,t) = v(x+ct, x-ct)$ para cierta v adecuada).

10) Se puede demostrar que el campo electromagnético generado por una carga en movimiento con velocidad $\vec{v} = (v,0,0)$ viene dado por

$$\vec{E} = (x-vt, y, z)G \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = vc^{-2}(0,-z,y)G$$

donde

$$G = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2/c^2}}\Big(\frac{(x-vt)^2}{1-v^2/c^2} + y^2 + z^2\Big)^{-3/2}.$$

Escoger una de las ecuaciones de Maxwell y comprobar que se satisface fuera del punto singular $(vt,0,0)$.

11) Teniendo en cuenta las ecuaciones del ejercicio anterior, comprobar con qué grado de aproximación se cumplen las fórmulas (incorrectas) $E_1' = E_1$, $E_2' = E_2 - vB_3$, $E_3' = E_3 + vB_2$ donde $\vec{E}'$ es el campo generado por una carga q estática en el origen, $\vec{E}' = q\vec{r}/(4\pi\epsilon_0||\vec{r}||^3)$, evaluado en $\vec{r} = (x - vt, y, z)$. Concretamente, calcular la velocidad v para que en alguna de las fórmulas se cometa un error relativo del 25% al evaluarla en un punto del eje X.

$\rightarrow$**12)** Teoremas bien conocidos del cálculo de varias variables afirman que, bajo leves condiciones de regularidad, para una función $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se cumple:

i) Si $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$ existe $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{f} = \nabla g$.

ii) Si $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ existe $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f} = \operatorname{rot} \vec{g}$.

Teniendo en cuenta estos resultados, demostrar que existen dos funciones $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi = \phi(x, y, z, t)$, y $\vec{A} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$, llamadas potencial escalar y potencial vectorial, tales que

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \qquad \text{y} \qquad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

donde el gradiente, la divergencia y el rotacional se toman en las tres primeras variables. Comprobar que $\phi - \partial f/\partial t$ y $\vec{A} + \nabla f$ con f arbitraria son también potenciales escalar y vectorial. Deducir, usando que $\Delta f - c^{-2}\partial^2 f/\partial t^2 = g$ tiene solución para g regular, que siempre se pueden escoger ϕ y $\vec{A}$ de manera que satisfagan la *calibración de Lorentz*

$$\operatorname{div} \vec{A} + c^{-2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

$\rightarrow$**13)** Sea $\Box$ el operador de D'Alambert $\Delta - c^{-2}\partial^2/\partial t^2$ y sean los vectores de cuatro coordenadas $\vec{\mathcal{J}} = -\mu_0(c\rho, \vec{j})$ y $\vec{\mathcal{A}} = (c^{-1}\phi, \vec{A})$ donde ϕ y $\vec{A}$ son como en el ejercicio anterior, satisfaciendo la calibración de Lorentz. Probar que las cuatro ecuaciones de Maxwell se reducen con todas estas definiciones a

$$\Box \vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{J}}.$$

(De aquí se puede obtener la solución general de las ecuaciones de Maxwell. Véase 21.7 en [**Fe-Le-Sa**]). En particular, en ausencia de cargas y corrientes las ecuaciones de Maxwell no son otra cosa que ecuaciones de ondas. (*Indicación*: Nótese que las ecuaciones segunda y tercera se siguen de la definición de ϕ y $\vec{A}$. Utilícese la fórmula $\Delta\vec{F} = \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{F}$ para simplificar los cálculos).

***14)** Físicamente está claro que si giramos la cabeza no cambian las leyes que regulan los campos electromagnéticos. Demostrarlo matemáticamente. Es decir, que si $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y

$\vec{B}(\vec{x},t)$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell y se considera el cambio de base $\vec{x}' = T\vec{x}$ con T un giro en $\mathbb{R}^3$, entonces los campos en la nueva base: $\vec{E}'(\vec{x}',t) = T\vec{E}(T^{-1}\vec{x}',t)$ y $\vec{B}'(\vec{x}',t) = T\vec{B}(T^{-1}\vec{x}',t)$, también satisfacen las ecuaciones de Maxwell con $\rho'(\vec{x}') = \rho(T^{-1}\vec{x}')$ y $\vec{j}'(\vec{x}') = T\vec{j}(T^{-1}\vec{x}')$. (*Indicación*: Utilizar la forma integral de las ecuaciones de Maxwell y que los productos escalares y mixtos, que aparecen en las definiciones de las integrales de línea y superficie, no varían al aplicar un giro a los vectores que participan en ellos).

Historias en titulares:

AC / DC

La nueva era de la electricidad ha comenzado. M. Faraday ha ideado una máquina que permite generar electricidad a partir de energía mecánica y J. Henry ha conseguido elevar una tonelada de hierro con un electroimán. La electricidad ha dejado de ser una diversión para científicos y se atisban sus aplicaciones. Sin embargo, la teoría está todavía lejos ser satisfactoria. Faraday habla de campos y líneas de fuerza pero parece alérgico a las ecuaciones y las bases teóricas de la nueva ciencia no están asentadas.

1831

S A 86

Dentro de su gran Tratado de Electridad y Magnetismo, J.C. Maxwell ha acreditado al *princeps matematicorum* C. F. Gauss, diciendo que ya se había percatado de que la piedra angular de la electrodinámica estaba en que la fuerza eléctrica no es instantánea sino que se propaga a lo largo del tiempo, igual que hace la luz. Maxwell, al final de su tratado habla de que "tiene que haber un medio en el que la energía exista después de que abandona un cuerpo y antes de que alcance otro". Nadie ha detectado hasta ahora este medio.

1873

The New Wave

El profesor H.R. Hertz ha hecho saltar chispas a muy alta frecuencia entre dos puntas unidas a sendas bolas metálicas y ha comprobado que las chispas reaparecen mágicamente en un detector en forma de anillo situado a una cierta distancia. Según explica, son las ondas predichas por Maxwell las que obran el milagro. Las nuevas ondas comparten con la luz las propiedades de reflexión y difracción, y en el laboratorio de Hertz tienen un alcance de unos metros.

1888

¿Qué hay que saberse?:

Todo, pero las ideas principales que hay que repasar con el rotulador verde fluorescente son las indicadas a continuación:

• Las ecuaciones de Maxwell son

$$\operatorname{div}\vec{E} = \epsilon_0^{-1}\rho, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

y junto con la fórmula de la fuerza de Lorentz regulan los fenómenos electromagnéticos.

• Todas se deducen de experimentos más o menos sencillos y de diferentes aplicaciones del teorema de Stokes.

• Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes son también soluciones de la ecuación de ondas y viajan a la velocidad de la luz.

• Las ecuaciones de Maxwell, algunos experimentos y nuestro sentido común, entran en conflicto.

¿Para qué sirve?:

Se ha dicho que un político preguntó a Faraday para qué servía todo eso y contestó que algún día cobraría impuestos por ello. Si la historia no es legendaria, es seguro que el mismo Faraday no imaginaba lo profético de sus palabras. Por si acaso lo fuera, se puede echar mano de unas citas de las magníficas lecciones de R.P. Feynman ([**Fe-Le-Sa**] §16-14,15,16):

-Cuando Faraday hizo público su notable descubrimiento de que un flujo magnético variable produce una fuerza electromotriz, le preguntaron (tal como le preguntan a cualquiera cuando descubre un nuevo hecho en la naturaleza): '¿para qué sirve?'. Todo lo que había descubierto era la particularidad de que se producía una corriente pequeñita cuando movía un alambre cerca de un imán. ¿Cuál podía ser la utilidad *de eso?. Su respuesta fue: '¿Cuál es la utilidad de un bebé recién nacido?'*

Ahora Feynman se apasiona y explica cómo el gran organismo del mundo actual vive gracias a la electricidad:

-Millones de ruedas pequeñas girando en respuesta a la rotación de la rueda grande de la Presa de Boulder. Paras la rueda grande y se paran todas las ruedas; se van las luces. Están conectadas realmente.

Y para terminar el final feliz:

-El bebé inútil se convirtió en un prodigio y cambió la faz de la Tierra de una manera que su orgulloso padre nunca hubiera imaginado.

En cualquier caso, el trabajo de Faraday y de otros científicos, la formulación matemática de Maxwell a través de sus ecuaciones y los experimentos de Hertz, a la larga han dado lugar a la radio, la *tele*, el móvil, las videoconsolas... Como justificación, seguramente esto ya es suficiente.

1.2. Lorentz, Einstein, Minkowski y la relatividad

Sorprendemente la mayoría de las fórmulas hoy en día famosas de la teoría de la relatividad especial habían aparecido antes del artículo originario **[Ei1]**. Por ejemplo, la contracción del espacio fue enunciada por G.F. FitzGerald en 1889 (¡Einstein sólo contaba entonces con diez años!) e incluso la celebérrima $E = mc^2$ (que es más tardía que el resto y todavía no está en **[Ei1]**) apareció en la Física prerrelativista para electrones con un factor erróneo 3/4 (véase **[Fe-Le-Sa]**). Sin embargo fue Einstein quien creó independientemente un marco teórico en el que estas fórmulas se derivaban de revolucionarios primeros principios y adquirían su significado actual.

Uno de los grandes artífices de la relatividad antes de la relatividad fue H.A. Lorentz quien en un artículo **[Lo]** anterior al de Einstein y que no fue conocido por éste hasta más tarde (véase la nota en p. 38 de **[Ei-Lo-Mi-We]** y **[Sa]** p. 58), planteó ideas tan netamente relativistas como el crecimiento de la masa con la velocidad o la equivalencia masa-energía (en una versión más radical: la masa en realidad es energía). Sin embargo su mayor contribución fue la introdución de las transformaciones de Lorentz en las que se basa la relatividad especial.

La respuesta a cómo se puede llegar tan lejos sin enunciar los postulados de Einstein está en las ecuaciones de Maxwell, que recordemos que en ausencia de cargas y corrientes se escribían como

$$\text{(1.6)} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Lorentz estudió transformaciones que dejaran invariantes estas ecuaciones y llegó al convencimiento de que la transformación de Galileo (véase la sección anterior) que relacionaba las coordenadas espacio temporales (x, y, z, t) y (x', y', z', t') en dos sistemas de referencia, el segundo con velocidad $(v, 0, 0)$ con respecto al primero, debiera sustituirse, al ser aplicada a las ecuaciones de Maxwell, por la <u>transformación de Lorentz</u>

$$\text{(1.7)} \qquad \boxed{x' = \gamma(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma(t - vx/c^2)}$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Nótese que para velocidades "normales" $\gamma \approx 1$ y (1.7) es prácticamente igual a la transformación de Galileo. Pero hay una diferencia revolucionaria desde el punto de vista físico y filosófico que Lorentz no llegó a aceptar plenamente con todas sus consecuencias hasta la llegada de la relatividad, y es que el tiempo depende del sistema de referencia, es relativo (¿acaso para él duraba lo mismo media hora esperando el tren que treinta minutos con su novia?).

Sin detenernos en los razonamientos de Lorentz (que están explicados junto con sus motivaciones en [**Za**]), estableceremos su resultado mostrando en qué sentido se puede probar la invariancia de las ecuaciones de Maxwell por (1.7).

Proposición 1.2.1 : *Sea $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, como antes, y sean las fórmulas*

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1, & B_1' &= B_1, \\ E_2' &= \gamma(E_2 - vB_3), & B_2' &= \gamma(B_2 + vE_3/c^2), \\ E_3' &= \gamma(E_3 + vB_2), & B_3' &= \gamma(B_3 - vE_2/c^2). \end{aligned}$$

Supongamos que (x, y, z, t) y (x', y', z', t') están relacionadas por la transformación de Lorentz (1.7). Si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell (1.6) con las primeras variables entonces $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ también las satisfacen con las segundas variables.

Nota: Satisfacer (1.6) con ciertas variables quiere decir que las derivadas parciales se calculan con respecto a dichas variables. Como sugiere la notación, $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ representan los campos eléctricos y magnéticos que mide un observador con velocidad $\vec{v} = (v, 0, 0)$ con respecto a otro para el que estos vectores son $\vec{E}$ y $\vec{B}$. (Compárese con el resultado erróneo obtenido en la sección anterior con la transformación de Galileo).

Ejemplo . Calcular el campo eléctrico generado por una carga puntual en movimiento con velocidad constante.

Digamos que la carga tiene velocidad $(v, 0, 0)$ y que parte del origen. Para un observador que viaja con la carga la intensidad de campo eléctrico, $\vec{E}'$, viene dada por la ley de Coulomb y $\vec{B}' = \vec{0}$. Despejando en las ecuaciones anteriores se tiene

$$E_1 = E_1', \quad E_2 = \gamma E_2', \quad E_3 = \gamma E_3' \qquad \text{con } \vec{E}' = \frac{q\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r}'||^3}, \quad \vec{r}' = (x', y', z').$$

Por consiguiente, el análogo de la ley de Coulomb para cargas en movimiento es

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x - vt, y, z)}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Dem.: Por la simetría de (1.6) nos limitaremos a comprobar el resultado para la primera y la tercera ecuación ya que las otras dos son completamente análogas.

Nótese que al despejar en la transformación de Lorentz

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \gamma(t' + vx'/c^2).$$

Por la regla de la cadena, utilizando que $\partial x/\partial x' = \gamma$ y $\partial t/\partial x' = v\gamma/c^2$,

$$\operatorname{div}\vec{E}' = \big(\frac{\partial E_1}{\partial x}\gamma + \frac{\partial E_1}{\partial t}\frac{v\gamma}{c^2}\big) + \gamma\big(\frac{\partial E_2}{\partial y} - v\frac{\partial B_3}{\partial y}\big) + \gamma\big(\frac{\partial E_3}{\partial z} - v\frac{\partial B_2}{\partial z}\big)$$

$$= \gamma\operatorname{div}\vec{E} + v\gamma(1,0,0)\cdot\big(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}\vec{B}\big)$$

que se anula por la primera y la última ecuaciones de Maxwell.

Las coordenadas de $\operatorname{rot}\vec{E}' + \partial\vec{B}'/\partial t'$ son, por definición,

$$(c_1, c_2, c_3) = \big(\frac{\partial E_3'}{\partial y'} - \frac{\partial E_2'}{\partial z'} + \frac{\partial B_1'}{\partial t'}, \frac{\partial E_1'}{\partial z'} - \frac{\partial E_3'}{\partial x'} + \frac{\partial B_2'}{\partial t'}, \frac{\partial E_2'}{\partial x'} - \frac{\partial E_1'}{\partial y'} + \frac{\partial B_3'}{\partial t'}\big).$$

Notando que $y' = y$, $z' = z$ y que $\partial x/\partial t' = \gamma v$ y $\partial t/\partial t' = \gamma$, se tiene

$$c_1 = \big(\gamma\frac{\partial E_2}{\partial y} + v\gamma\frac{\partial B_2}{\partial y}\big) - \big(\gamma\frac{\partial E_2}{\partial z} - v\gamma\frac{\partial B_3}{\partial z}\big) + \big(v\gamma\frac{\partial B_1}{\partial x} + \gamma\frac{\partial B_1}{\partial t}\big)$$

$$= \gamma(1,0,0)\cdot\big(\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\big) + v\gamma\operatorname{div}\vec{B}$$

que, como antes, se anula.

De nuevo, usando la regla de la cadena se tiene

$$c_2 = \frac{\partial E_1}{\partial z} - \gamma\big(\gamma\frac{\partial E_3}{\partial x} + \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial t}\big) - v\gamma\big(\gamma\frac{\partial B_2}{\partial x} + \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial B_2}{\partial t}\big)$$

$$+\gamma\big(v\gamma\frac{\partial B_2}{\partial x} + \gamma\frac{\partial B_2}{\partial t}\big) + \frac{\gamma v}{c^2}\big(v\gamma\frac{\partial E_3}{\partial x} + \gamma\frac{\partial E_3}{\partial t}\big)$$

y después de simplificar se llega a

$$c_2 = \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial t} = (0,1,0)\cdot\big(\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\big) = 0.$$

La anulación de c_3 es completamente similar a la de c_2 ya que la variable y' es invariante como z', y el cambio de signo queda compensado con la diferencia entre las fórmulas para E_2' y E_3'. ∎

Como ya hemos indicado, se considera que la relatividad nació en 1905 con el artículo de Einstein "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento". A pesar del título no sólo trata de electrodinámica (cargas en movimiento) sino también de cinemática (movimiento sin atender a las fuerzas). Los dos principios de los que parte Einstein son el de relatividad, cuyo origen puede remontarse a Galileo, y el de constancia de la velocidad de la luz que, como hemos visto, se deriva de las ecuaciones de Maxwell. El enunciado, prácticamente textual, que hace de ellos es el siguiente:

Principio de relatividad: *Las leyes por las cuales los estados de los sistemas físicos experimentan cambios, no se ven afectadas si dichos cambios de estado se expresan en diferentes sistemas de coordenadas en movimiento de traslación uniforme.*

Constancia de la velocidad de la luz: *Cualquier rayo de luz se mueve en un sistema de coordenadas "estacionario" con velocidad constante c, independientemente de que haya sido emitido por un cuerpo estacionario o por uno en movimiento.*

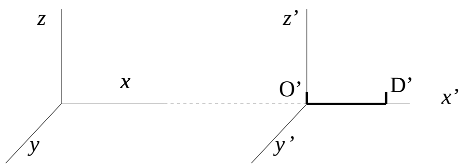
El principio de relatividad también se suele enunciar de forma más breve diciendo que *las leyes de la Física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.* Éstos son los sistemas de referencia "no acelerados" (véase una exposición rigurosa en [**Be**]), que según el principio de inercia (constancia de la velocidad de una partícula en ausencia de fuerzas) se mueven con velocidad relativa constante unos con respecto de otros. El principio de relatividad se manifiesta ante nosotros cotidianamente mostrándonos sistemas de referencia indistinguibles: cuando nos parece que las puertas suben en lugar de que el ascensor baja con nosotros, cuando el tren de al lado arranca suavemente en dirección contraria y por un momento no sabemos si es el nuestro el que avanza, etc. Por dar un ejemplo más físico, si lanzamos una pelota verticalmente dentro de un coche en movimiento observaremos una trayectoria rectilínea mientras que alguien en el exterior en reposo verá una trayectoria parabólica, pero todos los observadores podemos deducir la misma ley física afirmando que los cuerpos caen con una aceleración de $9'8\, ms^{-2}$.

Por otra parte la constancia de la velocidad de la luz está muy lejos de nuestra experiencia diaria. De hecho pasó muchísimo tiempo desde los primeros intentos de medir la velocidad de la luz hasta que se consiguieron mediciones con cierta precisión (véase en [**As**] una descripción de algunos de los ingeniosos métodos empleados). La palabra "estacionario" que aparece entrecomillada en el enunciado de Einstein tiene un significado más débil que el habitual ya que esencialmente "sistema de coordenadas estacionario" quiere decir en este contexto "sistema de coordenadas en el que yo mido". La constancia de la velocidad de la luz independientemente de cómo haya sido generada, se opone fuertemente a nuestra intuición. Por ejemplo, implica que nunca podemos alcanzar a un rayo de luz.

La combinación de los dos postulados, aparentemente contradictorios, tiene consecuencias realmente sorprendentes. Por otra parte, no debe sorprendernos que Lorentz y

Einstein dedujeran el mismo tipo de transformaciones partiendo de diferentes principios, porque son las que dejan la ecuación de ondas invariante (cf. §2.4.2 y §2.4.3 en [**To**]) y por tanto permiten que la velocidad de la luz sea constante. Aquí daremos un esbozo de los sencillos argumentos de Einstein para el lector interesado.

Con la terminología anterior, suponemos que medimos espacios y tiempos usando dos sistemas de referencia, (x, y, z, t) y (x', y', z', t'), el segundo con velocidad relativa $(v, 0, 0)$ con respecto al primero (que consideramos en reposo) y ejes paralelos y orígenes inicialmente coincidentes. Esto quiere decir que en el sistema en reposo el origen espacial del segundo viene dado por $O' = (vt, 0, 0)$. Si hay una varilla rígida $O'D'$ con espejos en los extremos, situada en el eje $O'X'$ entonces $D' = (d + vt, 0, 0)$ donde d es la longitud que mide el observador en reposo y que no suponemos que coincida con la medida por el otro.



Si un rayo de luz parte de O' en el tiempo $t = t' = 0$, se refleja en D' y vuelve a O', como la velocidad de la luz es constante, según el primer observador sigue la ecuación $x = ct$ a la ida y alcanzará D' en el tiempo $ct = d + vt$. Esto es, el tiempo de ida es $t_i = d/(c - v)$. Un argumento similar prueba que el tiempo de vuelta es $t_v = d/(c + v)$. Para el observador en movimiento, por simetría, el tiempo de ida del rayo de luz hasta D' es exactamente la mitad del tiempo total para ir de O' a O' reflejándose en D'. Por tanto, si t' está relacionado con las mediciones del primer observador mediante una función $t' = t'(x, t)$, se debe cumplir

$$t'(d + vt_i, t_i) = \frac{1}{2} t'(v(t_i + t_v), t_i + t_v).$$

Supongamos ahora que el tiempo en el sistema en movimiento es una función lineal[clp] del espacio y el tiempo del primero, esto es, $t' = t'(x, t) = \lambda x + \mu t$ (para la transformación de Galileo $\lambda = 0$, $\mu = 1$). Sustituyendo el valor de t_i y de t_v se tiene que $\lambda = -v\mu/c^2$, con lo cual

$$t' = \mu(-vx/c^2 + t). \tag{1.8}$$

[clp] Einstein afirma: "está claro que las ecuaciones deben ser *lineales* por las propiedades de homogeneidad que atribuimos al espacio y al tiempo". La homogeneidad, muy empleada en Física y desconcertante para los que tienen una formación matemática, simplemente indica que lo que puede ocurrir aquí puede suceder de la misma forma allí, y lo que sucedió ayer puede suceder igual hoy o mañana. Si por ejemplo t' no fuera lineal en x entonces $\partial t'/\partial x \neq$cte y el tiempo (en movimiento) transcurriría a diferentes velocidades en diferentes puntos, con lo que podríamos diseñar un experimento con diferente resultado dependiendo del sitio en el que se hiciese.

De la misma forma, si $x' = x'(x,t)$ es una función lineal, al imponer que para un rayo de luz el espacio de ida entre el tiempo de ida es c, se tiene

$$x'(d + vt_i, t_i) = c\,t'(d + vt_i, t_i).$$

Sustituyendo $t_i = d/(c - v)$ y (1.8) se obtiene fácilmente

$$x' = \mu(x - vt). \tag{1.9}$$

Con razonamientos similares ahora involucrando varillas en los ejes $O'Y'$ y $O'Z'$ se puede deducir

$$y' = \mu y\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad z' = \mu z\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

La simetría del problema sugiere $y' = y$ y $z' = z$, con lo cual $\mu = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ que junto con (1.8) y (1.9) es la transformación (1.7). En realidad, no es necesario suponer directamente $y' = y$, $z' = z$ sino que, como hizo Einstein, se pueden deducir estas igualdades de unas hipótesis físico-geométricas realmente débiles.

Dada la importancia de **[Ei1]** en la historia de la Ciencia, enumeraremos el resto de sus contenidos: Como consecuencia inmediata de las transformaciones de Lorentz se obtiene que tiempos y espacios se modifican en movimiento en un factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ y la simultaneidad es relativa (quien piense lo contrario, nunca ha discutido jugando al rescate). Se obtiene también la fórmula de adición de velocidades y en particular que c no puede alcanzarse sumando velocidades. El resto del artículo es la "Parte electrodinámica". Se dan las transformaciones ya vistas que dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell y se estudia cómo influyen en pequeñas correcciones sobre el efecto Doppler, la aberración de la luz y la presión luminosa (véase en **[Al-Fi]** una exposición moderna y sencilla). Finalmente, se aplican las ecuaciones de Maxwell al movimiento de una carga y se obtiene, como ya había hecho Lorentz, que la velocidad provoca cambios aparentes en la masa de las partículas cargadas y se afirma que lo mismo debe cumplirse para todas las partículas "porque un punto material puede transformarse en un electrón [partícula cargada (...)] mediante la adición de una carga eléctrica, *no importa cómo de pequeña*" (sic).

Aquí dejaremos a un lado las consecuencias electrodinámicas de la transformación de Lorentz y nos centraremos en las cinemáticas. Recuérdese que γ es una abreviatura para $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ y que la velocidad v y todos los movimientos y longitudes se suponen a lo largo del eje X (y X').

<u>1. La velocidad de la luz es máxima</u>: Para que γ tenga sentido debe cumplirse $|v| < c$.

Nótese que la forma correcta de entender este enunciado es que no hay ningún *observador* (sistema de referencia admisible) que pueda siquiera alcanzar la velocidad de la luz. Por ejemplo, aunque un fotón viaje a la velocidad de la luz no podemos poner un observador sobre él.

2. Contracción de la longitud: Si una varilla en movimiento tiene extremos x_1', x_2' para un observador que viaja con ella, mientras que los extremos son x_1, x_2 para otro en reposo, entonces

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt), \quad x_2' = \gamma(x_2 - vt) \quad \Rightarrow\ x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1).$$

Como $\gamma > 1$, esto quiere decir que el observador que viaja con la varilla, y por tanto la ve en reposo, percibe mayor longitud.

$$\boxed{\text{long.}_{\text{rep.}} > \text{long.}_{\text{mov.}}}$$

3. Dilatación del tiempo: Supongamos *un solo punto* en movimiento y un observador que viaja con él. Para un observador en reposo, en el intervalo de tiempo t_1, t_2 el punto habrá pasado de $x_1 = vt_1$ a $x_2 = vt_2$. Si denotamos por t_1', t_2' los tiempos correspondientes para el observador en movimiento

$$t_1' = \gamma(t_1 - v^2t_1/c^2), \quad t_2' = \gamma(t_2 - v^2t_2/c^2) \quad \Rightarrow\ \gamma(t_2' - t_1') = t_2 - t_1.$$

Lo que significa que el observador en reposo ve que un reloj que viaja con el punto en movimiento avanza más despacio de lo habitual (cada segundo dura γ segundos).

$$\boxed{t_{\text{rep.}} < t_{\text{mov.}}}$$

Aunque una partícula sufra aceleraciones, en tiempos muy pequeños se puede considerar que su velocidad es constante. De modo que

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}\, dt$$

donde τ es el tiempo, llamado tiempo propio (que redefiniremos más adelante), observado por alguien que viaja con la partícula, mientras que t es el tiempo para un observador en reposo. Si consideramos un viaje cíclico partiendo en el tiempo t_1 y volviendo al punto de partida en el tiempo t_2, se tiene

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}\, dt \ \Rightarrow\ \tau_2 - \tau_1 < t_2 - t_1 \quad (\text{si } v \neq 0).$$

Ésta es la *paradoja de los gemelos*: El gemelo que hace un viaje espacial de ida y vuelta, al regresar a la Tierra encuentra que su hermano, que ha permanecido allí, ha envejecido más. Como se ha dicho alguna vez: *si viajas no envejeces* (sobre todo si no eres prudente).

Nota importante: La contracción de la longitud y la dilatación del tiempo son fenómenos relativos: Yo veo que el reloj del observador en movimiento atrasa y se contrae y él observa el mismo efecto sobre mi reloj. Sin embargo en la paradoja de los gemelos hay un fenómeno absoluto ya que el gemelo viajero es más joven a la vuelta que su hermano según todos los observadores. La explicación de esta aparente contradicción con el principio de relatividad es que este caso involucra aceleraciones, no sistemas de referencia inerciales. Un observador puede no distinguir la velocidad del reposo, pero siempre siente aceleraciones (ahora nos estamos moviendo a $300\,000\,m/s$ con respecto al centro de la Galaxia pero una aceleración de unas pocas decenas de m/s^2 sería suficiente para hacernos perder el conocimiento e incluso, a la larga, matarnos).

4. Relatividad de la simultaneidad: Si para un observador en reposo un fenómeno físico ocurre en x_1 en el tiempo t_1 y otro en x_2 en el tiempo t_2 entonces

$t_2 - t_1 = 0 \;\Rightarrow\; t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - vx_2/c^2) - \gamma(t_1 - vx_1/c^2) = \gamma v c^{-2}(x_1 - x_2) \neq 0 \quad (\text{si } x_1 \neq x_2).$

Es decir, que fenómenos en dos puntos distintos que son simultáneos para un observador no lo son para otro.

5. Regla de adición de velocidades: Si un observador con velocidad v con respecto a otro, que consideramos en reposo, mide que una partícula tiene velocidad $dx'/dt' = w$, el observador en reposo detectará una velocidad $dx/dt = V$ que según la mecánica clásica es igual a la suma de v y w. Esto no es así en la teoría de la relatividad porque

$$w = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt} = \frac{\gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{V - v}{1 - Vv/c^2}.$$

Despejando se obtiene

$$V = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}.$$

Ésta es la llamada regla de adición de velocidades. Nótese que $V \approx v + w$ para velocidades pequeñas y que $w = c \;\Rightarrow\; V = c$, lo cual es coherente con que la velocidad de la luz sea constante para todos los observadores.

Ejemplo . Calcular a qué velocidad debe alejarse una nave espacial de $50\,m$ para que nos parezca que mide $30\,m$. Hallar qué velocidad tendría con respecto a nosotros un misil lanzado por la nave anterior a $30\,000\,km/s$.

Basta ver cuándo la contracción de Lorentz es $3/5$.

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{3}{5} \quad\Rightarrow\quad v = \frac{4}{5}c.$$

Como $30\,000\,km/s = c/10$, la velocidad detectada por nosotros sería

$$V = \frac{4c/5 + c/10}{1 + 4/50} = \frac{5}{6}c.$$

A continuación introduciremos las llamadas unidades relativistas que, además de su utilidad práctica, anticipan las ideas de Minkowski. Simplemente ajustaremos las unidades de manera que la velocidad de la luz se transforme en la constante adimensional 1

$$\boxed{c = 1.}$$

Nótese que $299\,792\,km/s = 1$ implica $299\,792\,km = 1\,s$, es decir, que las unidades de tiempo lo son ahora también de espacio y viceversa. No es tan complicado como parece, simplemente ahora los años-luz son también años. A partir de ahora, si no se indica lo contrario, las fórmulas estarán escritas con estas unidades.

Pasar una fórmula física a unidades relativistas es tan trivial como tachar todos los factores c mientras que para pasar de unidades relativistas a no relativistas se ajustan las dimensiones de cada término multiplicando por potencias adecuadas de c. Por ejemplo, si denotamos como es habitual con $[M]$, $[L]$ y $[T]$ las dimensiones de masa, espacio y tiempo, la hipotética fórmula en unidades relativistas $F = mv^2t^{-1} + mv^{-1}t^{-1}$ tiene un primer miembro con dimensión $[M \cdot LT^{-2}]$ $(F = ma)$ y las de los otros términos son $[M \cdot L^2T^{-2} \cdot T^{-1}]$ y $[M \cdot TL^{-1} \cdot T^{-1}]$, así que sobra $[LT^{-1}]$ y falta $[L^2T^{-2}]$, respectivamente. Por consiguiente, en unidades no relativistas la fórmula anterior es $F = mv^2t^{-1}c^{-1} + mv^{-1}t^{-1}c^2$.

Ejemplo . Escribir en unidades no relativistas las fórmulas para la energía y el tiempo

$$E = m \qquad \text{y} \qquad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Como la energía tiene dimensiones de fuerza por espacio, es decir $[M \cdot LT^{-2} \cdot L]$, en unidades no relativistas debemos escribir la archiconocida fórmula $E = mc^2$. Para la segunda fórmula, como t' y t tienen dimensiones de tiempo entonces vx también las debe tener y $\sqrt{1 - v^2}$ debe ser adimensional. Sin embargo las dimensiones de vx y v^2 son $[LT^{-1} \cdot L]$ y $[L^2T^{-2}]$, así que falta y sobra respectivamente $[L^{-2}T^2]$, obteniéndose la cuarta ecuación de (1.7).

Aunque Lorentz y Einstein llegaron a fórmulas similares, sus procedimientos fueron bien diferentes. Lorentz estudió con gran esfuerzo las ecuaciones de Maxwell y de allí dedujo las peculiaridades (como el crecimiento de la masa con la velocidad) que afectaban al movimiento del electrón y en general al de la materia, que consideraba formada por partículas cargadas. Einstein, sin embargo, sólo utilizó de las ecuaciones de Maxwell la constancia de la velocidad de la luz y la combinó mediante argumentos matemáticamente elementales [clp] con la cinemática de las partículas materiales para llegar a conclusiones que comprobó que eran, como deseaba, compatibles con las ecuaciones de Maxwell.

Los razonamientos de Einstein son metodológicamente criticables porque utiliza conceptos intuitivos como varillas y relojes, en un terreno donde la intuición está muy lejos de los fenómenos físicos que se estudian, Parece conveniente, por tanto, crear una maquinaria que haga de la relatividad una teoría más o menos axiomática que no tenga que recurrir a experimentos ideales en los que se apela en última instancia a nuestra intuición. Einstein se opuso inicialmente a esta idea por considerar que era una complicación innecesaria, pero acabó apoyándola fervientemente.

El artífice de esta labor fue un antiguo profesor de Einstein, H. Minkowski, que sobrevivió poco al nacimiento de la relatividad pero dio un interesante giro en la manera de concebirla. Su contribución fue crear un espacio vectorial no euclídeo, el espacio de Minkowski, en el cual las fórmulas relativistas son verdaderos teoremas geométricos en los que el tiempo se comporta como una cuarta dimensión que se combina con el resto. El hecho de que la geometría más adecuada para describir los fenómenos físicos no sea la que los científicos y filósofos habían considerado durante siglos tiene una importancia capital en la historia del pensamiento y además permite que cualquier idiota diga tonterías acerca de las dimensiones del espacio.

El comienzo de la conferencia "Espacio y tiempo" de Minkowski en 1907 (véase [**Ei-Lo-Mi-We**]) es significativo para resumir sus ideas, aunque el adjetivo "experimental" era todavía un poco exagerado (véase [**Za**] p. 204 y [**Sa**] p. 80): "*La visión del espacio y el tiempo que deseo mostrarles ha nacido del terreno de la física experimental y ahí está su fuerza. Es radical. A partir de ahora el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo, están condenados a desvanecerse en meras sombras y sólo una especie de unión de ambos conservará una realidad independiente*". Por razones de claridad y concisión, en la siguiente exposición de la relatividad especial mezclaremos la notación y términos introducidos por Minkowski con otros más modernos.

Comencemos suponiendo que un observador detecta un rayo de luz en el punto (x, y, z) en el tiempo t y que más tarde, en el tiempo $t + \Delta t$, lo detecta en $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Usando unidades relativistas

$$\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{(\Delta t)^2} = 1 \;\Rightarrow\; -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0.$$

[clp] Aunque parezca increíble, cualquiera que sepa lo que se ve (ahora) en secundaria ya está capacitado con creces para entender las Matemáticas de la parte famosa (cinemática) del artículo de Einstein.

Como la velocidad de la luz es constante, si esta ecuación se cumple para un observador se cumple para todos. Además, como Einstein ya había notado, la forma cuadrática $-t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ queda invariante bajo la transformación de Lorentz, y más adelante veremos (Proposición 1.2.3) que en algún sentido la caracteriza. Todo esto sugiere lo que Minkowski, esencialmente, llama postulado del universo absoluto: *dados dos puntos del espacio-tiempo el valor de*

$$-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

se conserva en todos los sistemas de referencia admisibles.

Nótese que para la transformación de Galileo, y por tanto para la física clásica, son las longitudes $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ y los lapsos de tiempo $|\Delta t|$ las cantidades que se conservan por separado. La nueva situación sugiere introducir un espacio en el que las distancias no son las habituales sino que combinan longitudes y tiempos. En este espacio habrá cuatro dimensiones, convencionalmente diremos que la primera corresponde al tiempo y las otras al espacio (es decir, escribiremos (t, x, y, z) en lugar de (x, y, z, t) como habíamos hecho hasta ahora). Normalmente reservaremos los subíndices $1, 2, 3$ para las últimas coordenadas y 0 para la primera.

DEFINICIÓN: *Se llama espacio de Minkowski, $\mathcal{M}$, a $\mathbb{R}^4$ dotado con el producto escalar de Minkowski que para los vectores $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ se define como*

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

A la cantidad $(|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|)^{1/2}$ se le llama norma de $\vec{a}$ y se representa con $||\vec{a}||$.

Nota: Obsérvese que $\langle \, , \, \rangle$ no es un producto escalar en sentido estricto porque no es definido positivo (ni tampoco la norma es una verdadera norma). En algunos textos se habla de *pseudo* producto escalar y en otros, como aquí, se extiende la definición (vamos, que se hace la vista gorda para no introducir más notación).

Aunque tiempos y longitudes se combinen, es posible distinguir vectores como $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$ que representan un intervalo de tiempo unidad y una longitud unidad, respectivamente, por el signo de su producto escalar consigo mismo.

DEFINICIÓN: *Sea $\vec{x} \in \mathcal{M}$. Se dice que $\vec{x}$ es temporal o de género tiempo si $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$, se dice que es espacial o de género espacio si $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ y se dice que es nulo o de género luz si $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$.*

Todos los términos físicos pueden ser ahora interpretados en $\mathcal{M}$ con el lenguaje del álgebra lineal. Por ejemplo, la posición de una partícula en un tiempo dado se puede representar por un punto, que habitualmente se llama suceso, de $\mathcal{M}$ considerado como espacio afín, y los sistemas de de referencia físicos se pueden representar en $\mathcal{M}$ por medio de cuatro vectores ortogonales, uno temporal y tres espaciales; y la velocidad relativa de un sistema de referencia es $\vec{v}$ si el vector (t, v_1t, v_2t, v_3t) no tiene componentes espaciales al expresarlo en el sistema en movimiento. Todo esto está recogido en la siguiente definición.

DEFINICIÓN: *Diremos que* $\mathcal{S} = \{\vec{e_0}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ *es un* <u>*sistema de referencia admisible*</u> *si se cumplen las condiciones:*

i) $\vec{e_0}$ es un vector temporal y $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ son vectores espaciales.

ii) Todos ellos tienen norma uno.

iii) Son ortogonales con el producto escalar de Minkowski.

Dado otro sistema de referencia admisible $\mathcal{S}' = \{\vec{e_0}', \vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$*, se dice que la* <u>*velocidad relativa*</u> *de $\mathcal{S}'$ con respecto de $\mathcal{S}$ es $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ si $\vec{e_0} + v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}$ es proporcional a $\vec{e_0}'$.*

Distinguiremos dos tipos de vectores según apunten en la dirección del tiempo o en la opuesta. Esto es, según si la primera coordenada es positiva o negativa.

DEFINICIÓN: *Decimos que $\vec{x} \in \mathcal{M}$ es un vector* <u>*futuro*</u> *cuando usamos el sistema de referencia $\mathcal{S} = \{\vec{e_0}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ si $\langle \vec{x}, \vec{e_0} \rangle < 0$ y que es un vector* <u>*pasado*</u> *si $\langle \vec{x}, \vec{e_0} \rangle > 0$.*

Como las partículas materiales viajan a velocidades menores que la de la luz, los incrementos de espacio y tiempo durante su movimiento formarán un vector temporal que podemos normalizar. Por tanto la trayectoria de una partícula puede representarse como una curva parametrizada por "longitud de arco" que supondremos recorrida en la dirección positiva del tiempo[uff].

DEFINICIÓN: (Provisional) *Se llama* <u>*línea de universo*</u> *a una curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\tau)$ en $\mathcal{M}$ parametrizada de modo que $\vec{\alpha}'(\tau)$ es un vector futuro, temporal de norma uno. Al parámetro τ se le llama* <u>*tiempo propio*</u>.

Esta notación difiere de la introducida en muchos textos (compárese con [**ON**]) en los que la línea de universo es la imagen de α y no se especifica cierta parametrización. Más adelante haremos una extensión para englobar también a las partículas de luz, los fotones. El nombre de tiempo propio se ajusta al concepto antes mencionado de tiempo medido por un observador que viaja con la partícula, ya que si $\vec{\alpha}(\tau) = \big(t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)\big)$ entonces

$$||\vec{\alpha}'(\tau)|| = 1 \;\Rightarrow\; -1 = -\Big(\frac{dt}{d\tau}\Big)^2 + \Big(\frac{dx}{d\tau}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{d\tau}\Big)^2 + \Big(\frac{dz}{d\tau}\Big)^2 \;\Rightarrow\; d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Consecuentemente, si no hay cambio infinitesimal en el espacio (si el observador viaja momentáneamente con la partícula) entonces $d\tau^2 = dt^2$ y como $\vec{\alpha}'$ es futuro, $d\tau = dt$.

[uff] Esto es decir simplemente que la curva $\vec{\alpha}(\tau)$ tiene el mismo dibujo que $\vec{\alpha}(C\tau)$, así que ajustamos en cada punto la C y su signo para que $||\alpha'(\tau)||$=1 y la primera coordenada de α' sea positiva.

Recuérdese que por definición una isometría es una función que preserva el producto escalar, $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle$, y por tanto en $\mathcal{M}$ las isometrías aplican sistemas de referencia admisibles en sistemas de referencia admisibles. Como $\mathcal{M}$ es un espacio vectorial, parece natural considerar sólo isometrías lineales. Podríamos demostrar que de hecho son las únicas, pero ya el principio de relatividad nos sugiere que sólo las isometrías lineales tienen relevancia física porque otras podrían transformar trayectorias rectilíneas para un observador en curvas para otro, con las consiguientes aceleraciones centrífugas. En general dos sistemas de referencia admisibles determinan una isometría que manda uno al otro (digamos que el origen de coordenadas permanece fijo) y las isometrías no son más que una generalización de las transformaciones de Lorentz.

DEFINICIÓN: *Se llama* <u>*transformación de Lorentz generalizada*</u> *a cualquier isometría en* $\mathcal{M}$ *de la forma* $f(\vec{x}) = J\vec{x}$ *con* $J \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Es posible caracterizar fácilmente todos los posibles cambios de sistema de referencia.

Lema 1.2.2 : *Sean las matrices*

$$J = \begin{pmatrix} J_{00} & J_{01} & J_{02} & J_{03} \\ J_{10} & J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{20} & J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{30} & J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \quad y \quad J^{\dagger} = \begin{pmatrix} J_{00} & -J_{10} & -J_{20} & -J_{30} \\ -J_{01} & J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ -J_{02} & J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ -J_{03} & J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix},$$

entonces J *es la matriz de una transformación de Lorentz generalizada si y sólo si* $J^{\dagger}\cdot J = I$ *(donde* I *es la matriz identidad* 4×4*).*

<u>DEM.</u>: Ser transformación de Lorentz generalizada equivale a $J^t\eta J = \eta$ donde η es la matriz diagonal con $-\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$. Esto puede escribirse como $(\eta^{-1}J^t\eta)J = I$ y la matriz entre paréntesis es $J^{\dagger}$. ∎

Nótese que si $J_{0i} = J_{i0} = 0$, $i = 1, 2, 3$ entonces $J_{00} = \pm 1$ y el bloque 3×3 inferior derecho de J, $(J_{ij})_{i,j=0}^{3}$, es una matriz ortogonal entonces J corresponde a una transformación de Lorentz generalizada. El efecto de una tal J, digamos para simplificar con $J_{00} = 1$, es dejar invariante el tiempo y aplicar un movimiento en $\mathbb{R}^3$ a los ejes espaciales, por ello diremos que las transformaciones como la descrita son <u>giros y simetrías espaciales</u>. Resulta que tras orientar adecuadamente los ejes espaciales con giros o simetrías la única isometría posible es esencialmente la dada por (1.7). Con esto habremos deducido teóricamente (sin necesidad de los experimentos imaginarios de Einstein) las ecuaciones de la transformación de Lorentz y que ésta es, en cierto sentido, la única posible para cambiar de sistema de referencia.

Proposición 1.2.3 : *Dados dos sistemas de referencia admisibles siempre es posible aplicar previamente giros y simetrías espaciales sobre ellos de manera que la transformación* *de Lorentz generalizada pasando de uno al otro sea* (1.7) *o su negativa.*

<u>DEM.</u>: Primero, usando giros adecuados podemos conseguir que las tres últimas coordenadas del primer vector espacial de cada uno de los sistemas de referencia sean vectores paralelos (en $\mathbb{R}^3$) y por tanto $J_{21} = J_{31} = 0$. Además podemos suponer también que son paralelos a la velocidad y por tanto $J_{01} = -vJ_{11}$, $J_{20} = J_{30} = 0$. Con giros cuyo eje sea (las tres últimas coordenadas de) el primer vector podemos conseguir que el segundo vector se aplique en otro con última coordenada nula**uff**, así pues $J_{32} = 0$. Recapitulando tenemos que tras algunos giros espaciales sobre los sistemas de referencia, la isometría pasando de uno al otro es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$$

donde O es la matriz nula 2×2 y

$$A = \begin{pmatrix} J_{00} & J_{01} \\ -vJ_{11} & J_{11} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} J_{02} & J_{03} \\ J_{12} & J_{13} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} J_{22} & J_{23} \\ 0 & J_{33} \end{pmatrix}.$$

Con una extensión obvia de la notación, la condición $J^\dagger \cdot J = I$ se puede escribir como

$$A^\dagger A = I, \qquad A^\dagger B = O, \qquad D^t D = I.$$

La tercera ecuación implica $J_{22} = J_{33} = \pm 1$, la segunda $B = O$ (porque $A^\dagger$ es no singular, en otro caso J también lo sería) y la primera, después de algunos cálculos,

$$J_{00} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad J_{01} = -vJ_{00}, \qquad J_{11} = J_{00}.$$

Con lo cual, quizá tras aplicar una simetría para ajusta el signo de J_{22} y J_{33} se obtiene (1.7) o la misma transformación cambiada de signo. ■

Esencialmente, todo lo que hemos hecho es orientar los ejes espaciales para que baste aplicar un giro en el eje temporal que corresponde, en un sentido en el que no entraremos, a la transformación de Lorentz. También se puede probar ([**Li-Pr-Pr-Te**] p. 153) que componiendo a lo más cuatro veces la transformación de Lorentz, con las variables espaciales orientadas adecuadamente, se puede obtener cualquier transformación de Lorentz generalizada.

uff Hasta aquí no son más que razonamientos en $\mathbb{R}^3$. Si uno no los entiende puede creérselos y seguir leyendo, pero que conste que lo único que dice la receta es: Orienta los ejes X y X' en la dirección de la velocidad y gira Y hasta que sea perpendicular a Z'.

Aunque todo esto resulte mucho más complejo y menos intuitivo que los razonamientos originales de Einstein (de ahí su inicial rechazo a las ideas de Minkowski) existe una gran ventaja teórica y es que a partir de primeros principios (la estructura del espacio $\mathcal{M}$) podemos derivar sin alusiones externas la transformación de Lorentz, que en $\mathcal{M}$ no es más que un endomorfismo e isometría que tiene como matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{1.10}$$

Además, que Λ sea la "única" transformación que deja invariante $\langle\, ,\, \rangle$ nos da una razón muy poderosa en favor del "postulado del universo absoluto" (que esencialmente dice que el tiempo propio es absoluto).

Al igual que la cinemática clásica más elemental está basada en razonamientos con masas velocidades y momentos, traspasando estos conceptos a $\mathcal{M}$ se obtiene la base de la cinemática relativista.

DEFINICIÓN: *Una <u>partícula material</u> es una línea de universo, $\vec{\alpha}$, y un número positivo m llamado <u>masa</u>. Al vector $\vec{U} = \vec{\alpha}'$ se le llama <u>cuadrivelocidad</u> y al vector $\vec{P} = m\vec{U}$, <u>cuadrimomento</u>.*

Nótese que es natural sustituir en la Física relativista la derivada con respecto al tiempo de la Física clásica por otra con respecto al tiempo propio, porque el primero no tiene significado absoluto, depende del observador.

Si una partícula se mueve con velocidad constante $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces verifica $(x, y, z) = \vec{v}\,t$ y su línea de universo debe ser $\vec{\alpha}(\tau) = \big(t(\tau), \vec{v}\,t(\tau)\big)$, y para que se cumpla que $\vec{\alpha}'$ es futuro se norma uno se tiene que $dt/d\tau = (1-v^2)^{-1/2}$ con $v = ||\vec{v}||$. Por consiguiente

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1, v_1, v_2, v_3), \qquad \vec{P} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}(1, v_1, v_2, v_3).$$

La velocidad y momento clásicos coinciden con las tres últimas coordenadas de sus correspondientes cuatridimensionales divididas entre la primera.

Veamos algunos ejemplos de lo poderosa y útil que es la formulación de Minkowski:

<u>Ejemplo</u> . Explicar con la terminología introducida la regla de adición de velocidades y la paradoja de los gemelos.

La matriz Λ de (1.10) pasa de coordenadas para un observador en reposo a otras para un observador en movimiento con velocidad $(v, 0, 0)$. Si éste último detecta una partícula con cuadrivelocidad $\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}(1, w, 0, 0)$, para el primero tendrá cuadrivelocidad

$$\Lambda^{-1}\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-w^2}}(1+vw, v+w, 0, 0)$$

y por tanto la velocidad clásica asociada es $(v+w)/(1+vw)$, lo cual prueba de forma elegante la regla de adición de velocidades. La paradoja de los gemelos se deduce de que para toda partícula material obviamente $1 = ||\vec{\alpha}'(\tau)|| \le dt/d\tau$, por lo cual $\tau_2 - \tau_1 \le t_2 - t_1$.

Hay un último ejemplo con interés especial. Para comprenderlo hay que recordar que en la cinemática clásica se cumple la conservación del momento (lineal). Por ejemplo, si una bola de billar choca con otras dos entonces el momento de la primera antes del choque coincide con la suma de momentos de las tres después del choque. No hay nada extraño en ello, está intuitivamente claro que si una masa pequeña impulsa a otra mayor su velocidad disminuye, lo vemos todos los días dentro del autobús. Esta ley tiene una importancia tan fundamental en Física que sería un gran desastre si no se cumpliera un análogo en relatividad. La generalización obvia es que el cuadrimomento se conserva. En términos de colisiones esto quiere decir que

$$\sum \vec{P}(\text{antes de la colisión}) = \sum \vec{P}(\text{después de la colisión}) \tag{1.11}$$

La conservación del cuadrimomento es independiente de los razonamientos anteriores y podemos decir que es experimental, o más bien básica porque tiene una motivación teórica tan grande que ya está parcialmente implícita en **[Lo]** y **[Ei1]** aunque ni siquiera había sido definido el cuadrimomento.

Las tres últimas coordenadas de $\vec{P}$ son una pequeña corrección sobre el momento clásico (en unidades relativistas, v es típicamente muy pequeña) llamada <u>3−momento</u> y que denotaremos con $\vec{p}$. La primera coordenada de $\vec{P}$ se llama <u>energía</u> y la denotaremos con E. Es decir, para una partícula con velocidad constante $\vec{v}$, $v = ||\vec{v}||$,

$$\vec{P} = (E, \vec{p}) \qquad \text{con } E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

De aquí se deduce trivialmente

$$E = \sqrt{m^2 + ||\vec{p}||^2}$$

que en unidades no relativistas es

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + ||\vec{p}||^2}$$

y para $\vec{v} = \vec{0}$ conduce a quizá la fórmula más famosa de la Ciencia:

$$E = mc^2.$$

La palabra *energía* es simple notación pero bien escogida, porque como en el caso de la energía cinética de la Física clásica se cumple $dE = \vec{v} \cdot d\vec{p}$. Para algunos observadores parte de E puede transformarse en $\vec{p}$ lo que coincide con nuestra idea intuitiva de que la energía es lo que puede hacer que los objetos se muevan. Nótese que en primera aproximación $E \approx m + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$ así que salvo una constante se tiene algo muy cercano a la fórmula clásica $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. La verdadera novedad es que cuando $v \to 1^-$ (la velocidad de la luz) la fórmula es bien diferente y el $3-$momento se comporta con respecto al clásico como si la masa aumentase un factor $(1-v^2)^{-1/2}$ o, lo que es lo mismo, como si la velocidad causase inercia (resistencia al movimiento, éste es casi el título del trabajo de Einstein en que introduce $E = mc^2$. Véase [**Ei-Lo-Mi-We**]). Por ello muchos textos llaman a $m/\sqrt{1-v^2}$ <u>masa en movimiento</u> y a m <u>masa en reposo</u>. La existencia de energía incluso para $v = 0$ sugiere que si por un extraño choque una partícula en reposo de masa m perdiera toda su masa, podría comunicar la energía $E = mc^2$ para aumentar la velocidad de otra partícula. Esta y otras consecuencias se comprueban todos los días en los aceleradores de partículas y son básicas para entender los fenómenos radiactivos.

Según hemos visto, en la Física relativista no puede haber partículas materiales que viajen a la velocidad de la luz y la propia luz no es más que una solución de las ecuaciones de Maxwell que se puede probar que transporta continuamente momento y energía. Sin embargo los rudimentos de la Física cuántica introducidos por M. Planck y Einstein sugieren que la luz aparece en forma de paquetes de energía sin masa. Einstein llamó a esta especie de "partículas de luz" <u>fotones</u> y según la fórmula de Planck la energía de cada uno de ellos es

$$E = h\nu$$

donde $h = 6'6256 \cdot 10^{-34} Js^{-1}$ es la constante de Planck y ν es la frecuencia (de la luz). Resulta que muchas reacciones subatómicas involucran la radiación de una partícula sin masa como el fotón (o el neutrino) por lo cual es muy interesante para estudiar estas reacciones definir el cuadrimomento del fotón. Según el segundo postulado de la relatividad, no hay ningún sistema de referencia en el cual un fotón esté en reposo, así que no se puede normalizar el vector tangente del análogo de la línea de universo $\vec{\alpha}$ de un fotón ya que $||\vec{\alpha}'|| = 0$. Es decir, *para los fotones no tiene sentido hablar del tiempo propio.* No podemos conservar la definición original de cuadrimomento para partículas libres porque $v = 1$ y no hay masa. Pero si queremos que $\vec{p}$ indique la dirección de movimiento y que $\vec{P}$ sea, como para las partículas materiales, tangente a la trayectoria, $\vec{P}$ debe ser un vector de género luz, esto es, $E^2 - ||\vec{p}||^2 = 0$ (que combinado con $E = \sqrt{m^2 + ||\vec{p}||^2}$ lleva a decir que la masa del fotón es cero) y se debe tener

$$\vec{P} = (E, E\,\vec{t}) \qquad \text{con} \quad E = h\nu$$

donde $\vec{t}$ es un vector unitario (tridimensional) en la dirección del movimiento. Como aplicación y ejemplo, analicemos el llamado *efecto Compton.*

Ejemplo (Efecto Compton). Estudiar el cambio de frecuencia de un fotón tras una colisión que se produce en un plano con un electrón en reposo.

Digamos que la colisión se produce en el plano XY, entonces (1.11) implica

$$\vec{P}_{\text{fot.1}} + \vec{P}_{\text{ele.1}} = \vec{P}_{\text{fot.2}} + \vec{P}_{\text{ele.2}}$$

con

$$\vec{P}_{\text{fot.1}} = (h\nu, h\nu, 0, 0), \qquad \vec{P}_{\text{ele.1}} = (m, 0, 0, 0)$$

$$\vec{P}_{\text{fot.2}} = (h\widetilde{\nu}, h\widetilde{\nu}\cos\alpha, h\widetilde{\nu}\operatorname{sen}\alpha, 0), \qquad \vec{P}_{\text{ele.2}} = (\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{mv\cos\beta}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{mv\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1-v^2}}, 0).$$

donde m es la masa en reposo del electrón y α y β son, respectivamente, los ángulos en que salen desviados el fotón y el electrón, éste con velocidad v, después de la colisión. Despejando se puede deducir

$$\widetilde{\nu} = \frac{\nu}{1 + h\nu(1-\cos\alpha)/m}.$$

Es decir, que si un fotón choca contra un electrón desviándose, pierde parte de su frecuencia. En unidades no relativistas la masa del electrón, m, debe sustituirse por mc^2. Por ello es imposible detectar este fenómeno macroscópicamente viendo, por ejemplo, que cuando la luz se refleja en un objeto vuelve más rojiza.

Problemas 1.2

→**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si se cumple el principio de relatividad, ¿por qué hay diferencias en nuestras sensaciones entre $100\,km/h$ en moto y en coche? ¿Por qué pasamos más miedo en un parque de atracciones de los de ahora (rara vez se superan una decenas de km/h) que en un tren de alta velocidad?

ii) Criticar el siguiente razonamiento: El principio de relatividad implica que ni Galileo ni la Iglesia estaban equivocados. Simplemente el modelo de Copérnico defendido por Galileo y mejorado por Kepler describe los movimientos de forma más sencilla.

iii) ¿Cuántos metros mide una hora? Hallar la distancia a la Luna en segundos ($384\,000\,km$), al Sol en minutos (150 millones de kilómetros) y a la nebulosa de Andrómeda en años ($1'76 \cdot 10^{22} m$).

iv) ¿Por qué con nuestras escalas la simultaneidad nos parece absoluta?

v) Teniendo en cuenta que la simultaneidad es relativa, ¿pueden, para algún observador, dos coches a velocidades relativistas empezar a abollarse antes de chocar uno contra otro?

vi) Si enfoco una linterna en perpendicular a los cables de un tendido eléctrico y después giro la linterna 90^{o} hasta que sea paralela a los cables, la parte iluminada recorre "infinito" espacio en un tiempo finito. ¿No contradice esto la relatividad?

vii) Si el tiempo en reposo es menor que el tiempo en movimiento, ¿no debería volver el gemelo viajero más viejo?

viii) Si los dos gemelos salen de un mismo punto de la Tierra siguiendo sendas trayectorias circulares perfectamente simétricas para reunirse de nuevo en el punto inicial, cada uno de ellos puede decir que llegará antes que el otro porque el reloj de su hermano atrasa por estar en movimiento. ¿Cómo es posible?

ix) ¿Por qué en la definición de línea de universo se pide que $\vec{\alpha}'$ sea temporal?

x) ¿Forman un grupo abeliano las transformaciones de Lorentz generalizadas?

xi) ¿Es posible que en el efecto Compton un electrón en reposo absorba completamente un fotón?

$\rightarrow$**2)** Despejar en la transformación de Lorentz x, y, z y t en función de x', y', z' y t' explicando el significado físico del resultado.

3) Dada una dirección de movimiento a veces se escribe $\vec{u}_\parallel$ para indicar la proyección de $\vec{u}$ en esa dirección y $\vec{u}_\perp$ para la proyección en el plano perpendicular. Comprobar que con esta notación y usando unidades relativistas el cambio de sistema de referencia de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se puede escribir simplemente como

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel, \qquad \vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}_\perp)$$

$$\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel, \qquad \vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \vec{v}\times\vec{E}_\perp)$$

con $\gamma = \sqrt{1-v^2}$.

$\rightarrow$**4)** Comprobar que $\vec{E}\cdot\vec{B}$, $||\vec{E}||^2 - c^2||\vec{B}||^2$ y $(||\vec{E}||^2 + c^2||\vec{B}||^2)^2 - 4c^2|\vec{E}\times\vec{B}|^2$ son invariantes por la transformación de Lorentz.

5) Completar la prueba de la invariancia de las ecuaciones de Maxwell comprobando que $c_3 = 0$.

$\rightarrow$**6)** Comprobar que si una función $u = u(x,t)$ satisface la ecuación de ondas

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

entonces al cambiar las variables por la transformación de Lorentz se sigue cumpliendo

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = 0.$$

Discutir la relación de este hecho con la constancia de la velocidad de la luz.

→**7)** Demostrar que tomando $G = (-c, c)$ y como operación la regla de adición de velocidades $v \oplus w = (v+w)/(1+vw/c^2)$ se tiene que $(G, \oplus)$ es un grupo abeliano. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} (v \oplus v \oplus \overset{n\text{veces}}{\cdots\cdots} \oplus v)$$

para $v > 0$ (probando primero su existencia) y explicar el resultado.

8) Con los razonamientos originales de Einstein (varillas y rayos de luz) probar que

$$y' = \mu y\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad z' = \mu z\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

→**9)** Sea $\Lambda(v)$ la matriz correspondiente a la transformación de Lorentz con velocidad v. Demostrar que con la notación del problema anterior se cumple

$$\Lambda(v) \cdot \Lambda(w) = \Lambda(v \oplus w)$$

y explicar el significado de ésta fórmula.

→**10)** Einstein afirma en **[Ei1]** que si queremos componer velocidades v y w que no están en la misma dirección sino que forman un ángulo α, la fórmula correcta es, en módulo, en vez de $V = (v + w)/(1 + vwc^{-2})$,

$$V = \frac{\sqrt{v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha - v^2w^2c^{-2}\operatorname{sen}^2\alpha}}{1 + vwc^{-2}\cos\alpha}.$$

Probar esta fórmula y deducir que si representamos las velocidades vectorialmente se tiene, usando unidades relativistas,

$$V = \frac{\sqrt{|\vec{v} + \vec{w}|^2 - |\vec{v} \times \vec{w}|^2}}{1 + \vec{v} \cdot \vec{w}}.$$

→**11)** Hallar todas las posibles transformaciones lineales

$$\begin{aligned} t' &= at + bx \\ x' &= ct + dx \end{aligned}$$

de manera que $-t'^2 + x'^2 = -t^2 + x^2$ y $x' = 0$ cuando $x = vt$. Explicar el significado del resultado.

12) Suponiendo que hacemos un viaje de ida y vuelta a la Luna en línea recta, manteniendo la velocidad constante (en módulo). Calcular a qué velocidad deberíamos ir para volver $1s$ más jóvenes que el resto de los terrestres.

→**13)** Si la nave *Nostromo* mide 100 metros pero nos parece que mide 50, hallar a qué velocidad se aleja de nosotros. Si un tripulante en el centro de la nave ve que dos compuertas, una en cada extremo, se abren simultáneamente; calcular con qué diferencia de tiempo lo harán para nosotros.

→**14)** Un cohete de $60\,m$ de longitud en reposo se aleja de la Tierra con velocidad constante. Dicho cohete tiene dos espejos situados uno en cada extremo. Se envía una señal luminosa desde la Tierra y se refleja en ellos. Sabiendo que el primer reflejo se recibe $200\,s$ tras de su emisión y el otro $1'74 \cdot 10^{-6}s$ después, hallar la velocidad a la que se mueve el cohete.

15) Si $\alpha = \alpha(\tau)$ es una línea de universo, demostrar que la *cuadriaceleración* $\alpha''(\tau)$ y la cuadrivelocidad son ortogonales en el espacio de Minkowski. Deducir que no existe el análogo relativista del potencial de un campo de fuerzas. Esto es, que no puede existir $V = V(t, x, y, z)$ no constante tal que

$$m\,\alpha''(\tau) = \Big(-\frac{\partial V}{\partial t}(\alpha(\tau)), \frac{\partial V}{\partial x}(\alpha(\tau)), \frac{\partial V}{\partial y}(\alpha(\tau)), \frac{\partial V}{\partial z}(\alpha(\tau)) \Big).$$

→**16)** Supongamos que el vector que determinan dos sucesos en el espacio de Minkowski es espacial. Demostrar que en algún sistema de referencia ambos sucesos son simultáneos pero en ninguno suceden en el mismo punto espacial. (*Indicación*: Si el vector es $\vec{a} = (t, x, y, z)$, reducir el problema al caso $y = z = 0$ mediante un giro espacial, y después aplicar la transformación de Lorentz con velocidad adecuada).

17) Dados $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{M}$ con $\vec{a}$ temporal, demostrar que existe un sistema de referencia admisible en el que las tres últimas coordenadas de $\vec{a}$ y las dos últimas de $\vec{b}$ son simultáneamente nulas. (*Indicación*: Proceder con $\vec{a}$ como en el problema anterior y aplicar finalmente un giro espacial adecuado).

18) Probar que si $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{M}$ son futuros y temporales entonces

$$i)\ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \geq \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle, \qquad ii)\ ||\vec{a} + \vec{b}|| \geq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||.$$

19) Comprobar que $E = \sqrt{m^2 + ||\vec{p}||^2}$ en unidades no relativistas se escribe como $E = c\sqrt{m^2c^2 + ||\vec{p}||^2}$.

→**20)** Una partícula en reposo de masa m se desintegra espontáneamente en dos partículas (no necesariamente en reposo) de masas m_1 y m_2. Demostrar que la conservación del cuadrimomento implica $m_1 + m_2 \leq m$. Si $m = 1\,kg$, $m_1 = 0'499\,kg$ y $m_2 = 0'498\,kg$, calcular las velocidades de las nuevas partículas. Si la energía correspondiente a los tres gramos de masa que se han "perdido" se utilizase íntegramente para alimentar una bombilla de $60\,W$ de potencia, hallar cuántos años estaría luciendo. (Nota: Recuérdese que la potencia es el incremento de energía por unidad de tiempo).

21) Una partícula de masa m_1 y velocidad v_1, choca con otra en reposo de masa m_2 para formar una nueva partícula de masa m y velocidad v. Hallar m y v en función de m_1, m_2 y v.

22) Realizar los cálculos que llevan de la conservación del cuadrimomento a la fórmula para el efecto Compton.

$\rightarrow$**23)** Una partícula que viaja a lo largo del eje X a la mitad de la velocidad de la luz choca con otra en reposo que tiene la misma masa. Sabiendo que después del choque las dos partículas conservan su masa y siguen trayectorias simétricas con respecto al eje X, calcular la velocidad de cada una de ellas y el ángulo entre sus trayectorias.

Historias en titulares:

The Time

H.A. Lorentz se lamenta de no haber ido más lejos con su teoría y señala que Einstein postula lo que él deducía con dificultad y no satisfactoriamente de las ecuaciones de Maxwell. También dice que la causa principal de su fracaso fue creer que el tiempo t' en sus transformaciones no es más que una cantidad matemática auxiliar y no verdadero tiempo. En los ámbitos científicos, a veces se habla de la teoría de Lorentz-Einstein para referirse a la relatividad.

1909

Chalk-it-up

Einstein empieza ha tener reticencias acerca del giro abstracto que está tomando su teoría de la relatividad y ha dicho cosas como que "Desde que los matemáticos han invadido la teoría de la relatividad ni yo mismo la entiendo", y en cierto paso en una conferencia ha afirmado "Esto ha sido hecho elegantemente por Minkowski, pero la tiza es más barata que la materia gris y lo haremos tal como viene".

Tras 1905

La Gaceta Indiscreta

La nueva formulación de H. Minkowski de la teoría de la relatividad no cuenta con el apoyo de su antiguo alumno Einstein. Minkowski no se limita a explicar las ventajas de su trabajo, sino que señala las limitaciones matemáticas de Einstein y que aunque fuera uno de sus mejores alumnos en Zurich, las Matemáticas allí no eran especialmente fuertes.

1908

La Reoca

El profesor W. Kaufmann ha estudiado experimentalmente el crecimiento con la velocidad de la energía y el momento de los electrones. Los últimos resultados, contrastados por M. Planck, le han permitido concluir, según sus palabras, que "las mediciones son incompatibles con el postulado de Lorentz-Einstein" y apoyan la teoría de M. Abraham. Mientras Lorentz está dispuesto a abandonar y Poincaré se muestra expectante, Einstein afirma, contra el experimento, que la teoría de Abraham tiene pocas posibilidades.

1907

La Nation

En 1898, H. Poincaré escribía cosas tan relativistas como que "No tenemos intuición directa sobre la igualdad de dos intervalos de tiempo. Quienes creen tener esta intuición, son víctimas de una ilusión". Einstein afirma haber trabajado independientemente sin conocer investigaciones anteriores, pero hay unos pocos que dicen que la relatividad especial es obra de Poincaré quien varias veces ha sido propuesto para el premio Nobel de Física, este año con grandes avales pero de nuevo sin éxito.

1912

Quantum lips

Algunos afirman que la relatividad de la simultaneidad o la paradoja de los gemelos raya en la comedia, pero el profesor Schrödinger nos quiere tranquilizar a todos diciéndonos que no las podemos comprender porque las discutidas paradojas de la relatividad son difíciles de explicar al que no es matemático, mientras que estos últimos están capacitados para ello.

1950

¿Qué hay que saberse?:

Todo. Bueno casi todo, las fórmulas mediante las que se transforman las ecuaciones de Maxwell no serán relevantes en este curso. La deducción de Einstein de las transformaciones de Lorentz está un poco anticuada, aunque quizá resulte más comprensible para muchos que los razonamientos en el espacio de Minkowski. Lo que hay que señalar con el rotulador verde fluorescente es:

• La transformación de Lorentz es

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Además de dejar invariante en algún sentido las ecuaciones de Maxwell implica que las longitudes se contraen en movimiento, el tiempo se dilata, la simultaneidad es relativa y las velocidades no se suman.

• Si uno se inventa en $\mathbb{R}^4$ el producto escalar

$$\langle (a_0, a_1, a_2, a_3), (b_0, b_1, b_2, b_3) \rangle = -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

entonces las transformaciones de Lorentz son esencialmente los endomorfismos que lo dejan invariante. Éste es el espacio de Minkowski.

• La trayectoria de una partícula se puede representar mediante una curva en el espacio de Minkowski, su línea de universo, que se suele parametrizar por el tiempo propio que mide un observador que viaje con ella. La cuadrivelocidad es la derivada y el cuadrimomento la masa por la cuadrivelocidad.

• El cuadrimomento se conserva en las colisiones.

• Las trayectorias de los fotones no se pueden escribir en función del tiempo propio porque no hay ningún observador que los alcance, pero hay una forma de definir su cuadrimomento que sigue siendo válida para estudiar colisiones.

¿Para qué sirve?:

Para nada práctico. Es decir, la relatividad especial no ha servido hasta ahora para construir aparatos que sean útiles en la vida cotidiana o en aplicaciones médicas o técnicas. En este sentido es bien diferente de su casi coetánea (y muchísimo más compleja y todavía no bien entendida) revolución científica: la Física cuántica, que permite que se hagan *scanners* perfectos o microscopios de efecto túnel con precisión increíble.

Para la Ciencia, la relatividad especial sirve, y mucho, para entender cómo se comporta el mundo físico aunque sea en situaciones límite que casi sólo podemos ver en los aceleradores de partículas. Que el tiempo y el espacio sean relativos es algo tan básico que merece la pena saberlo: igual que sabemos que hay átomos aunque no nos topemos con ellos por la calle (bueno, en realidad sí).

Dentro de la Filosofía, si atendemos a B. Russell la relatividad especial no tiene la relevancia (¿utilidad?) a favor o en contra de I. Kant que algunos han indicado, pero quizá otros filósofos opinen lo contrario. También es indudable que las ideas revolucionarias de la relatividad no han pasado inadvertidas al gran público y casi todo el mundo sabe que "todo es relativo" y que "$E=mc^2$", y Einstein comparte el olimpo de los forros de carpeta con Ernesto Guevara y con efímeros *sex-symbols*.

2. Geometría en espacios curvados

2.1. Tensores, métricas y variedades

En cursos anteriores se ha estudiado el Álgebra Lineal de una variable vectorial, pero nada impide considerar dos, tres o más variables; lo cual lleva directamente a la noción de tensor. Antes de dar la definición precisa, veamos algunos ejemplos que la motivan.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Los libros dicen que cualquiera de estos espacios es isomorfo a algún $\mathbb{R}^m$, así que para fijar ideas podemos suponer que de hecho $V = \mathbb{R}^m$. Todas las aplicaciones lineales $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ son de la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m.$$

Es decir, cada una de ellas está determinada por una matriz de coeficientes $1 \times m$ o lo que es lo mismo un vector horizontal $(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Recuérdese que al conjunto de estas aplicaciones lineales se le llama <u>espacio dual</u> y se denota con V^*. Como es sólo una cuestión estética escribir vectores en vertical o en horizontal (de hecho por razones tipográficas pocas veces se escriben en vertical), V y V^* son lo mismo; o dicho matemáticamente, isomorfos. Recuérdese que, de hecho, a una base de V, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$, se le puede asignar una base de V^*, llamada la <u>base dual</u>, $\{\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_m\}$, de manera que $\widetilde{\varphi}_i(\vec{e}_j) = 0$ si $i \neq j$ y $\widetilde{\varphi}_i(\vec{e}_i) = 1$.

Consideremos ahora una aplicación bilineal, esto es, lineal en dos variables:

$$\begin{aligned} &a1)\ f(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) \qquad && b1)\ f(\vec{x} + \vec{x}\,', \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}\,', \vec{y}) \\ &a2)\ f(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) && b2)\ f(\vec{x}, \vec{y} + \vec{y}\,') = f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}, \vec{y}\,') \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que todas las funciones bilineales de $V \times V$ en $\mathbb{R}$ son de la forma

$$f\big((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)\big) = (x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Si ahora considerásemos una aplicación *trilineal* necesitaríamos una matriz tridimensional para colocar los vectores. Claramente tendríamos problemas para representarla, los cuales se harían insalvables en dimensiones superiores. Pero lo bueno de la abstracción matemática es que uno puede definir objetos son necesidad de dibujarlos ni de que existan, y nadie protesta.

DEFINICIÓN: *Se dice que* $f : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \longrightarrow W$*, donde* $V_1, V_2, \ldots, V_n, W$ *son espacios vectoriales, es una* <u>*aplicación multilineal*</u> *si para todo* $1 \le i \le n$

a) $f(\vec{v_1}, \ldots, \lambda\vec{v_i}, \ldots, \vec{v_n}) = \lambda f(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_i}, \ldots, \vec{v_n}) \quad$ *con* $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $f(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_i} + \vec{v_i}', \ldots, \vec{v_n}) = f(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_i}, \ldots, \vec{v_n}) + f(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_i}', \ldots, \vec{v_n})$.

DEFINICIÓN: *Se llama* <u>*tensor* n *veces covariante*</u> *a cualquier aplicación multilineal de la forma* $T : V \times \underset{n \text{ veces}}{\ldots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>Ejemplo</u> . El producto escalar usual en $\mathbb{R}^m$ define un tensor dos veces covariante y el determinante define un tensor m veces covariante.

Al igual que en cálculo de varias variables se consideran funciones vectoriales, también podríamos definir algo así como tensores vectoriales, de la forma $f : V \times \ldots \times V \longrightarrow V$ o incluso complicar más las cosas permitiendo $f : V \times \ldots \times V \longrightarrow V \times V$, etc. Cada vector "vertical" puede pasarse a un número real (pre-)multiplicando por un vector "horizontal", así que a cada $f : V \times \ldots \times V \longrightarrow V$ se le puede asociar $T : V^* \times V \times \ldots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(\widetilde{\varphi}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}) = \widetilde{\varphi}\big(f(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})\big)$ para cada $\widetilde{\varphi} \in V^*$. Además por el isomorfismo $V \cong V^*$, esta correspondencia es uno a uno**[uff]**.

En definitiva, da igual considerar los hipotéticos tensores vectoriales que considerar los tensores antes definidos pero permitiendo sustituir algunos de los factores V por V^*. Lo más breve es generalizar de esta forma la definición anterior.

DEFINICIÓN: *Se llama* <u>*tensor* r *veces contravariante y* s *veces covariante*</u> *o* <u>*tensor de tipo* (r, s)</u> *a una aplicación multilineal* $T : V^* \times \underset{r \text{ veces}}{\ldots} \times V^* \times V \times \underset{s \text{ veces}}{\ldots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$.

Comparando con la definición previa, un tensor n veces covariante es un tensor de tipo $(0, n)$. Además los tensores de tipo $(n, 0)$ se dice que son n veces contravariantes.

Por convenio además *diremos que una constante es un tensor de tipo* $(0, 0)$. Obsérvese que hay cierta lógica en esta notación porque una constante no depende de nada.

Como ejemplo, nótese que un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ asigna a cada vector otro vector, y según la identificación anterior da lugar a un tensor de tipo $(1, 1)$. En coordenadas,

[uff] Todo este párrafo se resume en lo siguiente: si tienes un vector y quieres un número, haz el producto escalar con otro vector arbitrario y, si además quieres quedar bien, di que esa es la acción de V^* sobre V

si representamos el endomorfismo como $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ y un elemento $\widetilde{\varphi} \in V^*$ como un vector horizontal, el tensor correspondiente es $T(\widetilde{\varphi}, \vec{v}) = \widetilde{\varphi}(A\vec{v})$.

Al igual que hablamos de las componentes (o entradas o coeficientes) de una matriz en cierta base, nos podemos referir a las componentes de un tensor (excluiremos implícitamente el caso $r = s = 0$).

DEFINICIÓN: *Supongamos que $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_m}\}$ es una base de V y la base dual es $\mathcal{B}^* = \{\widetilde{\varphi}^1, \widetilde{\varphi}^2, \dots, \widetilde{\varphi}^m\} \subset V^*$. Se llaman componentes de un tensor, T, de tipo (r, s), en estas bases a los números reales*

$$T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = T(\widetilde{\varphi}^{i_1}, \widetilde{\varphi}^{i_2}, \dots, \widetilde{\varphi}^{i_r}, \vec{e_{j_1}}, \vec{e_{j_2}}, \dots, \vec{e_{j_s}}).$$

Esta claro que un tensor está determinado por sus componentes en alguna base (por eso puede considerarse como una especie de matriz generalizada en $r+s$ dimensiones). Por ejemplo, el tensor T de tipo $(1,1)$ dado por un endomorfismo tiene como componente T^i_j el elemento ij de la matriz que lo define en cierta base. Para el endomorfismo identidad las componentes son δ^i_j donde

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Un vector $\vec{v}$ también puede considerarse como un tensor de tipo $(1,0)$ que aplica cada $\widetilde{\varphi} \in V^*$ en $\widetilde{\varphi}(\vec{v})$ y sus componentes en una base son simplemente sus coordenadas.

El conjunto de todos los tensores de tipo (r, s) tiene estructura de espacio vectorial, porque podemos multiplicar por números, sumar y restar tensores del mismo tipo. También se puede definir una especie de multiplicación exterior de dos tensores no necesariamente del mismo tipo, que se reduce a sustituir parte de las variables en uno y la otra parte en el otro, multiplicando los resultados.

DEFINICIÓN: *Si T es un tensor de tipo (r, s) y S es un tensor de tipo (u, v), se llama producto tensorial de T y S al tensor $T \otimes S$ de tipo $(r+u, s+v)$ cuyo valor en $\Omega = (\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^{r+u}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{s+v})$ es*

$$(T \otimes S)(\Omega) = T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) \cdot S(\widetilde{\varphi}^{r+1}, \dots, \widetilde{\varphi}^{r+u}, \vec{v}_{s+1}, \dots, \vec{v}_{s+v}).$$

Por ejemplo, si $\widetilde{\varphi}$ es el tensor $(0,1)$ que asigna a cada vector su primera coordenada, $\widetilde{\varphi} \otimes \widetilde{\varphi}$ asigna a cada par de vectores el producto de sus primeras coordenadas.

La notación tensorial es en principio un poco aparatosa. Por ejemplo, un tensor $(1,3)$ muy importante es el llamado tensor de Riemann $R : (\mathbb{R}^4)^* \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, que introduciremos en posteriores secciones. Tiene $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ componentes y para aplicarlo a un elemento del dual, digamos con componentes (a_1, a_2, a_3, a_4), y a tres vectores, cuyas coordenadas numeramos con superíndices, (b^1, b^2, b^3, b^4), (c^1, c^2, c^3, c^4), (d^1, d^2, d^3, d^4), debemos escribir

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} R^i_{jkl} a_i b^j c^k d^l$$

que, ciertamente, contiene muchos sumatorios. Si en lo sucesivo, como hemos hecho ya aquí, *denotamos siempre las coordenadas de un elemento del dual con subíndices y las de un vector con superíndices*, se produce una simplificación substancial usando el llamado <u>convenio de sumación de Einstein</u>[clp] que consiste en *sobreenteder un sumatorio cada vez que un subíndice aparece también como superíndice.* Por ejemplo, la expresión anterior se escribe simplemente como

$$R^i_{jkl} a_i b^j b^k b^l.$$

Las relaciones matriciales entre coordenadas se reducen enormemente con este convenio. Así el efecto sobre las coordenadas de una aplicación lineal, digamos $\vec{y} = A\vec{x}$, se escribe

$$y^i = a^i_j x^j.$$

Y la igualdad matricial $D = ABC$ componente a componente, se reduce a

$$d^i_j = a^i_k b^k_l c^l_j.$$

Lo mismo se aplica para abreviar combinaciones lineales. Por ejemplo, para decir que las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_m}\}$ son $a^1, a^2, \dots, a^m$

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{m} a^j \vec{e_j} \qquad \text{se abrevia como} \qquad \vec{v} = a^j \vec{e_j}.$$

En definitiva:

$$\boxed{\text{Un índice duplicado arriba y abajo indica un sumatorio}}$$

.

Nótese que todo funciona como si los índices repetidos se simplificasen. Por ejemplo, R^i_{jkl} es un tensor $(1,3)$ pero como R^i_{jil} sólo depende de dos índices, j y l, es $(0,2)$. También $a^i_k b^l_j$ representa un tensor $(2,2)$ y $a^i_k b^k_j$ representa un tensor $(1,1)$. Este fenómeno de igualar un índice y un subíndice y sumar en ellos, se llama <u>contracción</u>. Ahora podemos apreciar la conveniencia de pensar en las constantes como tensores de tipo $(0,0)$. Un tensor de este

[clp] Einstein dijo (como una broma): "He hecho un gran descubrimiento en Matemáticas; he suprimido el signo de sumación toda vez que la suma se haga en un índice que aparece dos veces".

tipo corresponde por ejemplo a la contracción de un tensor $(0,1)$ por otro $(1,0)$, esto es, a $\widetilde{\varphi}(\vec{v})$ con $\widetilde{\varphi} \in V^*$, $\vec{v} \in V$, y el resultado de esta operación es constante, no depende de las bases en que se expresen las componentes de $\widetilde{\varphi}$ y $\vec{v}$.

Como ya hemos mencionado, el producto escalar usual define un tensor dos veces covariante. También, en el capítulo anterior vimos que era conveniente definir un nuevo "producto escalar" (que no era ni siquiera definido positivo) y en secciones posteriores consideraremos otros productos escalares para medir distancias espaciales o temporales. Con esta idea en mente damos una definición tensorial muy general de la forma de los productos escalares que podemos usar para medir, preservando la simetría ($\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$) y la no degeneración (si para todo $\vec{y}$ se cumple $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ entonces $\vec{x} = \vec{0}$).

DEFINICIÓN: *Se dice que G es un tensor métrico si es un tensor dos veces covariante y sus componentes g_{ij} conforman una matriz simétrica no singular.*

Si uno es exigente, objetaría a esta definición que como las componentes dependen de la base escogida, G podría ser tensor métrico con una elección de la base pero no con otra. Probaremos que el pesado de turno no está en lo cierto para practicar con el convenio de sumación (realmente hay una prueba más directa).

Lema 2.1.1 : *Si las componentes g_{ij} de un tensor G de tipo $(0,2)$ conforman una matriz simétrica no singular en una base entonces también tienen esta propiedad en cualquier otra base.*

DEM.: Supongamos que g_{ij} son las componentes en la base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_m}\}$, esto es, $g_{ij} = G(\vec{e_i}, \vec{e_j})$. Si elegimos otra base $\mathcal{B}' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \dots, \vec{e_m}'\}$, relacionada con $\mathcal{B}$ por una matriz de cambio de base A, es decir,

$$\vec{e_i}' = a_i^k \vec{e_k}.$$

Entonces las componentes en $\mathcal{B}'$ son

$$g'_{ij} = G(\vec{e_i}', \vec{e_j}') = G(a_i^k \vec{e_k}, a_j^l \vec{e_l}) = a_i^k a_j^l G(\vec{e_k}, \vec{e_l}) = a_i^k a_j^l g_{kl}.$$

De aquí es evidente que $g'_{ij} = g'_{ji}$. Si la matriz de los g'_{ij} fuera singular, existiría un vector no nulo $\vec{v} = v^j \vec{e_j}'$ con $g'_{ij} v^j = 0$, así que para todo $\vec{x} = x^j \vec{e_j}'$ se tendría

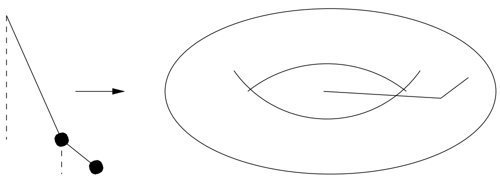
$$0 = x^i g'_{ij} v^j = x^i a_i^k g_{kl} a_j^l v^j = y^k g_{kl} w^k$$

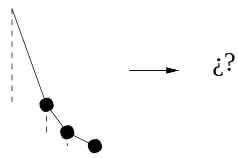
para $\vec{w} = A\vec{v} \neq \vec{0}$ y cualquier $\vec{y}$, con lo cual $g_{kl} w^k = 0$ y g_{ij} sería singular. ■

Nota: Dado un vector de componentes V^i, al contraer con un tensor métrico, $W_j = g_{ij} V^i$, el superíndice se transforma en subíndice obteniéndose un tensor de tipo $(0,1)$, esto es, un elemento del dual. A veces se dice que V^i son las coordenadas contravariantes del vector y W_j las covariantes. Este proceso y el contrario, pasando subíndices a superíndices a través del "inverso" de un tensor métrico, aparecerá con frecuencia en secciones posteriores.

A continuación introduciremos el concepto de variedad. Esencialmente las variedades son los objetos geométricos formados por unos cuantos parches recortados de $\mathbb{R}^n$ y pegados de forma diferenciable.

Como motivación veamos primero algunos sistemas mecánicos con ligaduras. Supongamos, por ejemplo, que queremos describir el movimiento de una cuenta de collar cuando le damos cierto impulso. Como la cuenta está ligada al collar su posición en cada instante está determinada por el ángulo, y por consiguiente puede ser descrita como un punto en S^1. Pensemos también en la posición de un barco. A nadie en sus cabales se le ocurriría describirla con las coordenadas habituales x, y, z usando un sistema de referencia en el centro de la Tierra, sino que lo normal es dar la latitud y la longitud, esto es, un punto de S^2. Un último ejemplo más profundo e interesante es el péndulo doble (un péndulo sostenido por otro). Cada uno de los pesos en el extremo de cada péndulo tiene una posición determinada por el ángulo con la vértical, así que para describir la posición de ambos simultáneamente debemos utilizar $S^1 \times S^1$ que geométricamente es un toro (una superficie con forma de rosquilla).





Si estudiásemos ejemplos más complicados, por ejemplo un péndulo triple, tendríamos problemas para visualizar el objeto geométrico al que corresponde. Sin embargo sea lo que sea, parece claro que localmente (cuando las partículas se mueven sólo un poquito) es el producto de tres pequeños intervalos, es decir, un trozo de $\mathbb{R}^3$. Dentro de este curso, veremos más adelante que una de las ideas básicas de la relatividad general es que cada trozo de espacio-tiempo es como una pequeña porción de $\mathbb{R}^4$ adecuadamente curvada y que las trayectorias de los objetos materiales no son rectas en presencia de campos gravitatorios porque están ligadas a la variedad formada por todas esas porciones. Físicamente podemos entender una variedad como el objeto matemático que representa las ligaduras de una partícula o sistema de partículas.

Para definir variedad en general, primero definimos los "parches" que la componen.

DEFINICIÓN: *Sea M un espacio topológico. Una carta (m-dimensional) es un par $(\phi, \mathcal{U})$ donde $\mathcal{U}$ es abierto en dicho espacio y $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un homeomorfismo con $\mathcal{V}$ abierto en $\mathbb{R}^m$.*

Y ahora los "pegamos".

DEFINICIÓN: *Se dice que M es una variedad conexa C^∞ m-dimensional (o simplemente una variedad m-dimensional) si es un espacio topológico Hausdorff conexo dotado* *de una colección de cartas m-dimensionales,* $(\phi_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$*, cuyos abiertos* $\mathcal{U}_\alpha$ *recubren* M *y tal que si* $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ *entonces* $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ *y su inversa,* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$*, son* C^∞ *en sus dominios de definición.*

Observación: Por razones técnicas, se considera en algunas demostraciones que en una variedad tenemos todas las cartas posibles para las que la definición se cumple (se dice que el *atlas es completo*, véase [**ON**]), sin embargo no insistiremos sobre ello aquí.

Notación: La función ϕ de la definición de carta tiene m componentes (porque su imagen está en $\mathbb{R}^m$). Se suele escribir $\phi = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ y a cada una de las funciones x^i se les suele llamar funciones coordenadas. Muchas veces, abusando de la notación emplearemos el mismo símbolo x^i para referirnos a cada una de las coordenadas usuales de los puntos genéricos de $\mathbb{R}^m$.

Las variedades se definen intrínsecamente, sin referencia a ningún espacio exterior pero como éste no es un curso avanzado de Geometría, nos centraremos especialmente en variedades que están incluidas en $\mathbb{R}^n$, llamadas subvariedades, cuyo estudio es más sencillo y debería ser ya conocido de cursos anteriores. Además hay un bello e interesante teorema (véase [**Spi1**] Cap. 2, Th. 17) que prueba que todas las variedades con propiedades "dignas" (paracompacidad o segundo axioma de numerabilidad) se pueden meter dentro de algún $\mathbb{R}^n$ y por tanto pueden considerarse como subvariedades.

DEFINICIÓN: *Una subvariedad m-dimensional de* $\mathbb{R}^n$ *es una variedad m-dimensional incluida en* $\mathbb{R}^n$ *heredando la topología usual de modo que las cartas se pueden extender a funciones* C^∞ *definidas en un abierto de* $\mathbb{R}^n$*. A las inversas de las cartas compuestas con la inclusión en* $\mathbb{R}^n$ *se les llama parametrizaciones.*

Esencialmente una carta aplana un trozo de la subvariedad en $\mathbb{R}^m$ mientras que una parametrización curva un trozo de $\mathbb{R}^m$ en la subvariedad[clp].

Ejemplo . El plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ es una variedad 2-dimensional (una superficie) de $\mathbb{R}^3$ para la que sólo es necesaria una carta (la proyección sobre el plano XY) o equivalentemente una parametrización.

$$\begin{array}{ll} \phi : \pi \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \qquad \sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \quad (x,y,z) \mapsto (x,y) & \qquad (x,y) \mapsto (x,y,1-x-y) \end{array}$$

[clp] En este curso apenas apelaremos a la definición de subvariedad sobre ejemplos concretos, pero recuérdese que lo visto en cursos anteriores se resume en que M es una subvariedad m-dimensional de $\mathbb{R}^n$ si se cumple alguna de estas condiciones equivalentes:
1) M viene dada localmente por una ecuación $M \cap \mathcal{U} = \{\vec{x} \in \mathcal{U} : F(\vec{x}) = \vec{0}\}$ donde $F: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ tiene diferencial de rango $n-m$.
2) Existen localmente homeomorfismos $X: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M \cap \mathcal{V}$ tales que extendidos a $X: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tienen diferencial de rango m (éstas son las parametrizaciones).
3) Existen localmente difeomorfismos $F: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ tales que $F(\mathcal{U} \cap M) = \mathcal{V} \cap (\mathbb{R}^m \times \vec{0})$ (éstas son las extensiones de las cartas).

Ejemplo . Cada plano coordenado corta a la esfera unidad S^2, $x^2+y^2+z^2=1$, en dos mitades y las proyecciones de cada una de ellas sobre dichos planos dan lugar, en total, a seis cartas, probándose que S^2 es una variedad (y subvariedad de $\mathbb{R}^3$).

Dada una carta de una subvariedad $\phi=(x^1,x^2,\dots,x^m)$ se denota con ∂_i o $\partial/\partial x^i$ al vector $\partial\sigma/\partial x^i\in\mathbb{R}^n$, esto es,

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i} \;=\; \frac{\partial\sigma}{\partial x^i}$$

donde $\sigma\,:\,\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es la parametrización que corresponde a ϕ, $\phi\circ\sigma=\mathrm{Id}$, y se deriva con respecto a la i-ésima variable. Geométricamente en cada punto p éste es un vector tangente a la subvariedad que escribiremos

$$\partial_i\big|_p=\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}\bigg|_{\phi(p)}.$$

Ejemplo . Usando la parametrización de la semiesfera

$$\sigma\,:\,(x^1,x^2)\longrightarrow(x^1,x^2,\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}),$$

se tienen en $p=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ los vectores tangentes

$$\partial_1\big|_p=(1,0,-1),\qquad \partial_2\big|_p=(0,1,-1).$$

DEFINICIÓN: *Dada una subvariedad m-dimensional M y un punto $p\in M$, se denomina espacio tangente de M en p, y se denota con $T_p(M)$, al espacio generado por*

$$\mathcal{B}=\{\partial_1\big|_p,\partial_2\big|_p,\dots\partial_m\big|_p\}.$$

El conjunto $\mathcal{B}$ es de hecho una base de $T_p(M)$ a la que a veces se llama base natural asociada a la carta correspondiente. La base dual se suele denotar mediante

$$\mathcal{B}^*=\{dx^1\big|_p,dx^2\big|_p,\dots,dx^m\big|_p\}.$$

Esto es, por definición dx^i es en cada punto una aplicación lineal tal que[uff]

$$dx^i(\partial_j)=\delta^i_j.$$

De nuevo la notación es la adecuada para aplicar el convenio de sumación. Obviamente, hay

[uff] No hay que tener miedo a los dx^i ni a las uno-formas en general. Simplemente son cosas que pasan vectores tangentes en números y en este curso no es necesario saber más de ellas. Si uno tiene interés acerca de la interpretación geométrica de las dx^i como hipersuperficies, puede consultar **[Sc]** o **[Mi-Th-Wh]**.

que tener en cuenta que si usamos $\partial/\partial x^i$ en vez de ∂_i, *los superíndices en el denominador cuentan como subíndices.*

DEFINICIÓN: *Al espacio vectorial generado por $\mathcal{B}^*$ se le denomina espacio cotangente de M en p y se denota con $T_p(M)^*$ (por ser dual de $T_p(M)$). Los elementos de $T_p(M)^*$ se llaman uno-formas (o covectores).*

Podemos considerar simultáneamente un vector en cada punto. Esto es como llenar de "pelos" la subvariedad.

DEFINICIÓN: *Sea M una subvariedad m-dimensional. Un campo de vectores C^∞ en M es una aplicación que asigna a cada punto $p \in M$ un vector de $T_p(M)$, de manera que en cada carta se escribe como $a^i\partial_i$ (nótese el convenio de sumación) con a^i funciones C^∞.*

Se podría definir de la misma forma campos de uno-formas, de tensores métricos, etc. Veamos el caso general.

DEFINICIÓN: *Sea M una subvariedad m-dimensional. Un campo tensorial (C^∞) de tipo (r,s) en M, o simplemente un tensor de tipo (r,s) en M, es una aplicación que asigna a cada punto $p \in M$ un tensor de tipo (r,s) con $V = T_p(M)$, $V^* = T_p(M)^*$ y que en cada carta tiene componentes C^∞.*

Siguiendo el convenio que veníamos manejando en el caso $r = s = 0$, un tensor de tipo $(0,0)$ en M le asigna a cada punto una constante, es decir, es simplemente una función C^∞.

Dadas dos cartas $\big(\phi = (x^1,\dots,x^m),\mathcal{U}\big)$, $\big(\phi' = (x'^1,\dots,x'^m),\mathcal{U}'\big)$ que se solapan, $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}' \neq \emptyset$, la función $\phi\circ\phi'^{-1}$ pasa de $(x'^1,\dots,x'^m)$ a $(x^1,\dots,x^m)$ y por razones obvias la matriz de su diferencial se suele escribir $\partial x^i/\partial x'^j$ y su inversa $\partial x'^i/\partial x^j$. En cada carta se tendrán campos $\partial/\partial x^1,\dots,\partial/\partial x^m$, $dx^1,\dots,dx^m$ (usando ϕ) y $\partial/\partial x'^1,\dots,\partial/\partial x'^m$, $dx'^1,\dots,dx'^m$ (usando ϕ') que dan las bases del espacio tangente y cotangente.

Lema 2.1.2: *Con la notación anterior*

$$i)\ \frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad ii)\ dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}dx^j.$$

DEM.: Por la definición y la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial \sigma'}{\partial x'^j} = \frac{\partial(\sigma\circ\phi\circ\sigma')}{\partial x'^j} = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Lo que prueba i). Para comprobar ii) basta ver que ambos miembros aplicados a cualquier $\partial/\partial x'^l$ dan el mismo resultado. Para el primer miembro éste es, por definición, δ^i_l y para el segundo

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \Big(\frac{\partial}{\partial x'^l}\Big) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \Big(\frac{\partial x^k}{\partial x'^l}\frac{\partial}{\partial x^k}\Big) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^l}\delta^j_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \delta^i_l$$

donde en el primer paso se ha usado $i)$ y en el último que la primera matriz es inversa de la segunda. ■

Estas relaciones prueban que para cualquier tensor

$$T\big(dx'^{i_1}, \dots, dx'^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x'^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x'^{j_s}}\big)$$

coincide con

$$T\Big(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^k} dx^k, \dots, \frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^k} dx^k, \frac{\partial x^l}{\partial x'^{j_1}}\frac{\partial}{\partial x^l}, \dots, \frac{\partial x^l}{\partial x'^{j_s}}\frac{\partial}{\partial x^l}\Big)$$

Por tanto, cuando cambiamos de carta (o parametrización) las componentes de un tensor de tipo (r, s) en una variedad cambian por la fórmula[clp]

$$\boxed{T'^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = \Big(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\Big) \cdot \Big(\frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \cdot \frac{\partial x^{l_2}}{\partial x'^{j_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{l_s}}{\partial x'^{j_s}}\Big) T^{k_1 k_2 \dots k_r}_{l_1 l_2 \dots l_s}}$$

Esta fórmula es tan característica de los tensores que en muchos libros de la bibliografía ([**Fo-Ni**], [**Ei2**], [**We**], [**Be**]...) se definen los tensores y campos de tensores como conjuntos de números o funciones sujetos a esta regla de transformación, que a veces se llama <u>tensorialidad</u> por antonomasia.

<u>Ejemplo</u> . En $\mathbb{R}^m$ consideramos dos cartas dadas por las coordenadas en dos bases relacionadas por $x'^i = c^i_k x^k$ que se puede invertir como $x^l = \widetilde{c}^l_j x'^j$. Una aplicación lineal es un tensor A de tipo $(1, 1)$ y un tenso métrico G es un tensor de tipo $(0, 2)$, así que sus componentes se transforman mediante

$$a'^i_j = c_k \widetilde{c}^l_j a^k_l \qquad \text{y} \qquad g'_{ij} = \widetilde{c}^l_i \widetilde{c}^m_j g_{lm}.$$

Identificando A y G con sus matrices de componentes, estas relaciones no son más que las bien conocidas fórmulas de Álgebra Lineal para el cambio de base de aplicaciones lineales y bilineales

$$A \longrightarrow CAC^{-1} \qquad \text{y} \qquad G \longrightarrow (C^{-1})^t G C^{-1}.$$

[clp] Para recordarla, hay que saber poco más que el convenio de índices: covariante → subíndice → nuevas variables abajo, y el caso contravariante es justo a la inversa.

Ejemplo . En cada punto de $\mathbb{R}^2$ tenemos un tensor métrico en el plano tangente dado por $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ con las coordenadas usuales (omitimos por brevedad el punto), esto es un campo de tensores métricos (nótese que este campo lo único que hace es aplicar el vector tangente $(a, b) = a\,\partial_1 + b\,\partial_2$ en su longitud al cuadrado $a^2 + b^2$). Si ahora cambiamos de coordenadas, digamos a polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ entonces podemos calcular los nuevos coeficientes del tensor métrico usando la fórmula anterior (para $(x^1, x^2) = (x, y)$ y $(x'^1, x'^2) = (r, \theta)$) o simplemente sustituir, según el lema anterior,

$$dx = \cos\theta\,dr - r\operatorname{sen}\theta\,d\theta, \qquad dy = \operatorname{sen}\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta$$

para obtener

$$\begin{aligned}(\cos\theta\,dr - r\operatorname{sen}\theta\,d\theta) \otimes (\cos\theta\,dr - r\operatorname{sen}\theta\,d\theta) +& \\ (\operatorname{sen}\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) \otimes (\operatorname{sen}\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) &= dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta.\end{aligned}$$

El obstáculo para generalizar todas las construcciones anteriores a variedades es que fuera de una variedad no hay en principio nada (no está inmersa en $\mathbb{R}^n$) y no podemos dibujar los vectores tangentes pegados a ella. Para lo único que necesitaremos los vectores al hacer cálculo en variedades es para indicar direcciones en las que luego se deriva. Entonces no hace falta pensar en flechas que podamos ver en $\mathbb{R}^n$ sino que podemos pensar directamente en operadores que actúen como derivadas direccionales[uff]. Esta idea es tan abstracta que es difícil encontrarla rigurosamente expresada fuera de los libros (avanzados) de Geometría (véase **[ON]** p. 6). Como en el caso de las subvariedades, los vectores tangentes se escriben en cada punto p como combinaciones lineales de $\partial_i\big|_p$ (véase **[ON]** p. 8), que ahora está definido en cada carta $\phi = (x^1, \dots, x^m)$ como el operador que aplica cada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ en

$$\partial_i\big|_p(f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}\bigg|_{\phi(p)}.$$

En definitiva, aunque no tengamos un espacio ambiente para dibujar los vectores tangentes, todo sigue funcionando si los consideramos como operadores diferenciales. Estas ideas exceden el contenido del curso y basta con tener en mente que podemos hacer todas las construcciones anteriores también en variedades.

Cuando tenemos un campo de tensores métricos podemos medir vectores tangentes, lo cual será particularmente importante.

DEFINICIÓN: *Se llama variedad (semi-)riemanniana a una variedad junto con un campo de tensores métricos sobre ella, normalmente llamado métrica.*

[uff] Antes de echarse a llorar, léase el final del párrafo.

Observación: Lo más riguroso sería emplear el adjetivo *riemanniana* si la métrica es definida positiva y *semiriemanniana* en el resto de los casos, pero, a veces, para abreviar se dice *variedad riemanniana* siempre.

Nótese que si en cierta carta la métrica, G, tiene componentes g_{ij} entonces

$$G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

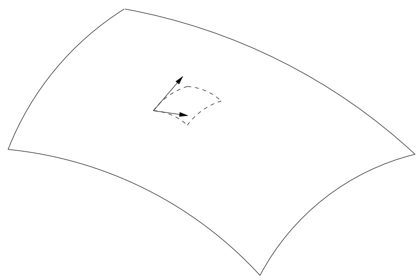
porque ambos tensores tienen las mismas componentes. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ (con la carta identidad) las métricas serían de la forma

$$G = g_{11} dx \otimes dx + g_{12} dx \otimes dy + g_{21} dy \otimes dx + g_{22} dy \otimes dy.$$

Sin embargo casi nadie las escribe así en los textos de relatividad, sino con la notación clásica (menos rigurosa)

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + 2g_{12} dxdy + g_{22} dy^2. \tag{2.1}$$

La idea intuitiva subyacente es que en una subvariedad si los vectores tangentes son pequeños están muy cerca de la superficie y su longitud, $\sqrt{G(\vec{v}, \vec{v})}$, con la métrica "natural" es como la longitud de arco, ds, para incrementos infinitesimales dx, dy, de las variables.



No obstante, no hay que olvidar que, de acuerdo con la definición dada aquí, dx y dy no tienen nada que ver con cantidades infinitesimales (véanse los comentarios en [**Sc**] p. 132) y de hecho ésa es su gran ventaja.

Sea o no adecuada esta notación, está tan arraigada que comúnmente escribiremos fórmulas del tipo (2.1) para indicar las componentes de la métrica (en este caso g_{11}, $g_{12} = g_{21}$ y g_{22}). Sin embargo, mantendremos la notación introducida en lo que queda de sección.

La variedad riemanniana más sencilla es $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea usual $\delta_{ij} dy^i \otimes dy^j$ con $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Esto es

$$dy^1 \otimes dy^1 + dy^2 \otimes dy^2 + \ldots + dy^n \otimes dy^n \tag{2.2}$$

(con la notación clásica $ds^2 = (dy^1)^2 + \ldots + (dy^n)^2$). Como las subvariedades están metidas en $\mathbb{R}^n$, podríamos pensar en restringir de alguna forma la métrica euclídea, para ello debemos respetar las relaciones entre las coordenadas de $\mathbb{R}^m$ dentro de la subvariedad. Si llamamos y^i a la i-ésima coordenada de una parametrización σ, por nuestra idea más intuitiva de la diferencial o por una generalización del Lemma 2.1.2 para funciones entre variedades

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k. \tag{2.3}$$

Lo que sugiere de qué manera las subvariedades heredan la métrica usual de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN: *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad. Se llama* <u>*métrica inducida*</u> *por la usual aquella que para cada parametrización $\sigma = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ tiene la forma*

$$\delta_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} dx^k \otimes dx^l.$$

<u>Observación</u>: A efectos prácticos en vez de aprenderse la fórmula de la definición anterior es mejor sustituir directamente (2.3) en (2.2).

<u>Ejemplo</u> . La circunferencia unidad S^1 es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$. Una parametrización (en cierto abierto) es $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. La métrica usual de $\mathbb{R}^2$ es $dx \otimes dx + dy \otimes dy$, e introduciendo las relaciones

$$x = \cos t \Rightarrow dx = -\operatorname{sen} t\, dt, \qquad y = \operatorname{sen} t \Rightarrow dy = \cos t\, dt,$$

en dicha métrica, se tiene que la métrica inducida es

$$\operatorname{sen}^2 t\, dt \otimes dt + \cos^2 t\, dt \otimes dt = dt \otimes dt.$$

Lo cual es geométricamente evidente con la notación clásica, porque longitudes y ángulos son lo mismo en S^1.

<u>Ejemplo</u> . Si queremos hallar la métrica inducida por la usual en el paraboloide $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = x^2 + y^2\}$, buscamos parametrizaciones. Sin preocuparnos de en qué abierto se puede definir, la más natural es la obtenida al introducir coordenadas polares

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos\theta\, dr - r\operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ dy = \operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \\ dz = 2r\, dr \end{cases}$$

Por consiguiente la métrica inducida (con esta parametrización) es

$$\begin{aligned} &(\cos\theta\, dr - r\operatorname{sen}\theta\, d\theta) \otimes (\cos\theta\, dr - r\operatorname{sen}\theta\, d\theta) + \\ &\qquad (\operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \otimes (\operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) + 4r^2 dr \otimes dr. \end{aligned}$$

Y operando

$$(4r^2+1)dr\otimes dr + r^2 d\theta\otimes d\theta.$$

(Con la notación clásica esto se obtiene simplemente operando en $(\cos\theta\, dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta)^2 + (\mathrm{sen}\,\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)^2 + 4r^2dr^2)$. Esto implica que para radios constantes la longitud en círculos sigue siendo proporcional al ángulo, pero debido a la curvatura del paraboloide las distancias se van modificando según varía el radio.

Problemas 2.1

$\to$**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si $T(\vec{x},\vec{y})$ y $S(\vec{x},\vec{y})$ son tensores, ¿lo es $R(\vec{x},\vec{y}) = T(\vec{x},\vec{y})\cdot S(\vec{x},\vec{y})$?

ii) ¿Es $T(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}+\vec{y}$ una aplicación bilineal?

iii) ¿Es el producto tensorial conmutativo?

iv) ¿Es un tensor la aplicación que a cada par de vectores en $\mathbb{R}^3$ le asigna la primera coordenada de su producto vectorial?

v) ¿Es un tensor la aplicación que a cada par de vectores en $\mathbb{R}^2$ le asigna el área del paralelogramo que determinan?

vi) ¿Cuántas componentes tiene un tensor de tipo (r,s) con $V=\mathbb{R}^m$?

vii) ¿Por qué un vector $\vec{v}$ es un tensor de tipo $(1,0)$ definiendo $\vec{v}(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi}(\vec{v})$ para cada $\widetilde{\varphi}\in V^*$?

viii) ¿Por qué si las componentes de dos tensores coinciden en una base deben coincidir en todas?

ix) Si las componentes del endomorfismo identidad son en todas las bases δ^i_j, cómo puede ser que la matriz de componentes de la métrica usual en $\mathbb{R}^n$ cambie de base en base si en la canónica coincide con δ^i_j?

x) ¿Es el nombre *vector* gradiente correcto?

xi) ¿Cómo se puede escribir el polinomio de Taylor de grado 3 en el origen de una función $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, usando el convenio de sumación de Einstein?

xii) Fijados $\vec{v}$ y $\vec{w}$, ¿en qué puntos de la esfera unidad el plano tangente está generado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

xiii) Si consideramos $\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^n$ $(m<n)$, ¿cuál es la métrica inducida sobre $\mathbb{R}^m$?

xiv) ¿Cuál es la métrica inducida sobre una curva $\vec{\gamma}(t) = \big(x(t),y(t),z(t)\big)$? ¿Qué significa el resultado en términos de longitudes de arco?

$\to$**2)** Demostrar que, fijada una base, todo tensor dos veces covariante es de la forma $T(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^t A\vec{y}$ con A una matriz.

$\rightarrow$**3)** Hallar cuántas componentes nulas y cuántas no nulas tiene el tensor determinante. Estudiar también cuántas son positivas.

4) Para $V = \mathbb{R}^3$ consideremos un tensor de tipo $(0,3)$, otro de tipo $(1,2)$ y otro de tipo $(2,1)$, cuyas componentes, digamos ϵ_{ijk}, ϵ^i_{jk} y ϵ^{ij}_k, en la base canónica son: 0 si i,j,k no es una reordenación de $1,2,3$; 1 si i,j,k es una permutación par de $1,2,3$ (esto es, se ordena con un número par de intercambios) y -1 si i,j,k es una permutación impar de $1,2,3$.

$\rightarrow$a) Dados $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, explicar qué objetos matemáticos bien conocidos representan las cantidades

$$\epsilon^{ij}_k \partial F^k/\partial x^j, \qquad \epsilon^i_{jk} v^j w^k, \qquad \epsilon_{ijk} u^i v^j w^k.$$

b) Demostrar que las componentes δ^i_j permanecen invariantes al cambiar de base, pero ϵ_{ijk} y ϵ^i_{jk}, en general, se modifican.

c) Sea $\mathcal{B}'$ una base de $\mathbb{R}^3$ obtenida a partir de la canónica mediante una matriz de determinante 1. Demostrar que $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$.

$\rightarrow$**5)** Sea un endomorfismo $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, con $A = (a^i_j)$, en $\mathbb{R}^n$.

a) Dar una demostración tensorial de que la traza a^i_i es invariante por cambios de base.

b) Probar que $a^i_i a^j_j - a^i_j a^j_i$ también es invariante e identificar esta cantidad en términos de trazas de matrices.

c) Estudiar si la suma de todas las componentes de A es invariante.

6) A una forma cuadrática $Q(\vec{x}) = g_{ij} x^i x^j$ se le puede asociar el tensor $(0,2)$, G, cuyas componentes son g_{ij}. De hecho $Q(\vec{x}) = G(\vec{x},\vec{x})$ y por ello, sobre todo en Física, se representan algunas formas cuadráticas con tensores. Por ejemplo, la energía gastada para hacer rotar con velocidad angular constante $\vec{\omega}$ (recuérdese que la dirección de $\vec{\omega}$ indica el eje de giro y su módulo la variación del ángulo por unidad de tiempo) un sólido homogéneo C, digamos de densidad uno, con centro de masas en el origen viene dada por la integral de volumen

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\int_C ||\vec{\omega} \times \vec{r}||^2 dV$$

donde $\vec{r} = (x,y,z)$ es el vector de posición de cada punto de C.

a) Demostrar que

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I(\vec{\omega},\vec{\omega})$$

donde I es el tensor, llamado <u>tensor de inercia</u> (véase **[La-Li]**, **[Gi]**), cuyas componentes son

$$(I_{ij}) = \begin{pmatrix} \int (y^2+z^2)dV & -\int xydV & -\int xzdV \\ -\int yxdV & \int (x^2+z^2)dV & -\int yzdV \\ -\int zxdV & -\int zydV & \int (x^2+y^2)dV \end{pmatrix}$$

b) Calcular las componentes del tensor de inercia para el cilindro $C = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ -1 \le z \le 1\}$.

c) Usando el apartado anterior, calcular la energía necesaria para hacer rotar C con $\vec{\omega} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

d) Estudiar por cuál de los ejes de coordenadas es más fácil hacerlo rotar y tratar de explicar este resultado físicamente.

→**7)** Si multiplicamos tensorialmente unos cuantos elementos de $\mathcal{B}$ y otros de $\mathcal{B}^*$, hallar cuántas componentes no nulas tiene el tensor resultante. Usar este hecho para probar que todo tensor se puede escribir como combinación lineal de estos productos tensoriales.

8) Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ una base de $\mathbb{R}^m$ y sean g_{ij} las componentes de la métrica usual en esta base, es decir, $g_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$. Demostrar que

$$|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)| = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

(*Indicación*: Cambiar a una base ortonormal y escribir g_{ij} en términos de la matriz de cambio de base).

→**9)** Comprobar que para definir la esfera unidad bastan dos cartas. Inténtese usar un argumento topológico para probar que una no es suficiente.

10) Demostrar que una variedad unidimensional no es bidimensional, en el sentido de que si una variedad admite una colección de cartas unidimensionales no puede admitir otra colección de cartas bidimensionales.

→**11)** Demostrar que $\{\partial_1\big|_p, \dots, \partial_m\big|_p\}$ es un conjunto linealmente independiente. (*Indicación*: Si la carta ϕ se extiende a $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y σ es la parametrización correspondiente, aplicar la regla de la cadena a $F \circ \sigma = \text{Id}$).

→**12)** Considerando $\mathbb{R}^3$ como variedad, escribir la uno-forma

$$\frac{2}{3}dx\big|_p + \frac{2}{3}dy\big|_p + \frac{1}{3}dz\big|_p \qquad \text{con } p = (2,2,1)$$

en coordenadas esféricas.

$\rightarrow$**13)** Considérese el paraboloide $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z = x^2 + y^2\}$ y las cartas

$$\begin{array}{rlcrl} \phi \, : & \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \qquad & \phi' \, : & \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times (-\pi/2, \pi/2) \\ & (x, y, z) \mapsto (x, y) & & & (x, y, z) \mapsto (r, \theta) \end{array}$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ y $\mathcal{U} = P \cap \{x > 0\}$.

a) Hallar los vectores tangentes ∂_1, ∂_2 en el punto $(1, 1, 2)$ con cada una de estas cartas.

b) Comprobar para estas cartas la relación

$$\frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

14) En la esfera unidad $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ consideramos la aplicación que a cada $\vec{v} \in T_p(M)$ le asigna su producto vectorial con el vector de posición de p.

a) Demostrar que esto define una aplicación lineal $L : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$.

b) Usando la carta dada por la proyección del hemisferio norte sobre el plano XY, hallar las componentes T^i_j del campo vectorial asociado a L.

c) Repetir el apartado anterior usando la carta dada por los ángulos en esféricas.

$\rightarrow$**15)** Según habíamos visto, el cambio a polares lleva la métrica usual de $\mathbb{R}^2$, $dx \otimes dx + dy \otimes dy$, a $dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$. Hallar ahora un cambio de coordenadas (de carta) en $\mathbb{R}^2$ que pase la métrica "de Minkowski" en $\mathbb{R}^2$, $dx \otimes dx - dy \otimes dy$, a $dr \otimes dr - r^2 d\theta \otimes d\theta$. (*Indicación*: Los dos problemas son similares salvo el "cambio" $y \mapsto y\sqrt{-1}$, $\theta \mapsto \theta\sqrt{-1}$).

16) Dadas las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que la primera y la tercera no pueden ser las matrices de componentes de una misma métrica en un abierto de $\mathbb{R}^2$ usando dos cartas distintas.

$_*$b) Si la primera y la segunda son las matrices de componentes de dos métricas, G_1 y G_2, en $\mathbb{R}^2$ con la carta usual (x, y), demostrar que existe un cambio de carta de manera que ambas métricas se hacen simultáneamente "diagonales", es decir, tal que

$$G_i = A_i du \otimes du + B_i dv \otimes dv.$$

$\rightarrow$**17)** Hallar la métrica inducida en el hiperboloide $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ usando la carta (definida en cierto abierto) $(x,y,z) \mapsto (x,y)$.

18) Repetir el problema anterior pero ahora usando la carta $(x,y,z) \mapsto (u,v)$ donde $u = \arctan(y/x)$ y $v = \operatorname{arc\,senh} z$.

$\rightarrow$**19)** Sea G la métrica inducida en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ usando la carta proyección $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Demostrar que la base natural del espacio tangente $\{\partial_1, \partial_2\}$ no es en general ortogonal, esto es, $G(\partial_1, \partial_2) \neq 0$. Repetir el problema para la carta dada por los ángulos en esféricas. (Nota: De resultados posteriores se podrá deducir que es imposible hallar una carta en la que $\{\partial_1, \partial_2\}$ sea ortonormal en un abierto).

$\rightarrow$**20)** Hallar alguna carta del cilindro de radio 3 de manera que $\{\partial_1, \partial_2\}$ sea ortonomal con la métrica inducida.

***21)** Se dice que un tensor, T, (o un campo de tensores) de tipo $(0,k)$, $k > 1$, es *alternado* si cambia de signo cuando se intercambian cualquier par de los vectores sobre los que se aplica. Esto es,

$$T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots \vec{v}_k) = T(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_i, \ldots \vec{v}_k).$$

Por ejemplo,

$$dx^i \wedge dx^j = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i$$

es un tensor alternado de tipo $(0,2)$. Hallar la dimensión y una base de los tensores alternados de tipo $(0,k)$ en $T_p(M)$ para M una variedad m-dimensional. (*Indicación*: Comprobar que la definición anterior se generaliza a

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^k = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, dx^{\sigma(1)} \wedge dx^{\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge dx^{\sigma(k)}$$

donde σ recorre las permutaciones de $1, 2, \ldots, k$; y tratar de construir la base pedida con tensores de este tipo).

Historias en titulares:

Ex Cathedra

Contra una tradición bien establecida, C.F. Gauss, ya anciano, ha pedido que B. Riemann no hable en su disertación inaugural (para el puesto de *Privatdocent*) del primer tema que había elegido (un interesante estudio de las series de Fourier) sino del último, titulado "Sobre las hipótesis que subyacen a la Geometría". Los miembros de la facultad parecen no haber entendido mucho de la exposición de Riemann casi desprovista de fórmulas, pero Gauss se muestra satisfecho.

1854

The dim view

Se ha publicado el simpático relato "*Planilandia* (*un romance en muchas dimensiones*)" bajo el seudónimo *A. Square*. Aparte de una sátira del jerárquico mundo victoriano (la clase social y sexo de los planilandeses depende de su número de lados), muestra las paradojas y dificultades para entender las dimensiones superiores. En cierto punto, la esfera que ha convencido al cuadrado protagonista de la existencia de la tercera dimensión, rechaza la cuarta argumentando que "nadie ha adoptado o sugerido la teoría de una Cuarta Dimensión; así que dejemos por favor esas naderías".

1884

Riccio e curvo

G. Ricci-Curbastro y su estudiante T. Levi-Civita han escrito un importante trabajo titulado "Métodos de cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones". En él se introduce el cálculo tensorial (llamado absoluto) que permite describir las ideas de Riemann. Además se dan algunas aplicaciones físicas. Curiosamente, Ricci-Curbastro ha firmado sólo con la primera parte de su apellido y empieza a ser conocido así.

1900

¿Qué hay que saberse?:

Todo. Esta sección no contiene teoremas y su mayor y única dificultad está en familiarizarse con el lenguaje introducido. Para ello nada mejor que sufrir con los ejercicios y ejemplos. De todas formas, para los fanáticos del rotulador:

• Un tensor es como una generalización de una aplicación lineal. Al igual que ésta se representa en cada base mediante una matriz bidimensional, un tensor queda representado por una matriz $r+s$ dimensional cuyos coeficientes se denotan con r superíndices y s subíndices.

• El convenio de sumación permite escribir sumas sin sumatorios sobreentendiéndolos cuando un índice y un subíndice coinciden.

• Una variedad m-dimensional esencialmente es un cuerpo geométrico (diferenciable) de m dimensiones. Para fijar ideas uno puede centrarse en aquéllas que puede "ver" dibujadas en algún $\mathbb{R}^n$: las subvariedades.

• En cada punto de una variedad hay un espacio tangente y un espacio cotangente (dual del anterior). Los tensores en variedades se suponen actuando sobre estos espacios, y al cambiar de coordenadas sus componentes cambian por la fórmula

$$T'^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = \Big(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\Big) \cdot \Big(\frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \cdot \frac{\partial x^{l_2}}{\partial x'^{j_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{l_s}}{\partial x'^{j_s}}\Big) T^{k_1 k_2 \dots k_r}_{l_1 l_2 \dots l_s}.$$

• Entre los tensores que se pueden considerar en una variedad, las métricas tienen una importancia especial porque sirven para medir longitudes. En una subvariedad hay una métrica especial inducida por la forma de medir en $\mathbb{R}^n$.

¿Para qué sirve?:

Se podría decir que todo el electromagnetismo viene dado por las propiedades de cierto tensor, el tensor de Faraday, que contiene todas las ecuaciones de Maxwell, o que el tensor de esfuerzos es crucial para el estudio de la mecánica de fluidos y la teoría de la elasticidad. Se podría decir todo esto e incluso sería verdad. Pero para no caer en la exageración, no hay que perder de vista que el cálculo tensorial es sólo un lenguaje adecuado para escribir y pensar más rápido. Aprender el vocabulario básico de un idioma puede resultar más o menos difícil pero es algo mucho más primario que hacer poesía.

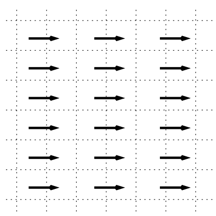
Recurriendo a un símil con un objeto matemático bien conocido, si a nadie se le hubiera ocurrido definir el determinante y escribir simplemente $|A|$ o $\det(A)$, entonces la regla de Cramer para sistemas de orden 2 o 3 parecería mucho más difícil y fórmulas como $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ perderían sus visos de naturalidad.

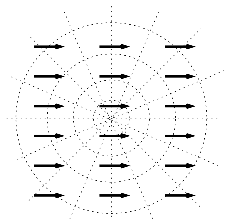
2.2. Símbolos de Christoffel y geodésicas

Si la Tierra en vez de girar a menos de dos milésimas de radián por segundo lo hiciera mucho más rápido, nos parecería que los objetos que caen desde gran altura sufren una extraña fuerza que los desvía hacia el este. Esta fuerza, llamada de Coriolis (véase [**La-Li**] p. 108, o el primer volumen de [**Al-Fi**] para una exposición más elemental e ilustrada), existe aunque es muy débil con nuestra baja velocidad angular, tanto, que los experimentos caseros que normalmente se sugieren para observarla (giro del agua del sumidero del baño o "péndulo de Foucault" con hojas de té en una cacerola) son más mitos que realidades. Esta fuerza es en cierto modo ficticia porque se debe a que hemos escogido un sistema de referencia no adecuado (no inercial), pero si queremos hacer experimentos precisos o lanzar misiles balísticos intercontinentales, debemos añadirla a la fuerza de la gravedad para obtener los resultados esperados.

En esta sección, que tiene una gran motivación física, introduciremos un único objeto, un tensor (por tanto con diferentes componentes en cada carta) que tenga en cuenta conjuntamente la parte de la variación de un campo vectorial (de velocidades) y la que se debe a la variación del plano tangente en que se expresa cada vector. Matemáticamente necesitamos definir una forma absoluta de derivar para poder hacer cálculo en variedades.

Supongamos, por ejemplo, un campo de vectores en $\mathbb{R}^2$ que a cada punto le asigna el vector unitario constante dirigido hacia la derecha. Esto podría representar el campo de velocidades de la partículas de arena bajo la acción de un viento oeste-este.

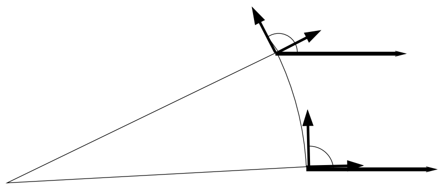




La aceleración de las partículas debe ser nula, lo cual es claro en coordenadas cartesianas porque el campo es sencillamente $\partial/\partial x$ y, por tanto, tiene coordenadas constantes $(1,0)$. Sin embargo en coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \theta} = -\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dfrac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\,\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

y el campo tiene ahora por coordenadas $\cos\theta$ y $-r^{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta$ que no son constantes. La explicación es que, por ejemplo, la derivada con respecto de θ involucra un incremento infinitesimal de θ con lo cual hay un pequeño cambio en la dirección de la base $\{\partial/\partial r, \partial/\partial\theta\}$ y a un observador que la use como sistema de referencia le parecerá que el campo de vectores ha girado un poco en sentido negativo debido a una misteriosa fuerza de Coriolis.



De este ejemplo debemos deducir que para derivar un campo de vectores no basta con derivar sus componentes sino también la base en donde se expresan éstas.

Analicemos con detalle la situación en $\mathbb{R}^m$. Sea una carta $(\phi = (x^1, \dots, x^m), \mathcal{U})$, σ la parametrización asociada y $\vec{V}$ un campo de vectores dado en esta carta por $\vec{V} = V^i \partial_i$. Según la definición del vector tangente ∂_i

$$\vec{V} = V^i \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}.$$

La "verdadera" derivada con respecto a x^j no tiene por coordenadas $\partial V^i/\partial x^j$, sino que es

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^j} = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}\frac{\partial \sigma}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^j \partial x^i} V^i. \tag{2.4}$$

Fijados i y j, la derivada parcial segunda $\partial^2\sigma/\partial x^j \partial x^i$ tiene m coordenadas, así que es un elemento en $\mathbb{R}^m$ que podemos considerar en el espacio tangente (porque $T_p(\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^m$) y por tanto se expresa como cierta combinación lineal de los ∂_i, digamos

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^j \partial x^i} = \Gamma^k_{ij}\partial_k. \tag{2.5}$$

A los coeficientes Γ^k_{ij} se les llama <u>símbolos de Christoffel</u>. Por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas son simétricos en sus dos subíndices

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

Sustituyendo (2.5) en (2.4) se tiene

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial V^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} V^i\right)\partial_k. \tag{2.6}$$

Al término entre paréntesis se le suele denotar con $V^k_{;j}$. Esto es[clp]

$$V^k_{;j} = \frac{\partial V^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} V^i.$$

Para ver su caracter tensorial, llamemos $V'^k_{;j}$ a su valor en otra carta, por la regla de la cadena en $\mathbb{R}^m$ y el Lema 2.1.2

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x'^j} = V'^k_{;j} \frac{\partial}{\partial x'^k} \;\Rightarrow\; \frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = V'^k_{;j}\frac{\partial x^l}{\partial x'^k}\frac{\partial}{\partial x^l} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} V^k_{;j}\frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Es decir, que $V^k_{;j}$ se transforma como las componentes de un tensor de tipo $(1,1)$. Este tensor unívocamente determinado es esa derivada "absoluta" que buscábamos del campo vectorial $\vec{V}$, y la matriz de los $V^k_{;j}$ es el análogo de la matriz jacobiana en $\mathbb{R}^m$ (de hecho coincide con ella para la carta identidad)

Una manera alternativa de calcular los símbolos de Christoffel sin usar (2.5) directamente, pasa por notar que para cada par de campos de vectores en $\mathbb{R}^m$, digamos $\vec{e_i}, \vec{e_j}$, se tiene

$$\frac{\partial(\vec{e_i}\cdot\vec{e_j})}{\partial x^k} = \frac{\partial \vec{e_i}}{\partial x^k}\cdot\vec{e_j} + \vec{e_i}\cdot\frac{\partial \vec{e_j}}{\partial x^k}.$$

Tomando $\vec{e_l} = \partial_l$ y considerando el tensor métrico (usual) de $\mathbb{R}^m$, $G(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$, por (2.5) esta igualdad se escribe como

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \Gamma^l_{jk} g_{il}.$$

Lo cual establece un sistema lineal que junto con la simetría de Γ^k_{ij} permite calcular los símbolos de Christoffel en términos de la métrica sin pasar por derivadas segundas de la parametrización. Para simplificar éste y otros resultados, de ahora en adelante utilizaremos extensivamente una notación muy común consistente en *denotar las derivadas parciales escribiendo como subíndice una coma seguida del número de la variable.* Por ejemplo, las coordenadas del gradiente de una función f son simplemente $f_{,i}$ y la fórmula anterior se

[clp] El primer sumando indica cuánto varía el campo cuando el sistema de coordenadas está fijo, y el segundo cuánto varía el sistema de coordenadas si el campo está fijo. Cada una de estas cantidades no tiene carácter tensorial, pero la suma de ambas sí e indica la variación total del campo al pasar de un punto a otro cercano.

escribe como

$$g_{ij,k} = \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \Gamma^l_{jk} g_{il}.$$

Lema 2.2.1 : *Sea (g_{ij}) la matriz formada por las componentes de una métrica y sea (g^{ij}) la matriz inversa. Las únicas cantidades que verifican simultáneamente*

$$a) \quad \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \qquad b) \quad g_{ij,k} = \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \Gamma^l_{jk} g_{il}$$

son los símbolos de Christoffel dados por

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}).}$$

Observación: Los g^{ij} son las componentes de un tensor dos veces contravariante. Esto es, existe un tensor tal que sus componentes en cualquier carta conforman la matriz inversa de la matriz de componentes de la métrica.

Como regla mnemotécnica para recordar la fórmula de Γ^k_{ij}, nótese que en los subíndices aparecen las permutaciones cíclicas de ijm, y el signo negativo aparece cuando m está detrás de la coma.

DEM.: Como los índices i, j y k son arbitrarios, podemos permutarlos a nuestro antojo. Con lo cual $b)$ implica

$$\left(g_{ij,k} - \Gamma^l_{ik} g_{lj} - \Gamma^l_{jk} g_{il}\right) + \left(g_{jk,i} - \Gamma^l_{ji} g_{lk} - \Gamma^l_{ki} g_{jl}\right) - \left(g_{ki,j} - \Gamma^l_{kj} g_{li} - \Gamma^l_{ij} g_{kl}\right) = 0.$$

Que usando $a)$ y simplificando se escribe como

$$g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j} = 2\Gamma^l_{ik} g_{lj}.$$

Multiplicando por g^{jm} (nótese que $g_{lj} g^{jm} = \delta^m_l$) se obtiene

$$\frac{1}{2} g^{jm} (g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}) = \Gamma^m_{ik}$$

que cambiando el nombre de los índices es el resultado buscado. ∎

Ejemplo . Calcular los símbolos de Christoffel en $\mathbb{R}^2$ usando coordenadas polares.

Recordamos que la métrica usual en estas coordenadas era

$$dr^2 + r^2 d\theta^2$$

(en notación moderna $dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$). Entonces

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}.$$

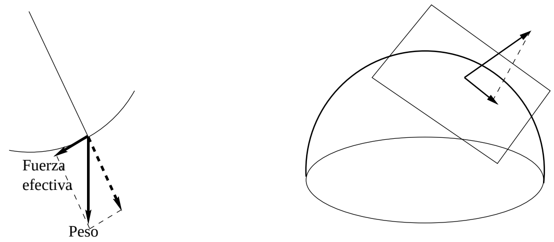
Como ambas matrices son diagonales, en la fórmula del resultado anterior podemos suponer $m = k$, porque otro valor de m contribuiría con un sumando nulo. Por consiguiente

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kk} (g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}).$$

De aquí se deduce, tras cálculos aburridos pero triviales

$$\Gamma^1_{11} = 0,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,\ \Gamma^1_{22} = -r,\ \Gamma^2_{11} = 0,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r},\ \Gamma^2_{22} = 0.$$

Hay un problema para generalizar toda la construcción anterior en $\mathbb{R}^m$ a subvariedades inmersas en $\mathbb{R}^n$ y es que en general $\partial \vec{V} / \partial x^j$ no pertenece al espacio tangente y por tanto no se puede escribir como combinación lineal de los ∂_k. La solución obvia es simplemente suprimir las componentes normales considerando únicamente la proyección sobre el espacio tangente. Esto tiene un significado físico claro (principio de d'Alambert [**La-Li**]): las fuerzas normales a las ligaduras no efectúan trabajo (por muy rápido que gire el tiovivo siempre suponemos que los caballitos están bien anclados y no van a salir despedidos, es decir, que es como si no sufrieran la fuerza centrífuga). Por ejemplo, en un péndulo simple se considera que las fuerzas normales están compensadas con la tensión de la cuerda.



Podemos ir todavía más allá y en cualquier variedad semiriemanniana (sin necesidad de estar inmersa en $\mathbb{R}^n$) definir los símbolos de Christoffel a través del Lema 2.2.1, e introducir la "derivada" $V^k_{;j} = V^k_{,j} + \Gamma^k_{ij} V^i$. (Para una definición más absoluta y general véase el Cap. 6 de [**Spi2**] y el Cap. 3 de [**ON**]. En especial el Teorema 11 y el Lema 8, respectivamente, afirman que ésta es la única definición sensata de derivada[clp]).

Definición: *Sea una variedad semiriemanniana con un campo de vectores que en cierta carta* $(\phi = (x^1, \dots, x^n), \mathcal{U})$ *se expresa como* $\vec{V} = V^i \partial_i$. *Se llama derivada covariante*

[clp] La teoría de conexiones todavía da una oportunidad a otro tipo más general de derivadas, las cuales trató de emplear Einstein en su intento, sin éxito, de unificar el campo gravitatorio y el electromagnético.

de $\vec{V}$ a un tensor de tipo $(1,1)$, que denotaremos $\nabla\vec{V}$, cuyas componentes son

$$V^i_{;j} = V^i_{,j} + \Gamma^i_{kj}V^k.$$

y, consecuentemente, se llama derivada covariante en la dirección x^j al vector

$$\nabla_j\vec{V} = V^i_{;j}\partial_i.$$

Ejemplo . Sea el campo vectorial constante $\partial/\partial x$ en $\mathbb{R}^2$. Calcular su derivada covariante en coordenadas polares.

La forma rápida de hacerlo es usar que su derivada covariante en coordenadas cartesianas es trivialmente nula (por ser el campo y los coeficientes de la métrica constantes), así que la tensorialidad implica que lo es con cualquier otro tipo de coordenadas. Si queremos emplear la definición (forma lenta), debemos utilizar los valores anteriormente hallados para los símbolos de Christoffel, obteniendo (recuérdese que ya habíamos visto que el campo $\partial/\partial x$ en polares era $(\cos\theta)\partial/\partial r - r^{-1}(\operatorname{sen}\theta)\partial/\partial\theta$)

$$\begin{aligned} V^1_{;1} =& V^1_{,1} + \Gamma^1_{k1}V^k = 0 + 0V^1 + 0V^2 = 0, \\ V^1_{;2} =& V^1_{,2} + \Gamma^1_{k2}V^k = -\operatorname{sen}\theta + 0V^1 + (-r)V^2 = 0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ya que generalizamos los campos de vectores a campos de tensores, podríamos tratar de extender la derivada covariante para que pueda aplicarse a uno-formas o campos tensoriales en general.

Por ejemplo, si $\widetilde{\omega}$ es un campo de uno-formas fijado, para cualquier campo de vectores $\vec{V}$, se tiene que $\widetilde{\omega}(\vec{V}) = \omega_i V^i$ es una función escalar. Derivando

$$f = \omega_i V^i \;\Rightarrow\; f_{,j} = \omega_{i,j}V^i + \omega_i V^i_{,j}$$

que puede ser escrito por la definición de derivada covariante como

$$f_{,j} - \omega_i V^i_{;j} = (\omega_{i,j} - \Gamma^k_{ij}\omega_k)V^i.$$

El primer miembro se transforma como un tensor de tipo $(0,1)$, así que el término entre paréntesis debe transformarse como un tensor de tipo $(0,2)$. Como mide la variación de $\widetilde{\omega}$, es lógico tomar como definición de derivada covariante de $\widetilde{\omega}$ el tensor de componentes

$$\omega_{i;j} = \omega_{i,j} - \Gamma^k_{ij}\omega_k.$$

Podríamos repetir el mismo razonamiento para tensores de tipos superiores aplicándolos a vectores y uno-formas hasta obtener un escalar. La conclusión es siempre la misma y es que cada índice contravariante (superíndice) contribuye con un símbolo de Christoffel positivo y cada índice covariante (subíndice) con uno negativo. Por ejemplo, para tensores de tipos $(0,2)$, $(1,1)$ y $(2,0)$ sería

$$\begin{aligned} T_{ij;k} &= T_{ij,k} - \Gamma^l_{jk}T_{il} - \Gamma^l_{ik}T_{lj} \\ T^i_{j;k} &= T^i_{j,k} - \Gamma^l_{jk}T^i_l + \Gamma^i_{lk}T^l_j \\ T^{ij}_{;k} &= T^{ij}_{,k} + \Gamma^j_{lk}T^{il} + \Gamma^i_{lk}T^{lj} \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Considerando, como habíamos convenido, las funciones como tensores de tipo $(0,0)$, por analogía, su derivada covariante no debe involucrar ningún símbolo de Christoffel y por tanto coincide con la derivada usual. Escribir todas las fórmulas posibles en una definición general es un poco lioso, por ello casi ningún autor lo hace (una excepción es [**Spi2**] p. 219). Nótese que la derivada *covariante* honra su nombre transformando un tensor r veces contravariante y s veces covariante en otro r veces contravariante y $s+1$ veces covariante.

Es un ejercicio comprobar que para cada de tensores T y S (digamos de tipo "bajo" para que podamos escribir la definición) se cumple[uff]

$$\nabla(S\otimes T) = (\nabla S)\otimes T + S\otimes \nabla T. \tag{2.7}$$

Igualando un subíndice y un superíndice, se tiene que esta regla del producto también se satisface si hay contracciones en vez de productos tensoriales. Por ejemplo

$$(S^i_jT^j_k)_{;l} = S^i_{j;l}T^j_k + S^i_jT^j_{k;l}, \qquad (S^iT_i)_l = (S^iT_i)_{;l} = S^i_{;l}T_i + S^iT_{i;l}, \quad \text{etc.}$$

Para practicar con estas notaciones, demostraremos lo que a veces se llama *lema de Ricci*.

Lema 2.2.2: *Sean δ^i_j, g_{ij} y g^{ij} como antes, entonces*

$$\delta^i_{j;k} = 0, \qquad g_{ij;k} = 0, \qquad g^{ij}_{;k} = 0.$$

DEM.: Según la definición

$$\delta^i_{j;k} = \delta^i_{j,k} - \Gamma^l_{jk}\delta^i_l + \Gamma^i_{lk}\delta^l_j = 0 - \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{jk} = 0.$$

Por la definición y la fórmula del Lema 2.2.1

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - \Gamma^l_{jk}g_{il} - \Gamma^l_{ik}g_{lj} = 0.$$

Se podría demostrar de forma parecida, aunque más elaborada, que $g^{ij}_{;k} = 0$ pero es más sencillo relacionar los tres tensores. Por la regla del producto

$$\delta^i_l = g^{ij}g_{jl} \;\Rightarrow\; \delta^i_{l;k} = g^{ij}_{;k}g_{jl} + g^{ij}g_{jl;k} \;\Rightarrow\; 0 = g^{ij}_{;k}g_{jl}.$$

[uff] El producto tensorial lo único que hace es añadir índices y basta hacer la derivada correspondiente a los primeros y añadirle la correspondiente a los otros.

Como g_{jl} es no singular, se deduce $g^{ij}_{;k} = 0$. ■

La primera igualdad del lema es muy intuitiva. A fin de cuentas δ^i_j es algo así como el *tensor identidad*. La segunda (y por tanto la tercera) lo parece menos, pero no es más que el trasunto de la sencilla fórmula en $\mathbb{R}^n$

$$(\vec{v} \cdot \vec{w})_{,k} = \vec{v}_{,k} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}_{,k}.$$

Ya que si queremos reemplazar "$\cdot$" por una métrica cualquiera tenemos que pedir que no haga falta derivar sus componentes porque de otro modo aparecerían términos adicionales.

Hasta ahora las componentes $V^k_{;j}$ de la derivada covariante dan una especie de matriz jacobiana tal que, al menos para subvariedades inmersas en $\mathbb{R}^n$, da la "verdadera" derivada en el sentido de (2.6) (proyectando el primer término sobre el espacio tangente si no pertenece a él). Si quisiéramos estudiar esta derivada a lo largo de una curva debiéramos considerar

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^j}\frac{dx^j}{d\lambda}.$$

proyectado en el espacio tangente, donde $(x^1(\lambda), \ldots, x^m(\lambda))$ son las coordenadas de la curva después de aplicar la carta correspondiente y se sobreentiende que $d\vec{V}/d\lambda$ requiere sustituir $\vec{V}$ en estas coordenadas antes de derivar. En general, dada una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ denotaremos siempre sus <u>coordenadas locales</u> $\phi \circ \gamma$ mediante $(x^1(\lambda), \ldots, x^m(\lambda))$ en cada cada carta $(\phi = (x^1, \ldots, x^m), \mathcal{U})$. Sustituyendo la fórmula anterior en (2.6) llegamos a que hay una forma natural de definir la derivada a lo largo de una curva (esto es como la derivada direccional pero con direcciones no necesariamente rectas).

DEFINICIÓN: *Sea γ una curva diferenciable en una variedad semiriemanniana conectando dos puntos p y q, y sea $\vec{V}$ un campo de vectores definido en la imagen de γ. Se llama <u>derivada covariante de $\vec{V}$ a lo largo de γ</u> a*

$$\frac{D\vec{V}}{d\lambda} = \left(\frac{dV^k}{d\lambda} + \Gamma^k_{ij} V^i \frac{dx^j}{d\lambda}\right)\partial_k.$$

Si $D\vec{V}/d\lambda = 0$ se dice que $\vec{V}$ es un <u>transporte paralelo</u> a lo largo de γ (o también que $\vec{V}(p)$ se transporta paralelamente en $\vec{V}(q)$ a lo largo de γ).

Nótese que por lo dicho anteriormente, la derivada covariante de $\vec{V}$ a lo largo de una curva, no es más que la proyección sobre el espacio tangente de la derivada usual de $\vec{V}$ evaluada en la curva (siempre que estemos en subvariedades de $\mathbb{R}^n$).

Pensemos de nuevo en términos mecánicos. Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ representa la trayectoria de una partícula en función del tiempo, entonces $\vec{V} = d\gamma/d\lambda$ es un campo de vectores a lo largo de γ que representa la velocidad y $D\vec{V}/d\lambda$ es la aceleración dentro de la variedad. La ecuación de movimiento de las partículas "libres" (en el sentido de que no sufren fuerzas externas) debe cumplir que esta derivada se anula porque la aceleración es cero. Las curvas recorridas por estas partículas se llaman geodésicas y a lo largo de ellas la velocidad se transporta paralelamente. Su importancia en este curso es tanta que prácticamente podemos olvidar aquí la definición anterior en favor de la siguiente (siempre que recordemos su origen).

DEFINICIÓN: *Se dice que una curva en una variedad semiriemanniana es una* <u>*geodésica*</u> *si se cumple la ecuación*

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}=0.$$

<u>Observación</u>: Los teoremas básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias implican que dado un punto en una variedad hay exactamente una geodésica una vez especificado el vector tangente inicial. En términos físicos esto es totalmente evidente: desde cada punto de la variedad podemos lanzar una partícula en cada dirección y la velocidad inicial determina su movimiento. Nótese que la parametrización de una geodésica es relevante, no sólo su imagen, porque si variamos la velocidad a la que se recorre la geodésica de forma no homogénea el resultado puede no corresponder a la ecuación de movimiento de una partícula no sometida a fuerzas (véase el Lema 2.2.4 y los comentarios anteriores)[uff].

La fórmula que define las geodésicas es poco útil desde el punto de vista práctico por dos razones:

1) El esfuerzo computacional que hay que realizar para calcular los símbolos de Christoffel es grande incluso para dimensión dos o tres. En dimensión cuatro, que es nuestro objetivo, hay $4\times4\times4=64$ símbolos de Christoffel y empleando la simetría sólo se reducen a 40.

2) Puede ser muy difícil interpretar el resultado geométricamente. Por ejemplo, (la imagen de) las geodésicas en S^2 son los círculos máximos pero como no todos ellos tienen una ecuación sencilla en las coordenadas habitualmente usadas (esféricas), no podemos esperar una solución sencilla de la ecuación que define las geodésicas.

[uff] Para los que no entiendan nada de estas explicaciones mecánicas: Si dejamos a una partícula viajar a sus anchas en el espacio, su velocidad es constante $d\vec{v}/dt=\vec{0}$ y la partícula sigue una trayectoria recta $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}t$. Cuando la partícula vive en una subvariedad puede ser difícil saber si la velocidad es constante porque el sistema de coordenadas puede no ser adecuado. Para detectarlo, hemos introducido una derivada rara llamada covariante, que se escribe con mayúscula. Pero $D\vec{v}/dt=\vec{0}$ no tiene, en general, un dibujo sencillo. De todos modos, sea cual sea la trayectoria no es lo mismo recorrerla a trompicones que de seguido, esto es, la parametrización importa.

El segundo problema parece difícil de resolver porque hay una componente sicológica en lo que consideramos una curva geométricamente sencilla. Sin embargo el primer problema alberga más esperanzas para una posible solución técnica.

Para ilustrar la situación analicemos el último ejemplo citado.

Ejemplo . Si parametrizamos S^2 en esféricas (θ, φ)

$$x = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \cos\theta,$$

la métrica inducida (por $\mathbb{R}^3$) es en notación clásica

$$\begin{aligned} ds^2 =& (\cos\varphi\cos\theta\, d\theta - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta\, d\varphi)^2 + (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\, d\theta + \cos\varphi \operatorname{sen}\theta\, d\varphi)^2 + (-\operatorname{sen}\theta\, d\theta)^2 \\ =& d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2. \end{aligned}$$

De nuevo, como la métrica es diagonal hay una gran simplificación en la fórmula del Lema 2.2.1 pudiéndose tomar $m = k$. Después de algunos cálculos tediosos se llega a que todos los símbolos de Christoffel son nulos excepto

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \Gamma_{22}^1 = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Por lo cual la ecuación de las geodésicas $\big(\theta(\lambda), \varphi(\lambda)\big)$ es

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\Big(\dfrac{d\varphi}{d\lambda}\Big)^2 = 0 \\ \\ \dfrac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{d\theta}{d\lambda}\dfrac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \end{cases}$$

Aunque es difícil, por las razones antes explicadas, hallar la solución general de este sistema; a simple vista se obtiene[clp] la solución $\theta(\lambda) = \pi/2$, $\varphi(\lambda) = C\lambda$. Ésta es la ecuación del ecuador (recorrido a diferentes velocidades según C). De la simetría de la esfera se deduce que todos los círculos máximos parametrizados proporcionalmente al ángulo también son geodésicas y no puede haber más por la unicidad (sólo una geodésica por punto y vector velocidad).

Es un poco exasperante que el cálculo de los símbolos de Christoffel, y por tanto de las ecuaciones geodésicas, sea tan engorroso para llegar a resultados sencillos. De acuerdo con **[Mi-Th-Wh]**: "*Si la respuesta a un problema o el resultado de un cálculo no es simple, no*

[clp] La "simple vista" también puede funcionar encontrando las geodésicas $\theta(\lambda)=C_1\lambda$, $\varphi(\lambda)=C_2$, que son los meridianos.

hay una manera simple de obtenerlo. Pero cuando cálculos largos conducen a un resultado breve, entonces uno busca un método mejor".

Uno de esos métodos es el método lagrangiano. Su motivación física es tan grande que no omitiremos aquí una explicación para los que tengan conocimientos suficientes de Mecánica. Los comentarios entre paréntesis pueden ser útiles para el resto, de todas formas volveremos sobre ello en el próximo capítulo.

Si la partícula realmente constituye en sí misma un sistema cerrado, no sometido a fuerzas externas, su lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$ (sólo hay energía cinética, $E_c = mv^2/2$). En coordenadas generalizadas

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \, \dot{x}^i g_{ij} \, \dot{x}^j$$

(el producto escalar en una subvariedad debe hacerse con la métrica inducida. El símbolo $\dot{x}^i$ es la abreviatura usual en Física para la derivada $dx^i/d\lambda$ donde λ representa el tiempo, así que $\dot{x}^i \partial_i$ evaluado en la curva es la velocidad). Según el principio de mínima acción $\int \mathcal{L} d\lambda$ debe ser mínimo para la trayectoria $\big(x^1(\lambda), \dots, x^m(\lambda)\big)$ de la partícula (las leyes de la Física son tales que nunca se gasta energía en balde) y por tanto se verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange (éste es un problema matemático nada trivial que trataremos en la Porposición 2.2.5: probar que el camino que minimiza una especie de integral de línea satisface cierta ecuación diferencial)

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \, \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0.$$

Por consiguiente éstas son las ecuaciones de las geodésicas y comparando con la definición de geodésica se obtienen los símbolos de Christoffel. Nótese que el factor $m/2$ es irrelevante y se puede suprimir a efectos prácticos.

Éste es un ejemplo que ilustra cómo muchas veces los conocimientos físicos y la intuición asociada nos permiten dar pasos de gigante en razonamientos matemáticos. En este caso la demostración matemática será más bien una comprobación de que la conclusión final a la que hemos llegado por otros métodos es correcta.

Proposición 2.2.3 : *Sea una variedad semiriemanniana m-dimensional y sean g_{ij} las componentes del tensor métrico en cierta carta. Entonces cada geodésica $\big(x^1(\lambda), \dots, x^m(\lambda)\big)$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \, \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0.$$

donde $\dot{x}^i = dx^i/d\lambda$ y $\mathcal{L}$ es el <u>*lagrangiano*</u> *asociado a la métrica dado por*

$$\mathcal{L} = g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j.$$

<u>Dem.</u>: Derivando

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\dot{x}^k}\right) = \frac{d}{d\lambda}(2g_{kj}\,\dot{x}^j) = 2g_{kj,i}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j + 2g_{kj}\,\ddot{x}^j, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k} = g_{ij,k}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j.$$

Donde los dos puntos indican derivada segunda. Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir, por tanto, como

$$2g_{kj}\,\ddot{x}^j - g_{ij,k}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j = -2g_{kj,i}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j.$$

En el segundo miembro podemos renombrar arbitrariamente los índices de sumación i y j. Si los intercambiamos y sumamos las ecuaciones resultantes, se deduce

$$g_{kj}\,\ddot{x}^j + \frac{1}{2}(g_{kj,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k})\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j = 0.$$

Multiplicando por g^{lk} se obtiene la ecuación de las geodésicas. ■

Veamos cómo se puede emplear el resultado anterior para calcular muy rápido los símbolos de Christoffel.

<u>Ejemplo</u> . Para calcular los símbolos de Christoffel en S^2, partimos del lagrangiano asociado a la métrica inducida (véase el ejemplo anterior)

$$\mathcal{L} = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

Y se obtiene inmediatamente

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = 2\ddot{\theta},\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 2\,\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta,\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 2\,\ddot{\varphi}\,\operatorname{sen}^2\theta + 4\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta,\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0.$$

Por consiguiente las ecuaciones de las geodésicas son

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\ \dot{\varphi}^2 = 0 \\[2ex] \ddot{\varphi} + 2\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

que comparadas con la definición implican $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta$, $\Gamma^1_{22} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y que el resto de los símbolos de Christoffel son cero.

Veamos otra propiedad de las geodésicas que tiene una palmaria interpretación física: El vector tangente a una geodésica no puede variar su longitud porque los cambios de velocidad en la partícula que representa provocarían aceleraciones tangenciales y no sería una partícula no sometida a fuerzas externas.

Lema 2.2.4 : *Sea M una variedad semiriemanniana con métrica G y sea $\vec{v}(\lambda)$ el vector tangente de una geodésica en función de su parámetro, entonces $G\big(\vec{v}(\lambda), \vec{v}(\lambda)\big)$ es constante.*

<u>DEM.</u>: La derivada covariante a lo largo de una curva es como un caso particular de la derivada covariante, así que hereda sus propiedades. En particular, por la regla del producto y el Lema 2.2.2 se tiene (nótese que para funciones escalares la derivada covariante es la derivada usual)

$$\frac{d}{d\lambda}\big(G(\vec{v}, \vec{v})\big) = G\big(\frac{D\vec{v}}{d\lambda}, \vec{v}\big) + G\big(\vec{v}, \frac{D\vec{v}}{d\lambda}\big).$$

Y por ser una geodésica $D\vec{v}/d\lambda = 0$. ■

Según el lema anterior, dada una geodésica en una variedad riemanniana, quizá cambiando λ por $C\lambda$ con $C > 0$, podemos conseguir $G\big(\vec{v}(\lambda), \vec{v}(\lambda)\big) = 1$. Esto quiere decir que la geodésica está parametrizada por longitud de arco. De algún modo las distancias (pequeñas) en la variedad son lo mismo que en las geodésicas y se "realizan" a lo largo de ellas; al igual que en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, la curva que realiza la distancia $\sqrt{2}$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ es la recta que los une. Una vez más, las geodésicas se muestran como análogos de las rectas. Un resultado concreto en este sentido es el teorema de Hopf-Rinow (véase **[ON]** p. 180) que asegura que bajo condiciones topológicas adecuadas es posible definir una buena distancia que asigna a cada par de puntos lo que mide la menor geodésica que los une. En las subvariedades (con la métrica inducida) esta distancia genera la topología usual.

Para terminar y a modo de apéndice, veamos el interesante resultado matemático que permite deducir las misteriosas ecuaciones de Euler-Lagrange del principio de mínima acción y que constituye la base del Cálculo de Variaciones.

Proposición 2.2.5 : *Sea $\mathcal{L} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de funciones $y \in C^1([a,b])$ cumpliendo $y(a) = c$, $y(b) = d$. Si la integral*

$$\int_a^b \mathcal{L}(y(x), y'(x), x)dx \qquad (\text{con } y'(x) = \frac{dy}{dx})$$

alcanza su mínimo para alguna $y_0 \in \mathcal{C}$, entonces y_0 debe ser solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0.$$

<u>DEM.</u>: Si

$$\int_a^b \mathcal{L}(y_0(x), y_0'(x), x)dx$$

es mínima, como $y_0(x) + \epsilon\eta(x) \in \mathcal{C}$ para cualquier $\eta \in C^\infty$ con $\eta(a) = \eta(b) = 0$, la función real

$$f(\epsilon) = \int_a^b \mathcal{L}(y_0(x) + \epsilon\eta(x), y_0'(x) + \eta'(x), x)dx$$

tiene un mínimo en $\epsilon = 0$. Por consiguiente

$$0 = f'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\eta'\right).$$

Aplicando integración por partes al segundo sumando del integrando y usando que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ se tiene

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\right)\right)\eta.$$

como η es una función C^∞ arbitraria salvo porque se anula en los extremos, la única posibilidad es que el otro factor sea nulo. ■

Problemas 2.2

$\rightarrow$**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si los coeficientes del tensor métrico son constantes, ¿a qué es igual la derivada covariante?

ii) ¿Por qué en dimensión 4 hay como mucho 40 símbolos de Christoffel distintos? ¿Cuántos hay en dimensión 5?

iii) ¿Se podrían calcular los símbolos de Christoffel en el Lema 2.2.1 usando *b*) pero no *a*)?

iv) Si las coordenadas de un tensor son nulas en una base lo son en todas. ¿Por qué entonces, en $\mathbb{R}^2$ los símbolos de Christoffel son nulos usando coordenadas cartesianas y no todos nulos usando coordenadas polares?

v) ¿Qué significado (aunque sea intuitivo) se puede dar a la frase tomada de un libro de relatividad ([**Sc**] p. 138):"Como una función escalar no depende de los vectores de la base, su derivada es lo mismo que su derivada covariante"?

vi) Si T es un tensor y f una función escalar, ¿cuál es la derivada covariante de fT?

vii) ¿Por qué una partícula ligada a una esfera sobre la que no actúan fuerzas externas no puede seguir un paralelo que no sea el ecuador? Tratar de dar dos explicaciones, una matemática y otra física.

viii) La ecuación de las geodésicas es invariante al cambiar λ por $a\lambda + b$, $a \neq 0$, ¿por qué esto no contradice la unicidad de las geodésicas?

→**2)** Comprobar que la solución que se da en el Lema 2.2.1 realmente resuelve las ecuaciones a) y b).

→**3)** Comprobar los cálculos que llevan a los símbolos de Christoffel en $\mathbb{R}^2$ usando coordenadas polares.

4) En este problema demostraremos que los símbolos de Christoffel no son componentes de un tensor, sino que al cambiar de la carta $(\phi, \mathcal{U})$ a $(\phi', \mathcal{U}')$ se transforman siguiendo la fórmula

$$\Gamma'^{a}_{\ bc} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^b}\frac{\partial x^k}{\partial x'^c}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^b \partial x'^c}.$$

Para ello seguiremos los siguientes apartados:

a) Probar que

$$\frac{\partial g'_{bc}}{\partial x'^a} = \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^a \partial x'^b}\frac{\partial x^k}{\partial x'^c} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^a \partial x'^c}\frac{\partial x^k}{\partial x'^b}\right) g_{jk} + \frac{\partial x^j}{\partial x'^b}\frac{\partial x^k}{\partial x'^c}\frac{\partial x^l}{\partial x'^a}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}.$$

b) Deducir que

$$\frac{\partial g'_{ab}}{\partial x'^c} + \frac{\partial g'_{ca}}{\partial x'^b} - \frac{\partial g'_{bc}}{\partial x'^a} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^b}\frac{\partial x^k}{\partial x'^c}\frac{\partial x^l}{\partial x'^a}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right) + 2\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^b \partial x'^c}\frac{\partial x^k}{\partial x'^a} g_{jk}.$$

c) Demostrar que la fórmula anterior implica la del del enunciado.

5) Demostrar directamente, usando el resultado del problema anterior, que la derivada covariante de un campo vectorial se transforma como las componentes de un tensor. Nótese que sólo lo habíamos comprobado para subvariedades inmersas en $\mathbb{R}^n$. (*Indicación*: Utilizar la fórmula

$$0 = \frac{\partial \delta^\alpha_\gamma}{\partial x^\eta} = \frac{\partial\big(\partial x'^\alpha/\partial x^\beta \cdot \partial x^\beta/\partial x'^\gamma\big)}{\partial x^\eta} = \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\eta \partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\eta \partial x'^\gamma}$$

para simplificar los cálculos).

6) Probar la afirmación de que los g^{ij} son componentes de un tensor dos veces contravariante, es decir, que existe un tensor de tipo $(2,0)$ cuyas componentes en cada carta conforman una matriz que es la inversa de la matriz de componentes de la métrica.

7) Para motivar la definición de derivada covariante de una uno-forma habíamos empleado que si se da la igualdad

$$S_i = M_{ij}T^j$$

en cada carta y S_i se transforma como un tensor de tipo $(0,1)$ y para cada tensor arbitrario, T^j, de tipo $(1,0)$, entonces M_{ij} lo hace como un tensor $(0,2)$. Probar esta afirmación. (<u>Nota</u>: A veces a esta propiedad y sus generalizaciones se le llama *regla del cociente*).

→**8)** Probar $\nabla(S\otimes T) = (\nabla S)\otimes T + S\otimes\nabla T$ cuando S y T son campos vectoriales o de uno-formas.

9) Tratar de deducir la fórmula para $T_{ij;k}$ igual que lo hicimos para uno-formas.

10) Demostrar que

$$(T^i_k T^k_j)_{;l} = T^i_{k;l}T^k_j + T^i_k T^k_{j;l}.$$

∗**11)** Usando directamente la definición de derivada covariante y la relación $g^{ir}g_{rj} = \delta^i_j$, probar que $g^{ij}_{;k} = 0$.

→**12)** Demostrar que

$$r = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^{-1} \qquad \text{con} \quad \theta = \arctan\frac{\lambda}{\sqrt{2}-\lambda}$$

define una geodésica en $\mathbb{R}^2$ con la métrica en polares $dr^2 + r^2d\theta^2$. (*Indicación*: No es necesario siquiera escribir la ecuación de las geodésicas).

13) Calcular las geodésicas con θ constante usando la métrica $dr^2 - r^2d\theta^2$.

14) Comprobar que

$$x(\lambda) = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}, \qquad y(\lambda) = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1}, \qquad z(\lambda) = 0 \qquad t\in\mathbb{R}$$

define el ecuador de S^2 (salvo un punto). Deducir del Lema 2.2.4 que no satisface la ecuación de las geodésicas y explicar la aparente contradicción.

15) Comprobar con detalle los cálculos de la Proposición 2.2.3.

$\rightarrow$**16)** Calcular los símbolos de Christoffel para la métrica $dr^2 + 4\,\mathrm{senh}^2\, r\, d\theta^2$ y hallar alguna de las geodésicas.

17) Consideremos una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ (con la métrica inducida). Probar que si $\vec{V}(p)$ se transporta paralelamente en $\vec{V}(q)$ a lo largo de γ y $\vec{W}(p)$ se transporta paralelamente en $\vec{W}(q)$, entonces

$$a)\ ||\vec{V}(p)|| = ||\vec{V}(q)||, \quad ||\vec{W}(p)|| = ||\vec{W}(q)||,$$

$$b)\ \text{ang.}\big(\vec{V}(p), \vec{W}(p)\big) = \text{ang.}\big(\vec{V}(q), \vec{W}(q)\big),$$

donde "ang." indica el ángulo.

$\rightarrow$**18)** Calcular los símbolos de Christoffel para $\mathbb{R}^3$ usando coordenadas esféricas (r, θ, φ). (*Indicación*: Como $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ son ortogonales, de antemano sabemos que en la métrica no aparecerán los términos cruzados $dr\, d\theta$, $dr\, d\varphi$, $d\theta\, d\varphi$, lo cual simplifica los cálculos iniciales).

$\rightarrow$**19)** Calcular los símbolos de Christoffel y las geodésicas de $\mathbb{R}^2$ con la métrica

$$du^2 + 4v du dv + 8v^2 dv^2.$$

$\rightarrow$**20)** Calcular los símbolos de Christoffel y alguna geodésica del semiplano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con la métrica de Poincaré $y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2$.

21) Consideremos como antes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con la métrica $y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2$.

a) Demostrar que la transformación $x = -X/(X^2 + Y^2)$, $y = Y/(X^2 + Y^2)$ es una isometría, esto es, que deja invariante la métrica.

$*$b) Calcular la ecuación de alguna geodésica para la que x no sea constante.

$\rightarrow$**22)** Considérese la banda $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < 1\}$ con la métrica definida por

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - x^2)^2} dx^2 + xy dx dy + (1 + x^2 + y^2) dy^2.$$

Utilizar el Lema 2.2.4 para calcular las geodésicas horizontales de M sin necesidad de hallar los símbolos de Christoffel.

23) En los siguientes apartados vamos a resolver el problema clásico de la *braquistocrona* que data de finales del siglo XVII y consiste en hallar la forma, $y = y(x)$, del tobogán que permita bajar más rápido del punto $(0,1)$ a $(1,0)$ sin darse impulso inicial.

a) Utilizar la conservación de la energía, $\frac{1}{2}mv^2+mgh = \text{cte}$, para probar que cualquiera que sea la forma del tobogán, a altura $0 \le y \le 1$ la velocidad es

$$v = \sqrt{2g(1-y)}.$$

b) Usando $v = ds/dt$, donde s es el espacio recorrido sobre la curva, y el apartado anterior, demostrar que el tiempo total de caída viene dado por la fórmula

$$T = \int_0^1 \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2g(1-y(x))}} dx.$$

c) Aplicar la Proposición 2.2.5, sin preocuparse de las condiciones de regularidad y simplificar hasta obtener la ecuación

$$\frac{2y''}{1+(y')^2} = \frac{1}{1-y}.$$

Deducir que el tobogán buscado está siempre (salvo en los extremos) por debajo del tobogán recto usual.

d) Multiplicar por y' e integrar para llegar a una ecuación de primer orden con variables separables cuya solución se escribe como

$$-\int \sqrt{\frac{1-y}{A-1+y}}\, dy = x$$

donde A es una constante.

e) Con el cambio $y = 1 - A(1-\cos\lambda)/2$ deducir que la solución general de la ecuación diferencial es, en forma paramétrica,

$$\begin{cases} x = \dfrac{A}{2}(\lambda - \operatorname{sen}\lambda) + B \\ \\ y = 1 - \dfrac{A}{2}(1-\cos\lambda). \end{cases}$$

f) Sustituyendo las condiciones iniciales, concluir $B = 0$ y que $A \approx 1'145834\ldots$ con lo cual la forma del tobogán viene dada por la curva, llamada braquistocrona (*brachis*= breve, *cronos* = tiempo), que puede parametrizarse como

$$\sigma(\lambda) = \big(C(\lambda - \operatorname{sen}\lambda), 1 - C(1-\cos\lambda)\big) \qquad \text{con } \ C \approx 0'572917\ldots$$

24) Sea M una variedad semiriemanniana en sentido estricto, esto es, con tensor métrico definido positivo, y consideremos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}.$$

a) Demostrar las fórmulas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,\dot{x}^i} = \mathcal{L}^{-1} g_{ij}\,\dot{x}^j, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = (2\mathcal{L})^{-1} g_{kj,i}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^j,$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,\dot{x}^i}\right) = -\mathcal{L}^{-2}\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} g_{ij}\,\dot{x}^j + \mathcal{L}^{-1} g_{ij,k}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^j + \mathcal{L}^{-1} g_{ij}\,\ddot{x}^j.$$

b) Probar que $g_{ij,k}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^j = (g_{ij,k} + g_{ik,j})\,\dot{x}^k\,\dot{x}^j/2$ y utilizar esta fórmula para escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange como

$$-\mathcal{L}^{-1}\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} g_{ij}\,\dot{x}^j + g_{ij}\,\ddot{x}^j + \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i})\,\dot{x}^k\,\dot{x}^j = 0.$$

c) Utilizar el Lema 2.2.4 y la definición para demostrar que las geodésicas satisfacen las ecuaciones halladas en el apartado anterior.

Nota: Esto prueba que las geodésicas no sólo son localmente curvas de "mínima energía" sino también de mínima longitud o, teniendo en cuenta que la velocidad es constante, de mínimo tiempo. Por ello las rectas son las líneas más cortas uniendo dos puntos en $\mathbb{R}^n$. Esto no se aplica al problema de la braquistocrona porque hay fuerzas externas (la gravedad) y habría que modificar el lagrangiano para incluirlas.

Historias en titulares:

El Heraldo de Hannover

Acaba de ser publicada la obra de C.F. Gauss titulada *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Este trabajo ha visto la luz después de que su autor haya estado involucrado durante años en enormes cálculos y mediciones geodésicas motivados por una orden gubernamental para elaborar un mapa preciso del ducado de Hannover.

1828

Línea y Forma

La contribución de B. Riemann a la Geometría diferencial ha permanecido en el olvido durante algún tiempo y E.B. Christoffel ha sido uno de los primeros en acercarse a ella. En un reciente trabajo ha considerado los elementos de línea en las superficies como formas cuadráticas y ha estudiado las propiedades que han de tener para que den lugar a las mismas geometrías. Para ello ha introducido ciertos símbolos que dependen de tres índices.

1870

A la deriva

En su último trabajo, H. Weyl ha generalizado el transporte paralelo de Levi-Civita a través de ciertas extensiones de la derivada covariante. Éste es uno de los primeros trabajos matemáticos abstractos motivados por la Teoría General de la Relatividad y parece que podría tener aplicaciones en la unificación del campo electromagnético y el gravitatorio. Una vez más los vaivenes de la Ciencia muestran la continua interrelación entre la Física y las Matemáticas

1919

¿Qué hay que saberse?:

Todo. En realidad, como ya hemos mencionado, la derivada covariante a lo largo de una curva (y el transporte paralelo) apenas aparecerá más adelante; sin embargo está tan relacionada con la definición de geodésica, importantísima en este curso, que es difícil separar ambos conceptos. Las ideas principales que hay que extraer de esta sección son:

• El plano tangente en una subvariedad va cambiando de punto en punto y por ello hay que sustituir la derivada usual por la derivada covariante. Ésta añade a la anterior una combinación lineal de los llamados símbolos de Christoffel que tiene en cuenta las variaciones métricas asociadas a los cambios en los sistemas de referencia.

• La derivada covariante actúa sobre todo tipo de tensores aplicando los de tipo (r, s) en otros de tipo $(r, s+1)$. Las componentes del tensor obtenido se suelen denotar añadiendo un nuevo subíndice precedido de un punto y coma.

• La derivada covariante se puede particularizar a una curva y si al aplicarse a sus vectores tangentes (velocidades) se anula, entonces se dice que la curva es una geodésica. Dichas geodésicas están determinadas por las ecuaciones

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} = 0$$

y físicamente corresponden a las trayectorias de partículas ligadas a la variedad sobre las que no actúan fuerzas externas (aceleración nula).

• Utilizando un "principio de mínima acción" se pueden simplificar en muchos casos los cálculos de los símbolos de Christoffel.

Además de estas ideas generales, hay que saberse de memoria la fórmula de la derivada covariante y de los símbolos de Christoffel, y cómo calcular éstos en ejemplos concretos con el método lagrangiano.

¿Para qué sirve?:

Para saber cómo se mueven las partículas conociendo la variedad que definen sus ligaduras. Por si esto suena a poco se le puede dar forma de fábula:

Año 2005, por fin te ha contratado una prestigiosa empresa de *software* de videojuegos. Falta poco para la campaña de Navidad y hay que lanzar "*Total skater*", un juego que puede ser revolucionario por incluir un número indefinido de paisajes o superficies, que cambian aleatoriamente cada vez que se juega, sobre los que el protagonista debe patinar a velocidad de vértigo. Los gráficos y el sonido están preparados pero no se ha logrado un movimiento realista sin incluir infinitos efectos de cámara que exceden la capacidad de la máquina. Cuando los plazos se echan encima hay que hacer una recolección rápida de tonterías y agarrarse a lo mejor. En el mundo de la tecla lo llaman *brainstorm.* Tímidamente expones tu idea al jefe de grupo:

-¿Y no se podría pasar de la métrica del paisaje a la ecuación de las geodésicas y resolverlas numéricamente? Si quiere voy a probarlo y le muestro el resultado en unas horas usando algunos integradores míos que tengo por ahí de Numérico II.

El jefe de grupo tiene un tic en una ceja pero accede porque es lo más parecido a echarte de la reunión por minar la moral del grupo. Tras unas horas de cuatro días, le muestras un monigote viajando deprisa por un elipsoide. Con unos cuantos *clicks*, aparecen unos baches en el elipsoide y el movimiento del patinador se altera consecuentemente. El jefe está atónito. Tratas de explicarle que esto de las geodésicas ya existía en el siglo XIX, que lo viste en la carrera, que la derivada covariante se anula, que se usa en relatividad general. Te asalta la duda del profesor: las explicaciones sólo son útiles para los que no las necesitan.

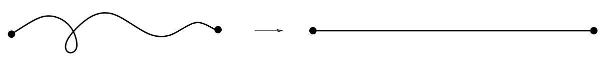
El juego ha sido un éxito en el mercado. En la publicidad, la página *web* y el acto de presentación, aparece el lema "*Total skater*: Diseñado utilizando las teorías de Einstein". Tu nombre se muestra en el lugar vigésimo tercero en la pantalla de créditos, tienes una plaza de aparcamiento, un aumento y una fama de estar en las nubes que te permite llevar vaqueros sin que te reprendan. Además te has divertido.

2.3. Los tensores de Riemann y de Ricci

Anticipándonos al contenido de secciones posteriores, diremos que una de las ideas clave de Einstein fue descartar la imagen clásica de la fuerza gravitatoria como una acción a distancia sobre las partículas, en favor de la idea de gravedad como una deformación del espacio(-tiempo) en el que se mueven dichas partículas. Esta deformación se mide por medio de cierta curvatura que según las ecuaciones de Einstein es, en cierto sentido, proporcional a la densidad de masa y energía.

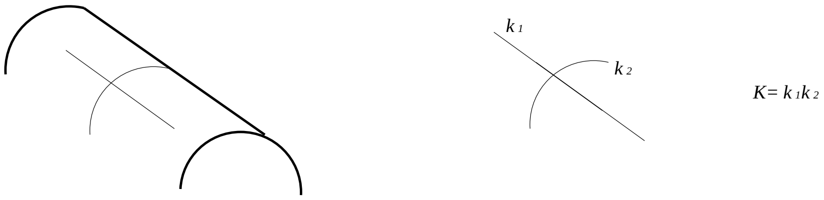
Si queremos materializar esta idea debemos aprender, como hizo Einstein (gracias a su amigo matemático y antiguo compañero M. Grossmann), suficiente Geometría Diferencial como para entender qué es el tensor de Riemann. Hoy en día podemos encontrar toda la información en cualquier libro avanzado de Geometría, pero a principios del siglo XX no era tan fácil (véase parte de la cronología en [**Spi2**] p. 217), lo cual añade todavía más mérito a Einstein.

Comencemos por algunos conceptos que debieran ser bien conocidos. Supongamos una variedad unidimensional, esto es, una curva, digamos inmersa en $\mathbb{R}^3$. Por lo que sabemos de Cálculo de una variable, al menos en el plano la derivada segunda indica la curvatura (convexidad y concavidad) pero tiene el incoveniente de que depende de la posición en que miremos a la curva. Por ejemplo $y = x^3$ cumple $y''(0) = 0$ (¿poco curvada?) pero si giramos la cabeza 90º veremos $y = -x^{1/3}$ que cumple $y''(0) = \infty$ (¿muy curvada?). El *triedro de Frenet* nos da un sistema de referencia absoluto en el cual la curvatura es el módulo de la derivada segunda. Sin embargo dicha curvatura no depende intrínsecamente de las propiedades métricas de la curva sino de la manera en que está inmersa en $\mathbb{R}^3$. Como prueba práctica, nótese que cualquier porción curvada de hilo inextensible es lo mismo que un segmento, basta tirar de los extremos. Ningún microorganismo miope que viva en el interior del hilo notará cambios en las distancias tras esta transformación. Paradójicamente, las curvas no tienen curvatura en sentido intrínseco.

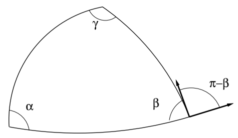


En el caso de superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$, Gauss definió la curvatura en cada punto como el producto de las curvaturas máxima y mínima de las curvas que se obtienen mediante cortes perpendiculares de la superficie en cada punto. Aunque la definición sugiere todo lo contrario, la curvatura de Gauss, K, sólo depende de las propiedades métricas de la superficie (de los g_{ij}) y no de la manera en que está inmersa en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, por mucho que combemos un folio (sin hacer la trampa de arrugarlo porque suponemos las variedades C^∞), K será siempre cero en cada punto (siempre podemos curvar cierta dirección pero no la perpendicular). Este resultado es tan sorprendente y relevante que cuando Gauss lo probó dijo que era un *Teorema Egregio* (véase la cita concreta en [**Spi2**],

p. 111) y desde entonces ha conservado ese nombre.



En la exposición de la Teoría de Superficies desde Gauss hasta nuestros días, se suele partir de la definición de curvatura para probar el Teorema Egregio con unas complejas fórmulas (véase [**Po**] y [**Ca**]) y se culmina la teoría con el Teorema de Gauss-Bonnet. Éste es el orden lógico pero no cronológico, porque, según podemos comprobar en [**Spi2**] p. 125, originariamente Gauss dedujo el Teorema Egregio del Teorema de Gauss-Bonnet. Este último resultado nos dará la clave para generalizar el concepto de curvatura. Recordemos brevemente su enunciado. En el plano la suma de los ángulos, α, β, γ, de un triángulo T es π radianes. Sin embargo en una superficie curva esto no es cierto en general (suponiendo los lados del triángulo geodésicas, que son el análogo de las rectas euclídeas). Además cuanto más curva es la superficie mayor es la diferencia con π. El Teorema de Gauss-Bonnet confirma y cuantifica esta aserción mediante la fórmula



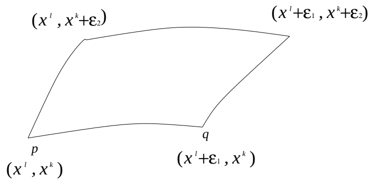
$$\int_T K = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Nótese que dividiendo entre el área de T en ambos miembros y tomando triángulos que se van contrayendo alrededor de un punto se obtiene en el primer miembro la curvatura en dicho punto. Esto prueba el Teorema Egregio, porque unos seres que habitasen en la superficie podrían hallar la curvatura de esta forma sin asomar su cabeza bidimensional al espacio exterior $\mathbb{R}^3$ fuera de la superficie.

Para generalizar esta forma de ver la curvatura, obsérvese que si orientamos de la forma habitual el triángulo geodésico, cuando el vector tangente que parte del vértice del ángulo α llega al del ángulo β, forma con el vector tangente del siguiente lado un ángulo de $\pi - \beta$, y lo mismo sucede en los otros vértices. Así pues cuando hacemos un transporte paralelo dando toda la vuelta alrededor del triángulo el cambio de ángulo será $\pi - \beta + \pi - \gamma + \pi - \alpha$, que quitando múltiplos de 2π y poniéndole el signo adecuado es $\alpha + \beta + \gamma - \pi$. En definitiva, la curvatura de Gauss mide la variación de los vectores en transportes paralelos en relación con el área.

Esta interpretación de la curvatura, que no involucra ninguna consideración netamente bidimensional, nos permitirá encontrar un tensor, llamado tensor de Riemann, que generaliza la curvatura a variedades m-dimensionales.

Nada más que por razones técnicas poco importantes, cambiaremos el triángulo por un cuadrilátero (que puede considerarse como la unión de dos triángulos). Elegiremos las direcciones ∂_l y ∂_k para los lados que concurren en el punto p de coordenadas $(p^1, \ldots, p^m)$. Estos lados estarán bien aproximados, cuando estemos a distancias cortas por las curvas coordenadas $x^i = p^i + \delta^i_l \lambda$ y $x^i = p^i + \delta^i_k \lambda$ (todas las coordenadas constantes menos la de la dirección elegida). Digamos que tenemos una especie de paralelogramo en el que los otros dos lados son las mismas curvas cambiando λ por $\lambda + \epsilon_1$ y $\lambda + \epsilon_2$ respectivamente, donde ϵ_1 y ϵ_2 tomarán más adelante valores infinitamente pequeños.



Llamemos q al vértice adyacente a p por el primer lado. Si transportamos paralelamente un vector $\vec{V}$ de p a q se debe cumplir $V^i_{,l} + \Gamma^i_{jl} V^j = 0$, por consiguiente

$$V^i(q) - V^i(p) = \int_{p^l}^{p^l+\epsilon_1} V^i_{,l}\, dx^l \bigg|_{x^k=p^k} = -\int_{p^l}^{p^l+\epsilon_1} \Gamma^i_{jl} V^j dx^l \bigg|_{x^k=p^k}.$$

Podemos escribir fórmulas análogas para los mismos incrementos a lo largo de cada uno de los otros lados. Sumándolas todas, tenemos que el incremento del $\vec{V}$ después de este transporte paralelo cíclico es

$$\begin{aligned}\Delta V^i =& -\int_{p^l}^{p^l+\epsilon_1} \Gamma^i_{jl} V^j dx^l \bigg|_{x^k=p^k} - \int_{p^k}^{p^k+\epsilon_2} \Gamma^i_{jk} V^j dx^k \bigg|_{x^l=p^l+\epsilon_1} \\ & -\int_{p^l}^{p^l+\epsilon_1} \Gamma^i_{jl} V^j dx^l \bigg|_{x^k=p^k+\epsilon_2} - \int_{p^k}^{p^k+\epsilon_2} \Gamma^i_{jk} V^j dx^k \bigg|_{x^l=p^l}\end{aligned}$$

Si ϵ_1 y ϵ_2 son "arbitrariamente pequeños", por el teorema del valor medio (primero para funciones y después para integrales) se tiene[uff]

$$\Delta V^i = \epsilon_2 \int_{p^l}^{p^l+\epsilon_1} \big(\Gamma^i_{jl} V^j\big)_{,k} dx^l - \epsilon_1 \int_{p^k}^{p^k+\epsilon_2} \big(\Gamma^i_{jk} V^j\big)_{,l} dx^k = \epsilon_1\epsilon_2 \Big(\big(\Gamma^i_{jl} V^j\big)_{,k} - \big(\Gamma^i_{jk} V^j\big)_{,l}\Big).$$

[uff] Esto no es más que decir que "incremento de función pequeñito = derivada · longitud del intervalo" e "integral en intervalo pequeñito = función · longitud del intervalo".

Recuérdese que $V^j_{,s} + \Gamma^j_{ns} V^n = 0$ con $s = l, k$ por la definición de transporte paralelo. Sustituyendo esta relación obtenemos

$$\Delta V^i = \epsilon_1\epsilon_2\big((\Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l})V^j + (\Gamma^i_{jk}\Gamma^j_{nl} - \Gamma^i_{jl}\Gamma^j_{nk})V^n\big).$$

Es decir, que si $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0^+$ el cociente $\Delta V^i/\epsilon_1\epsilon_2$ depende linealmente de las coordenadas de $\vec{V}$. Además si en vez de escoger las direcciones ∂_l y ∂_k, hubiéramos escogido otras, parece sensato pensar que tendríamos también una dependencia lineal en ellas (doble longitud $\Rightarrow$ doble área $\Rightarrow$ doble incremento). En definitiva, dados dos vectores $v^l\partial_l$, $w^k\partial_k$ que indican la dirección de los lados del paralelogramo y dado un vector inicial $V^j\partial_j$, obtenemos que la variación infinitesimal del transporte paralelo en términos del área es el vector $W^i\partial_i$ que verifica

$$W^i = R^i_{jkl}V^j v^l w^k$$

donde R^i_{jkl} tiene la impresionante fórmula

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{jk}.$$

Como R^i_{jkl} aplica linealmente tres vectores en un vector, corresponde a un tensor de tipo $(1,3)$.

DEFINICIÓN: *Se llama tensor de Riemann (o también tensor de curvatura) al tensor de tipo* $(1,3)$ *definido en una variedad semiriemanniana por la fórmula*

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{jk}.$$

Esta forma de introducir el tensor de Riemann quizá es la más intuitiva y es común en los libros de Física porque recuerda a la justificación que suelen hacer del teorema de Stokes (véanse los comentarios del propio Einstein en **[Ei2]** p. 93. Véase también §8.7 en **[Mi-Th-Wh]**). De hecho la demostración habitual **[Po]** del Teorema de Gauss-Bonnet pasa por alguna forma del teorema de Stokes. Sin embargo, desde el punto de vista matemático ni siquiera la tensorialidad está clara porque hemos pasado por argumentos con cantidades arbitrariamente pequeñas y aproximaciones euclídeas. Por ello los libros de Geometría Diferencial suelen dejar aparte, paradójicamente, todas las representaciones geométricas de las que nos hemos valido e introducen R^i_{jkl} como las componentes de un tensor que mide la diferencia entre las derivadas covariantes cruzadas. Comprobemos que ambas definiciones son equivalentes[clp].

Lema 2.3.1 : *El tensor de Riemann es el único tensor que para todo campo de vectores* $\vec{V}$ *verifica*

$$V^i_{;lk} - V^i_{;kl} = R^i_{jkl}V^j$$

[clp] Realmente Riemann no creó su tensor a partir de ninguna de estas definiciones. Como veremos más adelante, lo que buscaba es una fórmula que permitiese detectar si $\mathbb{R}^n$ se había ocultado tras una métrica extraña por una mala elección de las coordenadas.

(donde $V_{;lk}$ indica la derivada covariante primero con respecto a l y después con respecto a k).

Observación: Esta fórmula permite concluir inmediatamente que los R^i_{jkl} son componentes de un tensor de tipo $(1,3)$. Además nos permite construir la definición de R^i_{jkl} sin aprendérnosla de memoria (para ello no hay que desarrollar del todo $V^i_{;kl} - V^i_{;lk}$, sino que basta considerar los términos que contengan a V^j, porque es seguro que los demás se simplifican).

Dem.: Aplicando la definición de derivada covariante

$$V^i_{;lk} = (V^i_{;l})_{;k} = (V^i_{;l})_{,k} - \Gamma^n_{lk} V^i_{;n} + \Gamma^i_{nk} V^n_{;l}$$

$$= V^i_{,lk} + \Gamma^i_{jl,k} V^j + \Gamma^i_{jl} V^j_{,k} - \Gamma^n_{lk} V^i_{;n} + \Gamma^i_{nk} V^n_{;l}.$$

Sustituyendo las derivadas covariantes de las dos últimos términos y reordenando el resultado, se obtiene

$$\Gamma^i_{jl,k} V^j + \Gamma^i_{nk}\Gamma^n_{jl} V^j - \Gamma^n_{lk}\Gamma^i_{jn} V^j + V^i_{,lk} - \Gamma^n_{lk} V^i_{,j} + \Gamma^i_{jl} V^j_{,k} + \Gamma^i_{jk} V^j_{,l}.$$

Los cinco últimos sumandos forman obviamente una expresión simétrica en k y en l. Así que desaparecerán al restar $V^i_{;kl}$ mientras que los dos primeros dan lugar al tensor de Riemann. ■

Nótese que el tensor de Riemann de $\mathbb{R}^n$ (con la métrica usual) se anula. Existe una especie de recíproco. Concretamente, si una variedad riemanniana tiene tensor de curvatura idénticamente nulo entonces localmente es isométrica a $\mathbb{R}^n$ (ésta es la idea que guio originariamente a Riemann para definir su tensor. Véase §4.B,C,D en [**Spi2**]). Lo cual puede considerarse como el análogo de un caso del Teorema de Minding en la Teoría de Superficies (véase [**Ca**] y la última sección de [**Po**]). Sin embargo, mientras que en las superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$ sólo debemos examinar una función (la curvatura de Gauss), el tensor de Riemann tendría en ese mismo caso $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ componentes; lo cual hace sospechar que contiene mucha información redundante.

Para estudiar las simetrías que prueban esta redundancia es mejor introducir el tensor de tipo $(0,4)$ cuyas componentes son

$$R_{ijkl} = g_{in} R^n_{jkl}.$$

De alguna forma las componentes R_{ijkl} se obtienen al aplicar a las componentes del tensor de Riemann una matriz no singular (la del tensor métrico) y por tanto no se pierde información.

Proposición 2.3.2 : *Sea R_{ijkl} como antes, entonces se cumplen las identidades*

a) $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$. *b)* $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$.

Demostrar estas identidades directamente lleva a manipular la compleja fórmula que aparece en la definición del tensor de Riemann. Siempre puede uno esconder los cálculos debajo de la alfombra (como en parte en [**Be**]) diciendo que con manipulaciones tediosas pero elementales se llega al resultado. Sin embargo eligiendo un sistema de coordenadas especiales llamado sistema normal de coordenadas o sistema localmente inercial (véase [**ON**], [**Spi2**], [**Sc**] y compárese con [**Ca**] p. 288), se puede simplificar mucho la fórmula del tensor de Riemann. Sin llegar a introducir este sistema de coordenadas, aquí también seguiremos esta idea para demostrar brevemente la proposición anterior.

Lema 2.3.3 : *Sea M una variedad semiriemanniana y sea p uno de sus puntos. Existe una carta tal que las derivadas parciales primeras del tensor métrico se anulan en p y por tanto*

$$R^i_{jkl}(p) = \Gamma^i_{jl,k}(p) - \Gamma^i_{jk,l}(p).$$

<u>Dem.</u>: Dada cualquier carta $(\phi = (x^1, \dots, x^m), \mathcal{U})$ con $p \in \mathcal{U}$, llamemos $(p_1, \dots, p_n)$ a las coordenadas de p y consideremos una nueva carta $(\phi' = (x'^1, \dots, x'^m), \mathcal{U}')$, $p \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, con ϕ' definida por el cambio de carta

$$x'^i = x^i - p^i + \frac{1}{2}(x^r - p^r)(x^s - p^s)\Gamma^i_{rs}.$$

Derivando en ambos miembros se tiene

$$(2.8) \qquad \left.\frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\right|_p = \delta^a_i \qquad \left.\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^k \partial x^i}\right|_p = \Gamma^a_{ki}(p).$$

(Nótese que el teorema de la función inversa asegura que el cambio de carta es legítimo, C^∞, en un entorno pequeño).

Sean g'_{ij} las componentes del tensor métrico usando esta carta. Por la tensorialidad

$$g_{ij} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial x'^b}{\partial x^j} g'_{ab}.$$

De donde se deduce, gracias a (2.8), $g_{ij}(p) = g'_{ij}(p)$. Derivando, también se obtiene

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^k \partial x^i}\frac{\partial x'^b}{\partial x^j} g'_{ab} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x'^b}{\partial x^k \partial x^j} g'_{ab} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial x'^b}{\partial x^j}\frac{\partial x'^l}{\partial x^k}\frac{\partial g'_{ab}}{\partial x'^l}.$$

Sustituyendo en el punto p y usando (2.8), se tiene

$$\left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_p = \Gamma^a_{ki}(p)g_{aj}(p) + \Gamma^b_{kj}(p)g_{ib}(p) + \left.\frac{\partial g'_{ij}}{\partial x'^k}\right|_p$$

y del Lema 2.2.1 se deduce que el último sumando debe ser nulo. ■

<u>Dem.(de la Proposición 2.3.2)</u>: Para cada punto p escogemos la carta del lema anterior. Entonces en dicho punto (que para mayor brevedad no indicaremos en las fórmulas subsiguientes)

$$g_{in}\Gamma^n_{jl,k} = \frac{1}{2}g_{in}g^{nm}(g_{jm,lk} + g_{ml,jk} - g_{jl,mk}) = \frac{1}{2}(g_{ji,lk} + g_{il,jk} - g_{jl,ik}).$$

Intercambiando l y k y restando, se tiene por el lema anterior

$$R_{ijkl} = g_{in}R^n_{jkl} = \frac{1}{2}(g_{il,jk} - g_{jl,ik} - g_{ik,jl} + g_{jk,il})$$

de donde se deduce inmediatamente $a)$ y $b)$ en p con esta carta. Por otra parte, si las componentes de dos tensores coinciden usando una carta, también coinciden usando cualquier otra. Así que las identidades $a)$ y $b)$ tienen validez general. ■

Se puede probar que en general no hay nuevas relaciones lineales entre las componentes R_{ijkl} que no se deduzcan de las aquí enunciadas, sin embargo hay algunas relaciones entre sus derivadas covariantes que desempeñan un papel importante en la Teoría General de la Relatividad. De nuevo la sustitución directa en la definición llevaría a tantos cálculos que es casi ineludible usar el Lema 2.3.3. Enunciaremos el resultado en términos de R^i_{jkl} (para R_{ijkl} sería idéntico)[clp].

Proposición 2.3.4 (Identidad de Bianchi)**:** *Sean R^i_{jkl} las componentes del tensor de Riemann, entonces*

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jmk;l} + R^i_{jlm;k} = 0.$$

<u>Dem.</u>: Derivando la definición del tensor de curvatura, escogiendo un punto arbitrario y la carta del Lema 2.3.3 se cumple

$$R^i_{jkl,m} = \Gamma^i_{jl,km} - \Gamma^i_{jk,lm}.$$

[clp] Como advertencia tardía, ni la proposición que acabamos de probar ni la que probaremos a continuación tienen mucho interés por sí mismas en este curso. Simplemente servirán para demostrar la Proposición 2.3.5 que se empleará en el siguiente capítulo. De hecho, aunque quizá no sirva como argumento en una revisión de examen, ni Hilbert, ni Klein, ni Einstein, se sabían las identidades de Bianchi lo cual dio lugar a algunos equívocos en la génesis de la relatividad general (véase **[Pa]** §15c).

Como los símbolos de Christoffel se anulan en el punto escogido, por la definición de derivada covariante, se tiene que $R^i_{jkl;m} = R^i_{jkl,m}$ (siempre en dicho punto). Tras esta observación, sumando la fórmula anterior permutando cíclicamente l, k y m se obtiene el resultado deseado. ■

El gran número de componentes del tensor de Riemann y las relaciones entre ellas sugieren definir un tensor "más pequeño". Para ello lo más natural es hacer una contracción (igualar un subíndice y un superíndice y sumar). Esencialmente sólo hay una posibilidad, que lleva al llamado tensor de Ricci y que dentro de la relatividad general le robará el protagonismo al tensor de Riemann. Para variedades tridimensionales se puede demostrar que, de hecho, el tensor de Ricci contiene tanta información como el de Riemann [**Hu-To**] §23.

DEFINICIÓN: *Se llama tensor de Ricci al tensor de tipo* $(0,2)$ *cuyas componentes son*

$$R_{ij} = R^k_{ikj}$$

y tensor de Ricci contravariante al tensor de tipo $(2,0)$ *de componentes*

$$R^{ij} = g^{ia}g^{jb}R_{ab}.$$

Por último, se llama curvatura escalar a la función

$$R = g^{ij}R_{ij}.$$

Nótese que, por la propia definición, el valor de R en un punto no depende de la carta empleada por ser un tensor de tipo $(0,0)$. En cada punto es un número que resume, sin detalle acerca de las direcciones particulares, lo curvada que está una variedad allí. En el caso de una superficie en $\mathbb{R}^3$ está relacionada con la curvatura de Gauss, de hecho es su doble ([**ON**] p. 94).

El tensor de Ricci, en sus dos formas, es simétrico y cierta suma de sus derivadas covariantes admite una sencilla fórmula que tendrá gran importancia más adelante.

Proposición 2.3.5 : *Con las definiciones anteriores, se verifica*

$$a)\ R_{ij} = R_{ji}, \qquad b)\ R^{ij} = R^{ji}, \qquad c)\ R^{ij}_{;j} = \frac{1}{2}g^{ij}R_{,j}.$$

DEM.: Si en la Proposición 2.3.2 *b*) multiplicamos por g^{ki} (por supuesto guardando el convenio de Einstein sumando en los índices iguales) se obtiene

$$R^k_{jkl} + g^{ki}R_{iljk} + g^{ki}R_{iklj} = 0.$$

Por otra parte, la antisimetría en j y k de R_{iklj}, por la Proposición 2.3.2 *a*), muestra que el último sumando se anula y se puede escribir

$$0 = R^k_{jkl} - g^{ki}R_{ilkj} = R^k_{jkl} - R^k_{lkj} = R_{jl} - R_{lj}.$$

Lo cual prueba a) y se sigue b) inmediatamente. Para probar c) partimos de la identidad de Bianchi contrayendo en i y k.

$$R^k_{jkl;m} + R^k_{jmk;l} + R^k_{jlm;k} = 0.$$

El primer sumando es $R_{jl;m}$ y el segundo, después de usar la antisimetría $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$ es $-R_{jm;l}$. Multiplicando por $g^{jl}g^{im}$ (nótese que multiplicar por estos objetos conmuta con la derivación covariante por el Lema 2.2.2), se tiene

$$g^{im}R_{,m} - R^{il}_{;l} + g^{jl}g^{im}R^k_{jlm;k} = 0. \tag{2.9}$$

El último término es

$$g^{jl}g^{im}g^{kn}R_{njlm;k} = g^{jl}g^{im}g^{kn}R_{lmnj;k} = g^{im}g^{kn}R^j_{mnj;k} = -g^{im}g^{kn}R_{mn;k} = -R^{ik}_{;k}.$$

Sustituyendo en (2.9) se obtiene la fórmula deseada. ■

De las definiciones del tensor de curvatura y del tensor de Ricci se deduce que las componentes de éste último vienen dadas por

$$\boxed{R_{jl} = \Gamma^k_{jl,k} - \Gamma^k_{jk,l} + \Gamma^k_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^k_{nl}\Gamma^n_{jk}}$$

En algunos cálculos posteriores tendremos que aplicar esta fórmula y para ello será útil el siguiente resultado, del cual se podría deducir también la simetría del tensor de Ricci (véase [**Be**] p. 171).

Lema 2.3.6 : *Sea una variedad semiriemanniana y consideremos la función, g, que representa (en cierta carta) el determinante del tensor métrico, entonces se verifica*

$$\Gamma^j_{ij} = (\log\sqrt{|g|})_{,i} = \frac{g_{,i}}{2g}.$$

<u>Dem.</u>: Recuérdese que para derivar un determinante hay que derivar sucesivamente cada una de las filas y sumar los resultados[uff].

$$g_{,i} = \begin{vmatrix} g_{11,i} & \cdots & g_{1m,i} \\ g_{21} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21,i} & \cdots & g_{2m,i} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1,i} & \cdots & g_{mm,i} \end{vmatrix}.$$

[uff] Si a alguien se le escapa esta afirmación, simplemente que piense que al desarrollar el determinante se obtienen sumandos de la forma $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{mj_m}$ y la fórmula para derivar productos hace el resto (la derivada del primero corresponderá a derivar la primera fila, la del segundo la segunda, y así sucesivamente).

Desarrollando el primer determinante por la primera fila, el segundo por la segunda, etc.

$$g_{,i} = g_{1j,i}G^{1j} + g_{2j,i}G^{2j} + \ldots + g_{mj,i}G^{mj} = g_{kj,i}G^{kj}$$

donde G^{kj} es el cofactor del elemento en el lugar kj. Sabemos que (salvo una trasposición aquí irrelevante por la simetría) la matriz inversa es la matriz de cofactores dividida por el determinante. Por tanto $g^{kj} = G^{kj}/g$ y se concluye

$$g_{,i} = g\, g^{kj} g_{kj,i} = 2g\, \Gamma^j_{ij}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la fórmula para los símbolos de Christoffel, ya que por la simetría del tensor métrico $g^{kj}(g_{ik,j} - g_{ij,k}) = 0$. ■

Para terminar veamos un ejemplo práctico de todos estos cálculos monstruosos.

Ejemplo . Consideremos las coordenadas (r, θ, φ) y la métrica

$$ds^2 = B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

donde B es un función arbitraria. Calcular R^2_{323}, R_{2323}, R_{22} y R.

En primer lugar tenemos que hallar los símbolos de Christoffel. El método lagrangiano lleva rápidamente a que las ecuaciones que definen las geodésicas son:

$$\ddot{r} + \frac{B'}{2B}\,\dot{r}^2 - \frac{r}{B}\,\dot{\theta}^2 - \frac{r}{B}\,\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta = 0, \qquad \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\,\dot{r}\,\dot{\theta} - \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + 2\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} = 0.$$

Con lo cual los únicos símbolos de Christoffel no nulos son los siguientes y sus simétricos

$$\Gamma^1_{11} = \frac{B'}{2B}, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{B}, \qquad \Gamma^1_{33} = -\frac{r}{B}\operatorname{sen}^2\theta,$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^2_{33} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^3_{23} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Según la definición

$$R^2_{323} = \Gamma^2_{33,2} - \Gamma^2_{32,3} + \Gamma^2_{n2}\Gamma^n_{33} - \Gamma^2_{n3}\Gamma^n_{32}$$

y sustituyendo

$$R^2_{323} = -\frac{d(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)}{d\theta} - 0 + \frac{1}{r}\frac{-r}{B}\operatorname{sen}^2\theta - (-\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

En definitiva

$$R^2_{323} = \big(1 - \frac{1}{B}\big) \operatorname{sen}^2 \theta$$

y de aquí

$$R_{2323} = g_{2n} R^n_{323} = g_{22} R^2_{323} = r^2 \big(1 - \frac{1}{B}\big) \operatorname{sen}^2 \theta.$$

(En la p. 353 de [**Sc**] aparece erróneamente r^{-2} en lugar de r^2).

Para calcular R_{22} aplicamos la definición y la simplificación del Lema 2.3.6 observando que los factores de $\sqrt{|g|} = r^2 |\operatorname{sen}\theta| \sqrt{|B|}$ con respecto a los que no se derive se pueden omitir.

$$R_{22} = \Gamma^k_{22,k} - \Gamma^k_{2k,2} + \Gamma^k_{nk}\Gamma^n_{22} - \Gamma^k_{n2}\Gamma^n_{2k}$$

$$= -\frac{d}{dr}\big(\frac{r}{B}\big) - \frac{d^2}{d\theta^2}(\log|\operatorname{sen}\theta|) - \frac{r}{B}\frac{d}{dr}\big(\log(r^2\sqrt{|B|})\big) - \Gamma^k_{n2}\Gamma^n_{2k}.$$

Como

$$\Gamma^k_{n2}\Gamma^n_{2k} = 2\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{32}\Gamma^3_{32} = 2\frac{-r}{B}\frac{1}{r} + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta},$$

después de sustituir en la fórmula anterior

$$R_{22} = \frac{B' r}{2B^2} - \frac{1}{B} + 1.$$

Este cálculo aparecerá en Cosmología. (Sorprendentemente también hay una errata de un factor r^{-2} en la p. 90 de [**Hu-To**]).

Un cálculo similar lleva a $R_{33} = R_{22}\operatorname{sen}^2\theta$ y otro más sencillo a $R_{11} = (rB)^{-1}B'$. Por tanto

$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} = \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2}\big(1 - \frac{1}{B}\big). \tag{2.10}$$

Para justificar la importancia de la métrica del ejemplo anterior, recuérdese que la métrica inducida en una superficie esférica centrada de radio L es en coordenadas esféricas

$$L^2 d\theta^2 + L^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

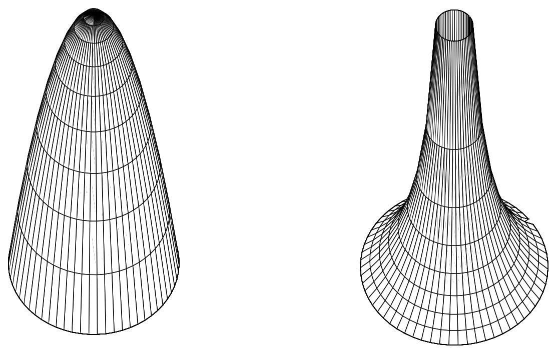
Consideremos una curva, digamos en $\mathbb{R}^3$ para fijar ideas, parametrizada por longitud de arco con parámetro u (y por tanto métrica inducida du^2). Si pegamos las superficies esféricas anteriores ortogonalmente en los puntos de la curva y les asignamos un radio en función de u, la métrica natural obtenida será:

$$ds^2 = du^2 + \big(L(u)\big)^2 d\theta^2 + \big(L(u)\big)^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2,$$

y con el cambio de variable $u = L^{-1}(r)$, donde L^{-1} indica la función inversa, se tiene

$$ds^2 = B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

Para visualizar la idea es mejor pensar en una dimensión menos: pegando circunferencias que se ensanchan o estrechan conseguimos formar algunas superficies (las de revolución).



La variedad obtenida es idéntica en cada punto de cada superficie esférica que la forma. Por ello se dice que estas variedades tienen <u>simetría esférica</u>. De alguna forma, no importan las direcciones, sino sólo los radios.

Nótese que puede que las superficies esféricas no tengan un "centro" común en el sentido de que su radio no disminuya hasta cero alrededor de un punto de la variedad. Podría haber un "agujero" o un "precipicio" que evitase dicho punto (véase §10.1 en [**Sc**]). Matemáticamente, la métrica podría no tener sentido si $r \to 0^+$ porque B puede ser singular o no estar definida en $r = 0$. Si la métrica tiene sentido, entonces desde el punto que corresponde por continuidad a $r = 0$, todas las direcciones se ven exactamente iguales (en las superficies, por ejemplo la cima de un paraboloide invertido). Entonces se dice que la variedad es <u>isótropa</u> en ese punto. Si $r = 0$ corresponde a un punto de la variedad, podemos calcular en él los tensores antes introducidos. En particular, de (2.10) deducimos que para que R pueda tener sentido cuando $r \to 0^+$, debe cumplirse $B(0) = 1$ y $B'(0) = 0$. En definitiva, las variedades con simetría esférica admiten una métrica del tipo

$$ds^2 = B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

y si son isótropas alrededor de un punto se puede suponer $B(0) = 1$ y $B'(0) = 0$.

Un tratamiento más riguroso de la simetría esférica pasa por el estudio de todas las métricas que son invariantes por la acción de $SO(3)$ (el grupo de rotaciones) pero esto lleva a razonamientos avanzados (véase **[Gi]** §19.3 y [**Mi-Th-Wh**] Box 23.3, donde también se incluye una variable temporal[clp]).

Problemas 2.3

→**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Por qué un cilindro tiene curvatura de Gauss nula cuando es obvio que está curvado?

ii) Si en cierta carta el tensor métrico es constante, ¿cuál es el tensor de Riemann?

iii) ¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento? Siempre se puede encontrar una carta tal que los símbolos de Christoffel se anulen en un punto, por tanto el tensor de curvatura será nulo en dicho punto. Pero si se anula usando una carta se anula usando cualquiera. Repitiendo el argumento en cada punto se deduce que el tensor de curvatura es idénticamente nulo.

iv) ¿Cuáles son las componentes del tensor de Riemann para $\mathbb{R}^2$ si usamos coordenadas polares?

v) ¿Cómo se puede expresar el tensor de Ricci contravariante en términos de R_{ijkl} y los g^{ij}?

vi) ¿Por qué $R^{ij} = R^{ji}$ se sigue de $R_{ij} = R_{ji}$?

→**2)** Hallar la curvatura de Gauss de una superficie esférica de radio R usando solamente el teorema de Gauss-Bonnet. (*Indicación*: Aplicarlo, por ejemplo, al triángulo determinado por la octava parte de la esfera).

3) Explicar la antisimetría del tensor de Riemann en sus dos últimos índices a través de la interpretación geométrica con la que lo hemos introducido.

→**4)** En una variedad consideramos las métricas $g_{ij}dx^i dx^j$ y $\lambda\, g_{ij}dx^i dx^j$ donde λ es una constante.

a) Encontrar qué relación hay entre los tensores de Riemann correspondientes a ambas métricas.

b) Responder a la pregunta anterior para la curvatura escalar.

5) Demostrar a partir de la fórmula $V^i_{;kl} - V^i_{;lk} = R^i_{jkl}V^j$ que los R^i_{jkl} se transforman realmente como las componentes de un tensor de tipo $(1,3)$.

[clp] Por favor, que sólo los masoquistas o los que sepan mucha Geometría miren estas referencias.

$\rightarrow$**6)** Recordando $V^i_{;lk} - V^i_{;kl} = R^i_{jkl}V^j$ y sin consultar ninguna fórmula auxiliar más, deducir la expresión para R^i_{jkl} en función de los símbolos de Christoffel. (*Indicación*: Nótese que no hace falta considerar los términos en $V^i_{;kl} - V^i_{;lk}$ que involucren derivadas parciales de V).

7) Consideremos el tensor de Riemann en una variedad N-dimensional. Teniendo en cuenta la Proposición 2.3.2 resolver los siguientes apartados:

a) Si dos subíndices aparecen repetidos exactamente dos veces, demostrar que R_{ijkl} puede tomar a lo más $N(N-1)/2$ valores no nulos independientes.

b) Si sólo un índice aparece repetido dos veces, probar que hay a lo más $N(N-1)(N-2)/2$ componentes no nulas independientes.

c) Si todos los índices son diferentes, probar que $R_{ijkl} = \pm R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ con $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, $\alpha < \gamma$ donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ es una reordenación de i, j, k, l. Demostrar también que hay $N(N-1)(N-2)(N-3)/8$ formas de escoger $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pero que por la Proposición 2.3.2 *b*) sólo las dos terceras partes dan lugar a componentes independientes.

d) Deducir de los apartados anteriores que en una variedad N-dimensional, el tensor de Riemann tiene a lo más $N^2(N^2-1)/12$ componentes independientes.

8) Demostrar que si T_j son las componentes de un tensor de tipo $(0,1)$, entonces

$$T_{j;kl} - T_{j;lk} = R^n_{jlk}T_n.$$

9) Comprobar con detalle los cálculos del Lema 2.3.1.

10) Demostrar que no puede darse en toda carta una igualdad del tipo $R^i_{jkl} = -R^j_{ikl}$ excepto si ambos miembros son siempre nulos. (*Indicación*: Estudiar cómo se transforma cada miembro).

11) Estudiar si es cierta la identidad

$$R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ijlm;k} = 0.$$

$\rightarrow$**12)** Demostrar que $R^i_{ikl} = 0$ y que $R^i_{jki} = -R_{jk}$.

$\rightarrow$**13)** Demostrar la fórmula

$$R_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\big(\sqrt{|g|}\Gamma^k_{ij}\big)_{,k} - (\log\sqrt{|g|})_{,ij} - \Gamma^k_{li}\Gamma^l_{jk}.$$

$\rightarrow$**14)** Hallar el tensor de Riemann en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dotado con la métrica

$$dx^2 + y^2dy^2$$

y explicar el resultado.

→**15)** Hallar todas las componentes del tensor de Ricci para el semiplano de Poincaré $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$ que tiene por métrica $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. (*Indicación*: Recuérdese que por ejercicios anteriores sabíamos que los únicos símbolos de Christoffel no nulos son $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = -y^{-1}$).

→**16)** Hallar la curvatura escalar en el ejercicio anterior y comprobar la fórmula de la Proposición 2.3.5 c).

→**17)** Comprobar que con la métrica de las variedades con simetría esférica,

$$ds^2 = B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2,$$

se cumple $R_{1212} = rB'/(2B)$.

→**18)** Demostrar que para las métricas de la forma

$$ds^2 = A(x,y)dx^2 + B(x,y)dy^2$$

se cumple $R_{12} = R_{21} = R^{12} = R^{21} = 0$. (*Indicación*: No es necesario calcular los símbolos de Christoffel, sólo usar las simetrías del tensor de Riemann).

Historias en titulares:

El $\mathbf{A_+B_+C}$

El quinto postulado de Euclides implica que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. J.H. Lambert ha probado que si no se cumpliera la diferencia entre estas dos cantidades sería proporcional al área del triángulo. En contra de lo que han hecho la mayoría de sus predecesores, Lambert está dispuesto a creer que el quinto postulado es indemostrable.

1766

La Voz de la Ciencia

A. Einstein y M. Grossmann han publicado un trabajo conjunto en el que pretenden estudiar la gravitación usando herramientas teóricas, en especial los tensores de Riemann y de Ricci, que exceden los conocimientos de muchos de los expertos actuales en Matemáticas. En una conversación personal, M. Planck ha dicho a su amigo Einstein que no tendrá éxito y que si lo tiene nadie lo creerá.

1913

Sæcula Sæculorum

El tensor de Riemann parece algo artificial, una definición *ad hoc* dada por Riemann para resolver un problema matemático. Sin embargo, según la Teoría General de la Relatividad, La Naturaleza ha "usado" siempre este objeto para manifestar la fuerza gravitatoria. Galileo diría de nuevo que el libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático. Por otra parte, sólo podemos expresarnos con el lenguaje que conocemos y quizá dentro de unos decenios el tensor de Riemann sea reemplazado por otros objetos matemáticos en una teoría de la gravitación más precisa.

1915

¿Qué hay que saberse?:

Todas la ideas pero pocas fórmulas. Para señalar con el rotulador:

• El tensor de Riemann mide la curvatura de una variedad y se puede entender como la variación en los transportes paralelos cíclicos en términos del área o, más sintéticamente, como la diferencia entre las derivadas covariantes cruzadas a través de la fórmula $V^i_{;lk} - V^i_{;kl} = R^i_{jkl}V^j$.

• El tensor de Riemann tiene muchas simetrías que permiten intercambiar algunos índices sin cambios sustanciales. Para probar las más difíciles se usa un resultado teórico que afirma que existen coordenadas con las cuales el tensor de Riemann tiene una fórmula fácil en un punto dado.

• El tensor de Ricci $R_{ij} = R^k_{ikj}$ (que es simétrico) y la curvatura escalar $R = g^{ij}R_{ij}$ son versiones en miniatura del tensor de Riemann, suficientes en relatividad general.

• Todas las variedades tridimensionales con simetría esférica admiten localmente una métrica del tipo

$$ds^2 = B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

y si además existe un punto desde el que todas las direcciones parecen iguales, se puede suponer $B(0) = 1$ y $B'(0) = 0$.

No hace falta saberse las fórmulas complicadas de esta sección, es decir, las de las componentes de los tensores de Riemann y de Ricci (aunque se podrían deducir de la relación $V^i_{;lk} - V^i_{;kl} = R^i_{jkl}V^j$). Sin embargo hay que haber hecho suficientes ejercicios como para calcular R^i_{jkl} o R_{ij} en ejemplos concretos teniendo las fórmulas delante. El Lema 2.3.6 simplifica algunos cálculos y por tanto conviene tenerlo en mente.

¿Para qué sirve?:

El tensor de Riemann y sus asociados dan de comer a algunas personas, pero como son todos geómetras quizá no se admita como utilidad extrínseca. Para salir del paso, uno puede argumentar que, como veremos en el último capítulo, si la curvatura escalar con cierta métrica es negativa, el Universo se expandirá eternamente y si es positiva estará condenado al colapso; con lo cual las herramientas de esta sección sirven para que juguemos a ser futurólogos cósmicos. También tenemos aplicaciones no aplicadas a través de teoremas muy bonitos como el de Gauss-Bonnet. Puede que dentro de unos años exista una nueva teoría cosmológica que relegue la curvatura a un segundo plano o incluso que no la emplee en absoluto, pero el teorema de Gauss-Bonnet seguirá existiendo inmutable y bello independientemente de que un profeta diga que el Universo nació hace diez mil millones de años o que se acabará dentro de veinte (mil millones).

3. Teoría General de la Relatividad

3.1. Bases de la relatividad general

Como vimos en el primer capítulo, la Teoría Especial de la Relatividad nació para conciliar la cinemática y las ecuaciones de Maxwell que parecían entrar en conflicto. Varios científicos trabajaron en el problema y Einstein obtuvo una solución especialmente revolucionaria e interesante. El caso de la Teoría General de la Relatividad es bien distinto, porque con ella Einstein trata de reformar la gravitación de Newton (no sólo con las modificaciones relativistas obvias para velocidades grandes) que estaba respaldada por un sólido edificio matemático y por experimentos astronómicos de gran precisión (como veremos, sólo el planeta Mercurio parecía dar un pequeñísimo problema). Por otra parte, la Teoría General de la Relatividad es seguramente el tema en el que Einstein muestra mayor originalidad dentro de su carrera científica, siendo las ideas fundamentales estrictamente suyas y sin parangón en la Física anterior.

El contenido matemático de esta sección es muy breve, reduciéndose a unas definiciones sencillas pero básicas para entender la relatividad general. El resto estará dedicado a algunas motivaciones y cálculos aproximados que pudieron llevar a Einstein a cambiar una teoría que parecía casi perfecta por otra cuyos nuevos efectos son tan leves que su comprobación experimental estuvo en duda para algunos científicos durante muchos años. Destacaremos en primer lugar tres puntos fundamentales.

1. Identidad entre masa inercial y gravitatoria.

Nuestra experiencia diaria está repleta de ejemplos que nos muestran el concepto de masa como masa inercial, a través de la observación de la resistencia de las partículas a cambiar su estado de movimiento: Si damos una tacada a una bola de billar usual, tiene un efecto muy distinto que si diéramos la misma tacada a una bola con la misma forma pero con una masa muchas veces mayor (por ejemplo hecha de oro macizo). Esta relación entre la masa de un objeto y cómo reacciona ante una fuerza se resume en la famosa segunda ley de Newton $F = ma$. Ya sea empujando un carrito en el supermercado, repeliendo una carga con otra o atrayendo clavos de hierro con un imán; siempre notamos que cuesta más alterar el reposo o el movimiento de un objeto cuanto mayor masa tiene.

Sin embargo en el campo gravitatorio ocurre algo realmente peculiar, y es que la propia fuerza es directamente proporcional a la masa de la partícula sobre la que actúa y en consecuencia dicha partícula adquirirá una aceleración independiente de cuál sea su masa.

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \quad F = ma \quad \Rightarrow \quad a = G\frac{\cancel{m}M}{\cancel{m}r^2}.$$

Éste es un hecho que no concuerda en absoluto con nuestra primera intuición y que era claramente falso para los científicos y filósofos de la antigüedad. Por ejemplo, según estas ecuaciones, si dejamos caer un objeto desde lo alto de un edificio, sufrirá siempre la misma aceleración ($g = 9.8\,ms^{-2}$), y por tanto tendrá la misma velocidad final, tanto si pesa un gramo como si pesa una tonelada (naturalmente se desprecian efectos ajenos a la gravedad como el rozamiento del aire o el principio de Arquímedes en los gases). Es muy famoso el experimento de Galileo al respecto, dejando caer dos esferas desde la torre de Pisa para convencer de este hecho a sus contemporáneos (aunque lo más seguro es que dicho experimento sea pura leyenda [**Tr**] o que fuera poco concluyente por la falta de instrumentos de medición precisos). Es tan extraño que a la Tierra le cueste lo mismo atraer piedras pesadas que ligeras, que se han llevado a cabo análogos del experimento de Galileo con grandísima precisión (véase [**Mi-Th-Wh**] §38.3) para comprobar que el valor de m que aparece en la fórmula $F = ma$, llamado <u>masa inercial</u> es realmente el mismo que aparece en la fórmula de gravitación universal, llamado <u>masa gravitatoria</u>, de forma que ambas se pueden simplificar[clp]. Ésta es la base del llamado <u>principio de equivalencia</u> (véase [**Be**], [**Ei2**]) que afirma que no podemos distinguir los efectos de un campo gravitatorio uniforme de los efectos de una aceleración uniforme. (Este principio se ha popularizado con un famoso ejemplo llamado *ascensor de Einstein* [**Be**]).

<u>2. Paradoja entre la gravitación clásica y la nueva Física</u>.

Einstein imaginó un experimento ideal del cual se deducía que la gravedad debería afectar a las radiaciones electromagnéticas aunque éstas no tengan asociada ninguna masa, lo cual resulta cuando menos extraño con la idea clásica de gravitación. Aquí consideraremos una variante del experimento imaginario de Einstein tomada de [**Sc**] y que se ajusta bastante más al experimento real que realizaron R.V. Pound y G.A. Rebka en 1960 (véase [**Mi-Th-Wh**] §38.5).

Consideremos una torre y un fotón de frecuencia (color) ν dirigiéndose desde lo alto de ella verticalmente y hacia abajo. Según la fórmula de Planck, su energía es $E = h\nu$. Supongamos que al llegar al suelo rebota en un espejo (sin pérdidas apreciables de energía)

[clp] Si uno es muy puntilloso hay dos posibles masas gravitatorias que se pueden definir (a veces llamadas gravitatoria y pesante) dependiendo de si consideramos que la masa atrae a otras o es atraída (genera un campo o se utiliza como partícula de prueba). La simetría del producto mM en la fórmula de Newton, hace esta distinción irrelevante en la gravitación clásica.

y por un extraño proceso (¿mágico?) se transforma íntegramente en una partícula con masa m que asciende con velocidad v. Si creemos en la conservación de la energía, se cumplirá, en unidades relativistas,

$$h\nu = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}},$$

y se pueden ajustar m y v de manera que se cumpla esta relación y v sea la velocidad necesaria para que la partícula suba, llegando a lo alto de la torre justamente con velocidad nula. Si ahora se produce el inverso del proceso mágico transformándose en un fotón, su frecuencia ν' satisfará

$$h\nu' = \frac{m}{\sqrt{1-0^2}}.$$

La única manera de explicar la paradoja $\nu \neq \nu'$, que implicaría la irreversibilidad de este proceso cíclico[uff], es que en realidad la frecuencia del fotón, y por tanto su energía, se va modificando según baja, es decir, que la gravedad también afecta de alguna forma a los fotones aunque no tengan masa.

Con cálculos incluso más sencillos que éstos y el principio de Huyghens ([**Al-Fi**], [**La-Li**]), Einstein dedujo usando trigonometría elemental en 1911 (véase una traducción del trabajo original en [**Ei-Lo-Mi-We**]) que los rayos luminosos al pasar cerca del Sol se deben desviar por su acción gravitatoria un ángulo de $0.83''$ (esto es menos de media millonésima de radián). Más tarde, con la relatividad general ya construida, comprobó, como veremos en el próximo capítulo, que esta predicción tenía un error de más del 100%.

3. Ausencia de un espacio-tiempo absoluto.

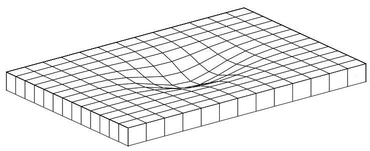
Ya Newton se preocupó de explicar a través de un ejemplo que el espacio debe ser absoluto en un sentido que explicaremos a continuación. Newton consideró un cubo con agua que gira a gran velocidad por su eje vertical (véase la cita del texto original en §1.3 [**We**]). Si la velocidad es suficientemente grande, el agua se agolpará contra la superficie del cubo por efecto de la fuerza centrífuga, e incluso es posible que lleguemos a ver una porción del fondo (como en una lavadora cuando centrifuga). Si un observador, ya sea inercial o no, toma una foto del cubo y nos la enseña, podemos decidir si gira o no mirando si el agua está aplastada contra las paredes o no. En consecuencia, la rotación del cubo es algo absoluto, para todos los observadores. No hay posibilidad de que un observador siguiendo una trayectoria muy extraña no vea la acción de la fuerza centrífuga. Sin embargo, supongamos que pudiéramos hacer desaparecer del espacio una por una todas las estrellas, planetas y,

[uff] La paradoja consiste en que, si todo esta bien, podríamos usar el inverso de este proceso para extraer energía gratis extrayéndosela al fotón de su exceso de frecuencia.

en definitiva, todas las masas excepto el cubo que gira. Entonces no se podría decir si el cubo está rotando o no, porque no hay ningún objeto con respecto al cual lo haga. Newton solventó este problema suponiendo que el espacio es absoluto, es decir, que se podrían trazar unos ejes imaginarios x, y, z, digamos por ejemplo en el centro de la Galaxia, de manera que, haya o no haya otros objetos, lo que gire usando este sistema de referencia sufrirá fuerzas centrífugas y lo demás no. En la relatividad especial la situación es similar: las transformaciones de Lorentz permiten pasar de un sistema de referencia admisible a otro, pero sobre los observadores no inerciales (que no siguen trayectorias rectas) actúan "fuerzas centrífugas".

E. Mach tuvo una idea muy interesante que sólo Einstein supo aprovechar (aunque hay diferencias en sus puntos de vista, [**We**] §1.7), y es que en realidad el cubo con agua se mueve con respecto a las estrellas "fijas" (lejanas) y quizá sean ellas las que crean de alguna forma esos ejes imaginarios privilegiados. Es decir, que las leyes mecánicas de nuestra partecita del Universo, como la acción y reacción, la tendencia a seguir líneas rectas o las fuerzas centrífugas ocasionadas al desviarnos de ellas, tienen su origen en la acción gravitatoria combinada de masas lejanísimas pero numerosísimas. A veces se formula este *Principio de Mach* diciendo que *la masa y energía allí gobiernan la inercia aquí.* Mach arguía que la situación en el ejemplo del cubo podría cambiar mucho si éste tuviera una masa inmensa. De alguna forma, para Mach la masa, incluso lejana, crea la inercia. No hay un espacio (-tiempo) absoluto por sí mismo sino sólo en relación con las masas que contiene.

La nueva idea de Einstein fue pensar que si todos los objetos son atraídos por la Tierra de la misma forma, independientemente de su masa, no es necesario suponer que existe una fuerza gravitatoria, sino que la gravitación se debe a una deformación o curvatura del espacio(-tiempo). Veamos este punto con más detalle volviendo a la mesa de billar en la que ya experimentamos con la masa inercial. Si la mesa tiene un bache en el centro, suavemente hundido con respecto al plano horizontal, cuando una bola pase por esa zona su trayectoria se desviará. Incluso, si el bache es suficientemente profundo y amplio y la velocidad de la bola de billar suficientemente pequeña, puede que la bola quede atrapada por el bache cayendo hacia su centro describiendo una trayectoria espiral.



Un observador que sólo viese la proyección plana de las trayectorias pero no la curvatura de la mesa, digamos un mirón que observa a través de una trampilla situada en el techo, llegaría a la conclusión que el centro de la mesa ejerce una fuerza "gravitatoria" sobre las partículas cercanas que puede llegar a atrapar a las menos veloces.

De la misma forma, no hay razón que impida considerar la gravedad como un especie de bache tridimensional, una curvatura del espacio. Recordemos que según la relatividad especial el espacio y el tiempo estaban relacionados de manera que $-\Delta t^2+\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$ era constante para todos los observadores inerciales (admisibles), así pues la deformación del espacio conlleva también localmente una deformación del tiempo: el bache es cuatridimensional. Se pueden representar estos cambios inducidos en la forma de medir en el espacio-tiempo mediante una métrica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

donde siguiendo la notación habitual, que usaremos desde ahora, se sobreentiende que *las letras griegas en subíndices y superíndices toman los valores* $0, 1, 2, 3$ y x^0, x^1, x^2, x^3 son coordenadas, la primera temporal y las demás espaciales (véase más adelante). Fuera de las zonas "con baches" en las que sentimos la gravedad, ésta métrica debe transformarse en la usual de Minkowski

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Si se tiene la oportunidad, es instructivo leer las explicaciones de Einstein, que fue un buen expositor, de sus propias ideas (véase por ejemplo [**Ei2**] p. 70-80).

La pregunta natural es qué se gana con todo esto, porque en principio no parece haber ninguna ventaja en considerar que no existen fuerzas gravitatorias sino que las partículas se desvían porque hay baches[uff]. En primer lugar, con ello se da una explicación elegante al primer punto antes mencionado. No hay diferencia entre masa inercial y gravitatoria porque la deformación del espacio-tiempo es la misma independientemente de la partícula de prueba que usemos para medirla. La misma razón se aplica para deducir la acción de la gravedad sobre los fotones, que sugería el segundo punto, lo cual abre la puerta a nuevos efectos no cubiertos por la Física clásica. Por último, y ésta era quizá la cuestión más importante para Einstein, si nos creemos que en realidad nuestro universo físico es una variedad con cierta métrica, podemos usar el sistema de referencia (la carta) que nosotros deseemos, incluso no inercial. Uno de los objetivos finales que persiguió Einstein en la búsqueda de sus ecuaciones de campo (que veremos más adelante) fue inventar una forma de escribir la gravitación independiente del observador y que se tradujera en una igualdad entre tensores. Dicha igualdad establecerá de alguna forma cómo los cuerpos masivos

[uff] Esencialmente se podría decir que si Newton y Einstein estuvieran mirando un fragmento perdido de la estación espacial Mir que se acerca peligrosamente, el primero diría que cae porque la Tierra lo está atrayendo y el segundo que ha *pillado* una cuesta del espacio-tiempo. Pero la conclusión de ambos sería la misma: hay que salir corriendo.

deforman el espacio-tiempo, y explicará, aunque sólo sea de forma débil y cualitativa, el tercer punto.

Ahora vamos a traducir toda esta idea del espacio curvado matemáticamente. Comenzamos con una definición técnica que generaliza una notación introducida cuando estudiamos la relatividad especial. Simplemente queremos indicar que hay una variable destacada de las cuatro que emplearemos: el tiempo (compárese con §1.2).

DEFINICIÓN: *Sea G un tensor métrico definido en $\mathbb{R}^4$. Se dice que tiene índice 1 si existe algún subespacio, $V \subset \mathbb{R}^4$, de dimensión 1, en el que G es definida negativa (esto es, $G(\vec{v},\vec{v}) < 0$ para todo $\vec{v} \in V$) y no los hay de dimensión mayor. Los vectores que verifican $G(\vec{v},\vec{v}) < 0$ se llaman temporales (o de género tiempo), los que verifican $G(\vec{v},\vec{v}) > 0$ se llaman espaciales (o de género espacio) y los que verifican $G(\vec{v},\vec{v}) = 0$ se llaman nulos (o de género luz).*

Observación: Para métricas diagonales ($g_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$) ser de índice 1 equivale a que haya sólo una componente negativa, y con las técnicas de Álgebra Lineal (método de Gauss, etc.) todos los casos se reducen al diagonal. Por ejemplo, dado un tensor métrico que en cierta base tiene componentes $g_{00} = g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = -3$, $g_{22} = g_{33} = 4$ y $g_{\alpha\beta} = 0$ en otro caso; si $\vec{v}$ tiene coordenadas (a,b,c,d) entonces completando cuadrados (método de Gauss) se deduce $G(\vec{v},\vec{v}) = a^2 + (b-3c)^2 - 5c^2 + 4d^2$. Cambiando a una base relacionada con la empleada mediante $a' = a$, $b' = b - 3c$, $c' = c$, $d' = d$, es evidente que es de índice 1.

Queremos expresar la deformación en cada parte del Universo con un campo de tensores métricos como el anterior, usando cuatro coordenadas, esto es, como una variedad semiriemanniana cuatridimensional. Además, si la fuerza gravitatoria no tiene entidad propia sino que se debe a que dicha variedad no es plana, entonces las partículas libres describirán geodésicas (que llamaremos líneas de universo). Por el Lema 2.2.4, el carácter temporal, espacial o nulo de los vectores tangentes a una geodésica no varía a lo largo de ella, así que se puede hablar de geodésicas temporales, espaciales y nulas, dependiendo del carácter de sus vectores tangentes.

Todas estas ideas se concretan en la siguiente definición, que de forma muy exagerada pero no completamente errónea, se podría afirmar que convierte la Gravitación desde el punto de vista de la Teoría General de la Relatividad, en una parte de la Geometría Diferencial.

DEFINICIÓN: *Se llama espacio-tiempo a una variedad semiriemanniana cuatridimensional cuya métrica en cada punto tiene índice 1. Se llama línea de universo de una partícula* *material a una geodésica temporal y se llama línea de universo de un fotón a una geodésica nula.*

Notación: Siempre se puede elegir una carta $\big(\phi = (x^0, x^1, x^2, x^3), \mathcal{U}\big)$ de manera que ∂_0 sea temporal y $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ espaciales. Esto se traduce en que si la métrica es

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

(recuérdese que las letras griegas como índices varían de 0 a 3), se cumple $g_{00} < 0$ y $g_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, 3$. Siempre que usemos la notación x^0, x^1, x^2, x^3, supondremos una carta con estas características. Una vez escogida una de estas cartas, quizá cambiando el parámetro por su opuesto, podemos conseguir que las líneas de universo sean en cierto entorno geodésicas futuras, esto es, $G(\vec{v}, \partial_0) < 0$ para $\vec{v}$ tangente a la geodésica.

En el caso de la línea de universo de una partícula material se puede hacer más. El efecto de cambiar el parámetro λ por $C\lambda$ se denomina *reparametrizar* y claramente transforma una geodésica en otra (con la misma “forma” pero con vectores tangentes C veces más largos). De acuerdo con el Lema 2.2.4 (véanse sobre todo los comentarios que le siguen), podemos reparametrizar una geodésica temporal para que $G(\vec{v}(\lambda), \vec{v}(\lambda)) = -1$. Esto lleva a un concepto que ya apareció al estudiar la relatividad especial.

DEFINICIÓN: *Se llama tiempo propio al parámetro, denotado por τ, de la línea de universo de una partícula material reparametrizada de forma que sea una geodésica futura, temporal y su vector tangente, $\vec{v} = \vec{v}(\tau)$, verifique $G(\vec{v}, \vec{v}) = -1$.*

Nótese que la condición $G(\vec{v}, \vec{v}) = -1$ es simplemente

$$-1 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}.$$

Que con el abuso obvio de la notación clásica, podemos escribir

$$-d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

El parámetro τ es como una variable temporal que indica la métrica inducida sobre la línea de universo. *Físicamente, el tiempo propio se identifica con el tiempo medido por un observador que viaja con la partícula.*

Obsérvese que el principio de inercia clásico (si no actúan fuerzas sobre una partícula material, permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme) se puede escribir como $d\vec{v}/dt = 0$. Con el lenguaje de la relatividad especial es $d\vec{U}/d\tau = 0$, donde ahora $\vec{U}$ es la cuadrivelocidad. El análogo en relatividad general (recuérdese que la fuerza gravitatoria no se considera tal fuerza) es $D\vec{U}/d\tau = 0$, que indica que la línea de universo es una geodésica. En general se espera que todas las fórmulas clásicas, tras las correcciones de la relatividad especial, tengan análogos en el espacio-tiempo de la relatividad general sin más que cambiar la derivación usual por la covariante. Esto es lo que se llama *principio de equivalencia fuerte* y por la notación usada habitualmente para las derivadas parciales y covariantes, a veces se sintetiza en la frase "la coma se convierte en punto y coma".

Las líneas de universo de los fotones, por ser geodésicas nulas, deben satisfacer

$$0 = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}$$

donde λ es el parámetro correspondiente (a veces llamado *parámetro afín*). Cuando la métrica es la de Minkowski, al dividir la igualdad anterior entre $dx^0/d\lambda$ se llega a que $(dx^1/dx^0)^2+(dx^2/dx^0)^2+(dx^3/dx^0)^2$ es constantemente uno. Pero, en general, para otras métricas esta cantidad irá variando a lo largo de la línea de universo. Si entendemos x^0 como el tiempo y x^1, x^2, x^3 como el espacio esto quiere decir que la velocidad de la luz, en este sentido, no tiene por qué ser constante, lo cual es perfectamente natural y coherente con la elección arbitraria de coordenadas. Por ejemplo, incluso en nuestro mundo supuesto euclídeo, si todas las reglas de medir estuvieran defectuosas de manera que las mayores longitudes tuvieran subdivisiones más próximas, entonces nos parecería que todo lo que se aleja (incluida la luz) aumenta su velocidad según avanza.

Hasta ahora hemos descrito varias ideas pero no se materializarán en fórmulas que lleven a cálculos concretos con los que se pueda experimentar si no sabemos la métrica del espacio-tiempo, aunque sólo sea, por ejemplo, cerca de una masa puntual estática. Esto es algo bastante complicado que llevó a Einstein varios años y, de hecho, el cálculo explícito final no lo hizo él (véase la primera sección del siguiente capítulo). Para comenzar, veamos un razonamiento no riguroso[**uff**] pero instructivo que nos puede dar alguna intuición (para un poco más de rigor véase [**Fo-Ni**] §2.7).

Supongamos que no estamos demasiado cerca de ninguna masa grande, entonces apenas sentiremos el campo gravitatorio y podemos suponer que la métrica es muy parecida a la de Minkowski, digamos

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$$

donde $-\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$ y ϵ es un número positivo pequeño. Supondremos también que la poca gravedad que sentimos apenas varía con el tiempo en

[**uff**] Éste es un "uff" por adelantado, porque acostumbrados a los razonamientos cabeza-cuadrada de los libros de Matemáticas, puede ser muy difícil dejar volar la imaginación y seguir los siguientes argumentos físicos. Sin embargo sin imaginación no hay Matemáticas, así que paciencia, que lo que viene en la próxima sección es peor.

cada punto fijo, esto es[clp] $h_{\alpha\beta,0} \approx 0$, y que las variaciones espaciales se mantienen bajo control, digamos $|h_{\alpha\beta,i}| < C$, $i = 1, 2, 3$ (en realidad basta exigirlo para $\alpha = 0$).

Bajo estas hipótesis estudiaremos las líneas de universo de las partículas materiales que se mueven a baja velocidad. Para ello debemos calcular los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\nu\mu}(g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}).$$

Si llamamos E y H, respectivamente, a las matrices 4×4 formadas por los $\eta_{\alpha\beta}$ y los $h_{\alpha\beta}$, se tiene, notando que $E = E^{-1}$, que la matriz de los $g^{\nu\mu}$ es

$$(E + \epsilon H)^{-1} = (E^{-1}(I + \epsilon EH))^{-1} = (I + \epsilon EH)^{-1}E \approx E - \epsilon EHE.$$

De hecho el error depende de ϵ^2. Con este grado de aproximación

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{2}\epsilon\, \eta^{\nu\mu}(h_{\alpha\mu,\beta} + h_{\mu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\mu}) \tag{3.1}$$

donde los $\eta^{\nu\mu}$ toman los mismos valores que los $\eta_{\nu\mu}$ correspondientes.

Las ecuaciones de las líneas de universo (geodésicas) son

$$\frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0.$$

Para velocidades pequeñas $dx^i/d\tau \approx 0$, $i = 1, 2, 3$. Según esta aproximación, como la definición de tiempo propio implica $-1 = (\eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta})(dx^{\alpha}/d\tau)(dx^{\beta}/d\tau)$, se deduce

$$\frac{dx^0}{d\tau} \approx 1 \qquad \text{y por tanto} \qquad \frac{d^2x^i}{d\tau^2} \approx \big(\frac{dx^0}{d\tau}\big)^{-1}\frac{d}{d\tau}\big(\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^0}{d\tau}\big) \approx \frac{d^2x^i}{dt^2} \quad i = 1, 2, 3,$$

salvo términos que dependen de ϵ, donde hemos escrito $t = x^0$ (por ser la variable temporal).

Sustituyendo todo esto en la ecuación de las líneas de universo,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^{i}_{00} \approx 0.$$

[clp] En una primera lectura se aconseja considerar sólo el caso estático $h_{\alpha\beta,0}$=0. En general, $h_{\alpha\beta,0}$ se supone muy pequeño incluso comparado con ϵ.

Empleando (3.1) y $h_{\alpha\beta,0} \approx 0$, se tiene

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} - \frac{1}{2}\epsilon h_{00,i} \approx 0$$

para $i = 1, 2, 3$. Lo cual se puede escribir, con una notación más clásica en la que $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$; como

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) \approx \nabla \frac{g_{00} + 1}{2}.$$

En la Mecánica Clásica el primer miembro es la aceleración y debe ser igualada a la fuerza por unidad de masa, esto es, a la intensidad de campo, que a su vez es el opuesto del gradiente del potencial V. Por tanto, si queremos que la relatividad general se aproxime a la teoría clásica, debe cumplirse[uff]

$$g_{00} \approx -2V - 1.$$

Por ejemplo, según la fórmula de gravitación universal, cerca de una masa M se cumple

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} = -\nabla V \qquad \text{con } V = -\frac{GM}{r}, \quad r = ||\vec{r}||.$$

Por tanto, sea cual sea la métrica del espacio-tiempo alrededor de una masa, debe tener aproximadamente el aspecto

$$ds^2 = -(1 - 2GM/r)dt^2 + \dots \tag{3.2}$$

A pesar de las limitaciones de este resultado (no conocemos más que una componente de la métrica) y de ser meramente aproximado (aunque más de lo que cabría esperar, según veremos en el próximo capítulo), permite obtener ya una consecuencia sorprendente para nuestra mentalidad clásica: En presencia de una masa el tiempo es relativo incluso para observadores en reposo. Por ejemplo, supongamos que hay una breve explosión en un punto lejano del Universo que con las coordenadas empleadas dura una décima de segundo, $\Delta t = 0'1\,s$. Digamos que los fotones despedidos al comienzo y al final viajan por una geodésica nula para llegar a dos observadores estáticos (que consecuentemente *ven* la explosión), uno situado a distancia R del centro de la Tierra y otro a distancia $2R$. Asumamos que la duración del destello en las coordenadas empleadas, $\Delta t = 0'1\,s$, no se modifica en su viaje por la geodésica (como veremos en el capítulo siguiente esto se debe

[uff] Los que estén más perdidos deben recordar que "por definición" el potencial V es la función tal que $-\nabla V$ da la intensidad de campo.

a que en (3.2) los $g_{\alpha\beta}$ no dependen de t). Según (3.2) cada observador medirá un tiempo propio entre la llegada de los fotones dado respectivamente por

$$-(\Delta\tau_1)^2 \approx -(1-2GM/R)(0'1)^2, \qquad \text{y} \qquad -(\Delta\tau_2)^2 \approx -(1-GM/R)(0'1)^2,$$

(como no hay incremento en el espacio, nuestro desconocimiento acerca de la contribución de los puntos suspensivos es irrelevante). Por Taylor $(1-x)^{1/2} \approx 1-x/2$ para x pequeño, así pues

$$\Delta\tau_1 \approx 0'1 + 0'1\,GM/R, \qquad \Delta\tau_2 \approx 0'1 + 0'05\,GM/R.$$

La diferencia entre estas dos mediciones es, en unidades no relativistas (nótese que las dimensiones de GM/R son $[L^2T^{-2}]$ y $0'1$ y $0'05$ representan tiempos), de $0'05\,GM/(Rc^2)$ segundos que, incluso con el menor valor de R posible, $R = 6'37\cdot 10^6$ (el radio de la Tierra), es de sólo $3'47\cdot 10^{-11}s$, fuera de cualquier posibilidad de medición directa. Ciertamente este efecto queda amplificado en planetas o estrellas con M/R mayor, pero hay un límite debido a que para llegar a (3.2) hemos supuesto que la gravedad es pequeña.

Problemas 3.1

→**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Por qué no tendría sentido identificar las trayectorias de las partículas materiales con las geodésicas si la masa inercial y la gravitatoria no coincidieran?

ii) Si verdaderamente la gravedad actúa sobre un fotón que cae, según la conservación de la energía ¿dónde debiera estar más colorado (menor frecuencia) arriba o abajo? (Nota: Más adelante veremos que la gravedad también actúa sobre la forma en que percibimos los colores dependiendo de dónde estemos).

iii) Einstein afirmó ([**Ei2**] p. 120,121 que de los argumentos de Mach cabe esperar que: "Un cuerpo hueco dotado de movimiento rotatorio debe producir en su interior un 'campo de Coriolis', el cual desvía a los cuerpos en movimiento en el sentido de la rotación. También se origina un campo centrífugo radial". ¿Por qué? (*Indicación*: Explicarlo en el caso en que el cuerpo hueco, muy masivo, y una partícula de prueba en su interior sean los únicos objetos del Universo).

iv) ¿Por qué las geodésicas espaciales no son muy importantes en relatividad general?

v) Si $G:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es un tensor métrico de índice 1, ¿es la suma de vectores temporales necesariamente temporal?

vi) ¿Qué métrica se podría dar a $\mathbb{R}^4$ para que resultase un espacio-tiempo en el que la luz mañana fuera más despacio que hoy?

vii) ¿Cómo es posible que el tensor métrico $G:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que tiene como componentes $g_{11}=3$, $g_{22}=8$, $g_{12}=g_{21}=5$ en la base canónica $\mathcal{B}=\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ cumpla $G(\vec{v},\vec{v})<0$ para cierto $\vec{v}$ si $G(\vec{e_1},\vec{e_1})$ y $G(\vec{e_2},\vec{e_2})>0$ son positivos y $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{R}^2$?

2) Si $G : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es un tensor métrico de índice 1. Demostrar que siempre existe una base $\{\vec{e_0}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $G(\vec{e_0}, \vec{e_0}) < 0$ y $G(\vec{e_i}, \vec{e_i}) > 0$ para $i = 1, 2, 3$.

$\rightarrow$**3)** Demostrar que en un espacio-tiempo con curvatura escalar no nula no existe ninguna carta $\big(\phi = (x^0, x^1, x^2, x^3), \mathcal{U}\big)$ con ∂_0 temporal y $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ espaciales de manera que los ∂_α sean ortonormales, esto es, $G(\partial_\alpha, \partial_\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$ y $-G(\partial_0, \partial_0) = G(\partial_1, \partial_1) = G(\partial_2, \partial_2) = G(\partial_3, \partial_3) = 1$.

4) Estudiar si son de índice uno las métricas en $\mathbb{R}^4$ cuyas matrices de coeficientes se indican a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

En caso de que lo sean, calcular un vector temporal y otro nulo.

5) Comprobar que la métrica de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

queda invariante por el cambio de coordenadas dado por la transformación de Lorentz. Hallar sus geodésicas temporales, nulas y espaciales.

$\rightarrow$**6)** Sea una métrica $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ y $\mathcal{L}$ el lagrangiano correspondiente. Se llama *momento generalizado* p_γ a $p_\gamma = \partial\mathcal{L}/\partial\,\dot{x}^\gamma$. Demostrar que si en un espacio-tiempo $g_{\alpha\beta}$ no depende de la variable x^γ entonces el momento generalizado p_γ se conserva a lo largo de cada línea de universo.

7) Sea $\big(\phi = (x^0, x^1, x^2, x^3), \mathcal{U}\big)$ una carta del espacio-tiempo con ∂_0 temporal y $g_{0i} = g_{i0} = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Demostrar que si $\vec{v}(\lambda)$ es el vector tangente (en función del parámetro) a una línea de universo incluida en $\mathcal{U}$, entonces $G(\vec{v}(\lambda), \partial_0) \neq 0$ y por tanto el signo $G(\vec{v}(\lambda), \partial_0)$ de no varía y el caracter futuro o pasado de la línea de universo se conserva.

$\rightarrow$**8)** Sea $M = \{(t, x, y, z) : t > -1,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ con la métrica $(1+t)dtdx + dy^2 + dz^2$.

a) Demostrar que es un espacio-tiempo aunque ninguno de los vectores de la base natural $\{\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial x, \partial/\partial z\}$ es temporal.

b) Hallar explícitamente las líneas de universo.

c) Hallar un cambio de carta $x^\alpha = f^\alpha(t, x, y, z)$ de manera que ∂_0 sea temporal y $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ espaciales.

9) Sea $B = (I + \epsilon A)^{-1}$ y $C = I - \epsilon A$ con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, I la matriz identidad y $\epsilon > 0$.

a) Si M_k es el valor absoluto máximo de los elementos de A^k, probar por inducción que $M_k \le n^{k-1} M_1^k$.

b) Deducir que para ϵ suficientemente pequeño la serie matricial

$$I - \epsilon A + \epsilon^2 A^2 - \epsilon^3 A^3 + \epsilon^4 A^4 - \dots$$

converge y lo hace a B.

c) Demostrar que para cada A existe una constante K y un $\epsilon_0 > 0$ tal que $|b_{ij} - c_{ij}| < K\epsilon^2$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$. (Nota: Esto justifica la aproximación de los $g^{\nu\mu}$ en el cálculo de los símbolos de Christoffel).

$\rightarrow$**10)** En Errelandia sus habitantes creen vivir en una recta real, $\mathbb{R}$, en la que hay una fuerza gravitatoria pero un físico les ha dicho que las fuerzas gravitatorias no existen y lo que ocurre es que el espacio-tiempo tiene la métrica

$$ds^2 = -(1 + x^2)dt^2 + dx^2.$$

a) Hallar las ecuaciones diferenciales que definen las líneas de universo en Errelandia.

b) Considérese la línea de universo (parametrizada por el tiempo propio) de una partícula que parte del reposo desde el punto $p \in \mathbb{R}$, esto es, $x(0) = p$, $x'(0) = 0$. Calcular la "aceleración" $x''(0)$.

c) Deducir del apartado anterior que para los errelandeses hay un "sol" en el origen, porque las partículas en reposo de $(0, +\infty)$ se aceleran hacia la izquierda y las de $(-\infty, 0)$ hacia la derecha.

$\rightarrow$**11)** Repetir los apartados a) y b) del problema anterior considerando la métrica generalizada en Errelandia

$$ds^2 = -A(x^2)dt^2 + dx^2$$

donde A es positiva y A' no se anula. Concluir que si $A' > 0$ los errelandeses pensarán que hay un "sol" en el origen y si $A' < 0$ que dicho "sol" tiene masa negativa pues repele las partículas.

12) Considérese la métrica

$$-dt^2 + x^{-4}dx^2 + dy^2 + dz^2$$

en $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) Hallar las ecuaciones que definen las geodésicas.

b) Resolver explícitamente dichas ecuaciones.

c) Demostrar que en este espacio-tiempo un fotón puede ir de $(1,0,0)$ a $(\infty,0,0)$ en un segundo. Esto es, que hay una línea de universo (nula) conectando $(0,1,0,0)$ y $(1,\infty,0,0)$.

→**13)** Supongamos un espacio-tiempo en el que la métrica es $-dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ con $i,j = 1,2,3$; donde g_{ij} no depende de t.

a) Probar que en las líneas de universo temporales la variable tiempo, t, y el tiempo propio coinciden salvo multiplicación o suma de constantes. Esto es, $t = a\tau + b$.

b) Demostrar que si las rectas $(x^1, x^2, x^3) = \vec{v}t$ definen líneas de universo para cada $\vec{v}$ fijado en cualquier dirección de $\mathbb{R}^3$, entonces necesariamente todos los g_{ij} son constantes. Demostrar que en este caso los incrementos de tiempo y de tiempo propio entre dos puntos de una línea de universo (temporal) están relacionados por $\Delta t = \Delta\tau/\sqrt{1 - G(\vec{v},\vec{v})}$.

14) Para introducir cierto modelo cosmológico, Einstein consideró la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}^4$ en la esfera $x^2+y^2+z^2+u^2 = R^2$ con la carta proyección $\phi(x,y,z,u) = (x,y,z)$. Explicar el siguiente razonamiento de Einstein, **[Ei2]** p. 125-126, donde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ y $\delta_{\mu\nu} = 1$ si $\mu = \nu$ y cero en otro caso:

[...] *tenemos*

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + \frac{(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2}{R^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2}.$$

En cuanto consideremos términos de tercer y cuarto grado en x_i, podemos escribir, para las proximidades del origen de coordenadas

$$ds^2 = \big(\delta_{ij} + \frac{x_ix_j}{R^2}\big)dx_idx_j.$$

Einstein también afirma después que las derivadas primeras de los g_{ij} y los símbolos de Christoffel se anulan en el origen. Esto está claro en la última aproximación. Explicar cómo podía saber (sin hacer los cálculos) que también se cumple para la métrica original.

Historias en titulares:

Pródigo Prodigio

Después de haber usado una novedosa artillería matemática, Einstein ha cambiado radicalmente sus opiniones de años atrás y ha escrito a su amigo y colega Sommerfeld: "He adquirido gran respeto por las Matemáticas, cuyas partes más sutiles, en mi simpleza, había considerado puro lujo hasta ahora". Este respeto por las Matemáticas cada vez más se está volviendo adoración por su parte.

1916

El As

El conocido físico K.S. Thorne ha afirmado en un documental televisivo que "si Einstein no hubiera descubierto las leyes de la relatividad restringida Poincaré o Lorentz las hubiera descubierto poco tiempo después, y si Einstein no hubiera sentado las bases de la teoría cuántica, Bohr, Planck o Heisenberg lo habrían hecho antes de 10 años. Pero la relatividad general es diferente. Pertenece por entero a Einstein y sin él el mundo habría esperado muchos decenios antes de que alguno comprendiera que la gravedad está causada porque el espacio-tiempo está curvado".

los 80

La Razón y Fe

Han pasado más de 10 años desde la creación de la Teoría General de la Relatividad, y su creador se ha convertido, a su pesar, en un ídolo de masas, un fenómeno social al que persiguen los periodistas. Pero muy pocos conocen siquiera los fundamentos de su teoría. Según se lee en un artículo del *The New York Times*, "Rara es la exposición de la relatividad que no considere necesario advertir al lector aquí, aquí y allá es mejor que no trate de entender".

1928

¿Qué hay que saberse?:

Lo que hay que saberse es bien poco, simplemente las definiciones de espacio-tiempo, línea de universo y tiempo propio, y una idea de lo que representan. Esencialmente que la relatividad general establece un diccionario entre la gravitación y la Geometría Diferencial.

• Las deformaciones del espacio-tiempo debidas a la gravedad se representan mediante una variedad semiriemanniana cuyas geodésicas nulas y temporales, llamadas líneas de universo, indican respectivamente las trayectorias de los fotones y las partículas materiales. En este último caso, si se normalizan las geodésicas de manera que el vector tangente sea unitario, el parámetro indica el tiempo medido por un observador que viaja con la partícula, llamado tiempo propio.

¿Para qué sirve?:

Para construir una nueva gravitación que supere algunos problemas teóricos de la de Newton. Es importante hacer hincapié en que en la práctica los cálculos referentes a las órbitas de los planetas o al movimiento de las sondas espaciales se siguen haciendo con la gravitación newtoniana. La relatividad general sólo muestra divergencias significativas con respecto a la gravitación clásica en condiciones extremas (por ejemplo en los agujeros negros). Por ello es hoy por hoy difícilmente concebible que la relatividad general beneficie a la humanidad en el plano práctico (con algún tipo de máquinas) en un plazo corto, medio o incluso largo. Más bien al revés, los finos experimentos para corroborar algunas predicciones (por ejemplo la existencia de ondas gravitatorias) requieren inversiones pecuniarias no recuperadas. En el plano científico la situación es bien distinta, la relatividad general sirve, y mucho, porque es cierta (hasta donde sabemos en la actualidad), bella y permite dar muchas explicaciones en Astrofísica.

3.2. Las ecuaciones de campo

Resumiendo a grandes rasgos algunas de las ideas introducidas acerca de la gravitación, podríamos decir que según Newton, las masas ejercen una fuerza de naturaleza "misteriosa" pero de intensidad conocida $-GM\vec{r}/r^3$ (o $-\nabla V$ en general, donde V es el potencial gravitatorio si la masa no es necesariamente puntual), mientras que según Einstein, las masas causan una curvatura "misteriosa" y desconocida del espacio-tiempo. Si nos detenemos en este punto, como hacen algunos libros de divulgación científica, hay muchas objeciones que hacer. La principal es que no parece haber ninguna ventaja en sustituir fuerzas misteriosas sencillas por complejas métricas igual de misteriosas y en principio desconocidas. Ya habíamos mencionado este problema en la sección anterior, y al final vimos que incluso dentro de este desconocimiento, combinando la gravitación newtoniana y la formulación de Minkowski de la relatividad especial dentro del marco geométrico del espacio-tiempo, se obtenían, de forma no muy rigurosa, nuevos efectos no cubiertos por estas teorías. Sin embargo por este camino no se puede llegar a resultados generales coherentes, porque la gravitación newtoniana sólo es válida para velocidades no relativistas (v/c pequeño) y, según hemos visto, la relatividad especial necesita ser revisada en presencia de campos gravitatorios. Una Teoría *General* de la Relatividad necesita sus propias fórmulas.

Recordemos en primer lugar cuáles eran las fórmulas en el caso newtoniano escritas con el lenguaje matemático adecuado. En un campo gravitatorio podemos suponer que la intensidad de campo $\vec{E}$ es la suma de las intensidades $-G\vec{r}dm/r^3$ de cada una de las partículas infinitesimales que componen las masas que lo generan. Exactamente el mismo razonamiento con el que dedujimos la primera ecuación de Maxwell en el primer capítulo lleva a

$$\operatorname{div}\vec{E} = -4\pi G\rho$$

donde ρ es la densidad de masa (masa por unidad de volumen) y G es la constante de gravitación universal, aproximadamente $G = 6'67\cdot 10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$. Típicamente se considera que uno no está dentro de las masa que generan un campo gravitatorio y por tanto $\rho = 0$.

En un campo conservativo las intensidades se pueden expresar como el opuesto del gradiente de un potencial, así que la fórmula anterior se puede escribir, sustituyendo $\vec{E} = -\nabla V$, como la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi G\rho. \tag{3.3}$$

Si buscamos las soluciones radiales con $\rho = 0$ que se anulan en el infinito obtendremos

$V = -GM/r$ y de aquí recuperamos que la intensidad de campo en el exterior de una masa puntual es $-GM\vec{r}/r^3$. Es decir, (3.3) contiene a la fórmula clásica de Newton (al igual que la primera ecuación de Maxwell para campos estáticos contiene a la ley de Coulomb). Por otra parte, si $V = 0$ la fuerza es nula y por tanto la aceleración también lo es, de lo cual se deduce $d\vec{v}/dt = 0$ en consonacia con el principio de inercia. En relatividad especial se puede escribir en ausencia de fuerzas $d\vec{U}/d\tau = 0$ donde $\vec{U}$ es la cuadrivelocidad, y en relatividad general queremos llegar a que las trayectorias son geodésicas, esto es, $D\vec{U}/d\tau = 0$, lo cual coincide con lo anterior para $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. La métrica en el espacio-tiempo desempeña el papel del potencial y sería deseable encontrar el análogo de (3.3). Dicho análogo son las ecuaciones de campo de Einstein.

En resumen, queremos completar el esquema (cf. [**Hu-To**] §13)

$$\begin{array}{ccccc}
 & D\vec{U}/d\tau = 0 & & d\vec{v}/dt = -\nabla V & \\
\boxed{¿\ ?} & \text{Relatividad general} & \xrightarrow[v/c\to 0]{} & \text{Gravitación newtoniana} & \boxed{\Delta V = -4\pi G\rho} \\
 & \Bigg| G \to 0 & & \Bigg| G \to 0 & \\
 & \text{Relatividad especial} & \xrightarrow[v/c\to 0]{} & \text{Cinemática newtoniana} & \\
 & d\vec{U}/d\tau = 0 & & d\vec{v}/dt = 0 &
\end{array}$$

Como ya indicábamos en la sección anterior, una de las cosas que más importante le pareció a Einstein es que la ecuación buscada no dependiera de la carta elegida y, para ello, que fuera una igualdad entre tensores. Concretamente algo de la forma

$$\begin{array}{l} \textit{Tensor dependiendo} \\ \textit{de la curvatura} \end{array} = \begin{array}{l} \textit{Tensor dependiendo} \\ \textit{de la masa (y energía)} \end{array}$$

que expresase que la masa curva el espacio.

La "deducción" de las ecuaciones de campo que incluyen la mayoría de los textos de relatividad general (e incluso el propio Einstein en [**Ei2**]) es en cierto modo engañosa, porque da la falsa impresión de que hay un razonamiento natural y sencillo que lleva indefectiblemente a las únicas ecuaciones posibles. Nada más lejos de la realidad, ya que a Einstein no sólo le llevó varios años obtener sus ecuaciones de campo, sino que antes de tener éxito publicó formas erróneas o incompletas de dichas ecuaciones (véase [**Mi-Th-Wh**] §17.7 y [**Pa**] Cap. IV).

Veremos primero la deducción habitual y más adelante otra mucho más sólida y profunda debida a D. Hilbert. Pero antes de nada debemos hacer un receso para introducir algunos conceptos de Física.

El término ρ del segundo miembro de (3.3) es la razón entre la masa y el volumen. Para un observador admisible de Minkowski con velocidad v, estas cantidades se transforman como (por la dilatación de la masa y contracción del espacio)

$$m \mapsto m' = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \text{Vol.} \mapsto \text{Vol.}' = \text{Vol.}\sqrt{1-v^2}.$$

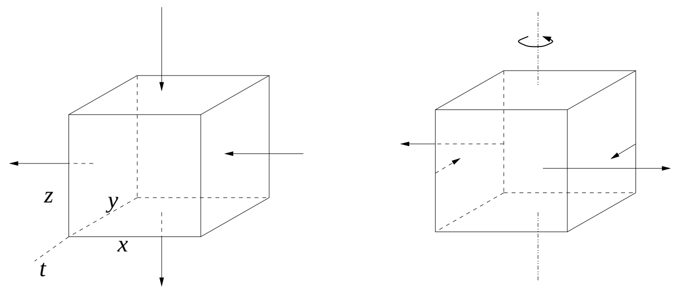
Así pues $\rho' = \rho/(1-v^2)$, y como en las transformaciones de Lorentz $\partial t/\partial t' = 1/\sqrt{1-v^2}$, podemos sospechar que ρ es la componente de un tensor dos veces contravariante que, como la masa es lo mismo que la energía y la energía es una componente del cuadrimomento, medirá cierta densidad del cuadrimomento. Tal tensor, llamado <u>tensor energía-momento</u> y denotado habitualmente por $\mathbf{T}$, tiene su análogo en la mecánica de fluidos. Si consideramos la línea de universo $(x^0(\tau), \dots, x^3(\tau))$, de una partícula material, podemos definir, como en relatividad especial, su cuadrimomento como el vector $m\vec{U}$ con $\vec{U}$ la cuadrivelocidad $U^\alpha = dx^\alpha(\tau)/d\tau$. En un medio continuo compuesto por muchas partículas, tendremos infinitos cuadrimomentos infinitesimales y el tensor energía-momento mide su densidad. Sus componentes se "definen" como

$$T^{\alpha\beta} = \begin{array}{l} \textit{densidad de la componente } \alpha \textit{ del cuadrimomento} \\ \textit{en la "superficie" (tridimensional) } x^\beta = \textit{cte.} \end{array}$$

Por ejemplo, T^{00} es la energía por unidad de volumen espacial. Dos propiedades fundamentales son

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \qquad \text{y} \qquad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}.$$

Explicaremos brevemente su significado. Dado un punto p, si consideramos una carta con la del Lema 2.3.3, la primera ecuación afirma $T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$, y esto es como decir que la variación del cuadrimomento es un cubo infinitesimal alrededor de p es nula, es decir, que el cuadrimomento se conserva (el momento que entra por unas caras sale por otras. Recuérdese el teorema de la divergencia).



$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ $\qquad$ $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$

La simetría es más difícil de explicar y tiene que ver con la conservación del momento angular (véase [**Mi-Th-Wh**] §5.7 y [**Sc**]). La idea es que aunque los cuadrimomentos estén compensados globalmente, si no lo estuvieran en "caras adyacentes" se produciría un giro debido al par de fuerzas que se puede probar que lleva a una velocidad angular infinita del elemento de fluido girando sobre sí mismo[uff].

Ciertamente, en ausencia de masa (y energía) $\mathbf{T} = 0$ y se puede probar (véase [**Sc**]) que en un fluido perfecto (esto es, con rozamiento nulo entre partículas que viajen paralelamente) en el que el campo de cuadrivelocidades de las partículas es $\vec{U}$, se tiene

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + pg^{\alpha\beta}$$

donde ρ es la densidad (en reposo) y p la presión. Al final de la sección veremos que ésta es la expresión correcta siempre que la "energía interna" dependa de la densidad.

En definitiva, existe un tensor de tipo $(2,0)$ que tiene relevancia en Física y que generaliza, salvo constantes el segundo miembro de (3.3). Según lo dicho antes, debemos buscar una ecuación del tipo

$$\text{Tensor dependiendo de la curvatura} = \mathbf{T}.$$

Teniendo en cuenta que la métrica es la generalización del potencial clásico, para que el tensor desconocido del primer miembro guarde la analogía con (3.3), exigimos que contenga a lo más derivadas segundas de los $g_{\alpha\beta}$ y que sea lineal en ellas. De los tensores que hemos visto, el tensor de Riemann, el de Ricci, la curvatura escalar y la propia métrica tienen estas propiedades. Como $\mathbf{T}$ es dos veces contravariante, podemos probar con $R^{\alpha\beta}$, $Rg^{\alpha\beta}$ y $g^{\alpha\beta}$ o cualquiera de sus combinaciones lineales. Esto es, si llamamos $\mathbf{G}$ al tensor buscado, ensayamos con

$$G^{\alpha\beta} = \lambda_1 R^{\alpha\beta} + \lambda_2 Rg^{\alpha\beta} + \lambda_3 g^{\alpha\beta}.$$

De hecho, se puede enunciar un teorema (seguramente inicialmente desconocido por Einstein) afirmando que éstos son los únicos tensores de tipo $(2,0)$ simétricos, dependiendo de todas las componentes de la métrica, sus derivadas y derivadas segundas y lineal en éstas últimas (Ex. 17.1, 17.3 [**Mi-Th-Wh**]). Como $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$, de la Proposición 2.3.5 se sigue $\lambda_2 = -\lambda_1/2$. Además si queremos que el espacio plano de Minkowski sea solución en un universo vacío de masas y energía (en particular $\mathbf{T} = 0$), se tiene que $\lambda_3 = 0$. En definitiva

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = cT^{\alpha\beta}$$

[uff] Cuando uno gira un volante con las dos manos agarrándolo por su diámetro, las fuerzas y velocidades asociadas a cada una de las manos están compensadas. La relación entre velocidad lineal y angular, $v{=}\omega{\cdot}r$, implica que cuando v es finita y el radio de giro se hace infinitesimal ω tiende a ∞. Una explicación para ciclistas es que usando el plato pequeño (r menor) hay que dar más pedaladas por minuto (ω mayor) para ir a la misma velocidad, y si el plato fuera infinitamente pequeño habría que darlas infinitamente rápido para avanzar algo.

donde c es una constante. Multiplicando por $g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}$ se obtiene la misma ecuación en forma covariante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = cT_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

donde $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}$. Multiplicando por $g^{\mu\alpha}$ y después sumando en $\alpha = \nu$, se deduce

$$R - \frac{1}{2}R\cdot 4 = -R = cT \qquad \text{donde } T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}.$$

Por consiguiente (3.4) se puede escribir como

$$R_{\mu\nu} = cT_{\mu\nu} - \frac{c}{2}Tg_{\mu\nu}$$

que, como antes, tiene su versión contravariante

$$R^{\alpha\beta} = cT^{\alpha\beta} - \frac{c}{2}Tg^{\alpha\beta}. \tag{3.5}$$

Cualquiera de estas ecuaciones son diferentes formas de lo que llamaremos ecuaciones de campo, pero antes de que reciban ese nombre vamos a ver la relación que guarda la constante con la de gravitación universal. Esto es algo meramente técnico si usamos que para campos gravitatorios débiles y velocidades pequeñas debemos recuperar la teoría clásica de Newton. Así que supongamos como en la sección anterior que $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$ con las hipótesis allí exigidas y además $h_{\alpha\beta,\gamma 0} \approx 0$ (la métrica casi es independiente del tiempo) y $|h_{\alpha\beta,\gamma\delta}| < C$ (no presenta variaciones bruscas con el espacio). Con las aproximaciones ya vistas[uff]

$$R^{00} = g^{0\alpha}g^{0\beta}R_{\alpha\beta} \approx (g^{00})^2R_{00} \approx (g^{00})^2\big(\Gamma^{\nu}_{00,\nu} - \Gamma^{\nu}_{0\nu,0}\big)$$

salvo términos de orden ϵ^2. Nótese que $\Gamma^{\nu}_{0\nu,0}$ es despreciable porque involucra derivadas de la métrica con respecto al tiempo. Bajo nuestras hipótesis es fácil comprobar que

$$R^{00} \approx \Gamma^{\nu}_{00,\nu} \approx -\frac{1}{2}\epsilon(h_{00,1} + h_{00,2} + h_{00,3}) = -\frac{1}{2}\Delta g_{00}$$

(donde Δ indica el laplaciano $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$). Por otra parte T^{00} corresponde a la densidad de masa, ρ. Si, como hemos supuesto, la velocidad es pequeña, las compo-

[uff] Para entender esto es necesario repasarse la sección anterior. La primera aproximación se sigue de que $g^{\alpha\beta}$ casi es diagonal, y la segunda de que los productos de símbolos de Christoffel en la definición del tensor de Ricci involucran ϵ^2.

nentes espaciales del momento serán pequeñas y, por tanto, los $T^{\alpha\beta}$ son comparativamente pequeños para $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ y $g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \approx -\rho$. Introduciendo toda esta información en (3.5) con $\alpha = \beta = 0$ y además que, como vimos en la sección anterior, $g_{00} \approx -2V - 1$ donde V es el potencial newtoniano (supuesto pequeño), se tiene

$$\Delta V \approx c\rho/2.$$

Si queremos que esto sea coherente con la ecuación de Poisson (3.4), la única posibilidad es $c = 8\pi G$.

Con todo ello concluimos de (3.4) que las ecuaciones de campo de Einstein son

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}}$$

que según hemos comprobado, también se pueden escribir como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \qquad R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}), \qquad R^{\mu\nu} = 8\pi G(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg^{\mu\nu}).$$

Habitualmente se rinde honores a Einstein dándole su nombre al tensor del primer miembro de las ecuaciones de campo. Esto es, se llama tensor de Einstein (contravariante) al tensor **G** en el espacio-tiempo que tiene por componentes

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}.$$

Análogamente también se considera a veces el tensor de Einstein covariante (o mixto) de componentes $G_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}G^{\alpha\beta}$ (o $G^{\mu}_{\nu} = g_{\nu\beta}G^{\mu\beta}$). En cualquier caso, con esta notación las ecuaciones de campo se escriben de una forma especialmente breve

$$\boxed{\mathbf{G} = 8\pi G\mathbf{T}}$$

A continuación veremos la deducción de Hilbert de las ecuaciones de campo. A pesar de su importancia, al estar basada en el Cálculo de Variaciones (véase la Proposición 2.2.5) y en la forma de aplicarlo a la Mecánica, que no se tratan aquí, dentro de este curso es suficiente intentar entender las ideas previas y el enunciado del teorema que se da más adelante.

Desde el punto de vista físico, la deducción de Hilbert es muy interesante ya que parte como hipótesis de un principio de mínima acción, y la formulación de la Mecánica a través de este tipo de principios es tan sólida que ha subsistido a las revoluciones relativista y cuántica. Por otra parte, desde el punto de vista matemático, se obtienen las ecuaciones de campo como un teorema a partir de esta hipótesis, sin razonamientos heurísticos ajenos. De hecho, no se emplea la aproximación newtoniana como guía e incluso podríamos obviarla para hallar la constante $8\pi G$ si hiciéramos un solo experimento intrínsecamente relativista (el valor de G no lo explica en la actualidad ninguna teoría, sino que es plenamente experimental).

A pesar de estas ventajas, la deducción de Hilbert no sólo no aparece en muchos libros de relatividad general (lo cual tiene su sentido si no se quiere introducir el Cálculo de Variaciones), sino que muchas veces ni se menciona su existencia o la autoría de Hilbert, lo cual es notable teniendo en cuenta que Hilbert publicó las ecuaciones de campo correctas cinco días antes que el propio Einstein (véase [**Pa**] §14). Es necesario mencionar también como contrapartida que no hay duda acerca de la preeminencia de éste, porque Hilbert en el verano de 1915 asistió a unas conferencias que dio Einstein cuando tenía la teoría bastante ultimada, pero es realmente impresionante que en menos de cinco meses (en Noviembre de 1915) Hilbert llegara a las ecuaciones de campo más rápido que Einstein y de una forma muchísimo más elegante. Como ha sugerido algún autor, en justicia las ecuaciones de campo deberían llamarse de Einstein-Hilbert (véanse los comentarios en pp. 197-198 de [**Sc**]).

Antes de comenzar es ineludible decir algunas palabras acerca de los principios de mínima acción en Física (véase una introducción divulgativa en [**Fe-Le-Sa**] §19, y [**La**] para profundizar en el tema).

Por misteriosas razones que a veces han dado lugar a debates y consideraciones filosóficas (véase I.7 en [**La**]) la Naturaleza se empeña en diferentes contextos en que cierta cantidad integral, llamada acción, sea mínima. Por ejemplo, en la Mecánica clásica el lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema de partículas se define como la energía cinética menos la potencial y la acción es su integral en un intervalo de tiempo.

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q^1, \dots q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)dt$$

donde $q^i = q^i(t)$ y $\dot{q}^i = dq^i/dt$ son funciones que indican, quizá con coordenadas diferentes de las habituales, la posición y la velocidad. Si consideramos todas las posibles ecuaciones de movimiento (regulares) $q^i = q^i(t)$ de partículas que recorren trayectorias con extremos prefijados, la que "elige" el mundo físico real es la que hace que I sea mínima. Por analogía con el cálculo de una variable, esto implica que I apenas varía si cambiamos la trayectoria real $q^i(t)$ por $q^i(t) + \epsilon\eta^i(t)$ donde ϵ es pequeño y η^i son funciones arbitrarias C^∞ con derivadas nulas en los extremos. En Física habitualmente se toma ϵ infinitesimal y se dice que la variación de I es nula o que I es estacionaria, escribiéndose

$$\delta I = 0.$$

Para dar sentido riguroso a esta expresión aquí nos desviaremos de la interpretación clásica y diremos que δ indica el coeficiente de Taylor de primer grado en ϵ al cambiar q^i por $q^i + \epsilon\eta^i$ en una función (funcional) de los q^i y los $\dot{q}^i$. Por ejemplo $\delta q^i = \eta^i$, y se cumplen las propiedades

$$\frac{d}{dt}\delta q^i = \delta\dot{q}^i, \qquad \delta(fg) = (\delta f)g + f(\delta g), \qquad \delta F(q^1, \ldots, q^n) = \frac{\partial F}{\partial q^i}\delta q^i.$$

En definitiva, se comporta como una derivada. Con esta notación

$$\delta I = \int \delta\mathcal{L}\, dt = \int \big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i\big)dt = \int \big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\big)\delta q^i dt$$

donde el último paso se sigue integrando por partes. Como δq^i son funciones arbitrarias, de $\delta I = 0$ se deducen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0.$$

Lo que generaliza la Proposición 2.2.5 e indica, según lo visto en secciones anteriores, que las geodésicas son las curvas con menos "energía cinética total", $I = \int \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|$.

La mecánica de la relatividad especial también admite una formulación lagrangiana (véase **[La-Li]** §39 y **[La]** IX.5) aunque en la acción, en vez de integrarse con respecto del tiempo t, que no es absoluto, se integra con respecto al tiempo propio. Concretamente, para una partícula libre

$$I = -m\int d\tau = -m = \int \frac{d\tau}{d\lambda}d\lambda = -m\int \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta}\,d\lambda$$

con $\dot{x}^0 = t'(\lambda), \dot{x}^1 = x'(\lambda), \ldots$etc. Eligiendo $\lambda = t$ se puede escribir $I = -m\int\sqrt{1 - v^2}\,dt$ y de las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos que las partículas libres siguen líneas rectas (principio de inercia).

Tanto en el caso clásico como en el relativista, para medios continuos debemos integrar (= sumar) los lagrangianos de las partículas infinitesimales que los constituyen (añadiendo las interacciones si las hubiera), con lo cual la acción tendrá la forma

$$I = \int L \, d\Omega$$

donde $d\Omega$ es el diferencial de volumen en el espacio-tiempo. Por razones fáciles de adivinar a veces se dice que L es la *densidad lagrangiana* (aunque aquí conservaremos el nombre de lagrangiano cambiando ligeramente la notación). En el caso euclídeo clásico y en el espacio de Minkowski $d\Omega = dtdxdydz$, pero en general, en un espacio curvo $d\Omega = \sqrt{|g|}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ donde g es el determinante del tensor métrico. Esto se sigue porque por "definición" el volumen es aquello que vale 1 para sistemas ortonormales y se transforma con el jacobiano ante cambios de coordenadas. No es difícil comprobar que $\sqrt{|g|}$ tiene ambas propiedades.

La pregunta que se hizo Hilbert es cuál sería la acción en la relatividad general. Como hemos visto, Einstein consideró en cierto modo la gravitación como un efecto de naturaleza más geométrica que puramente física, así que el posible lagrangiano debe ser una función escalar que dependa intrínsecamente de la geometría del espacio-tiempo. Por otra parte, es obvio que es difícil curvar mucho el espacio-tiempo**[uff]**. Si lo imaginamos como una banda elástica, no parece descabellado suponer que el espacio-tiempo elige su geometría de manera que la "curvatura total" sea mínima en cada región y por tanto que

$$I_{\text{geom.}} = \int R \, d\Omega$$

sea estacionaria cuando se varía la métrica, donde R es la curvatura escalar. Ésta es la idea genial de Hilbert que llevará a las ecuaciones de campo**[clp]**. Si hay otros efectos físicos no gravitatorios: campos eléctricos, presiones asociadas a fluidos, colisiones entre partículas o energías "cinéticas" no nulas (las cuales aparecen incluso para partículas en reposo por $E = mc^2$); debemos agregar la acción $\int L \, d\Omega$ donde L es el lagrangiano que corresponda a estos sistemas físicos (obviamente en las regiones "vacías" $L = 0$). Simplemente para ajustar las constantes multiplicaremos esta acción por $16\pi G$, es decir, consideraremos

$$I_{\text{físic.}} = 16\pi G \int L \, d\Omega.$$

---

uff Para desviar mucho las partículas de sus trayectorias "naturales" rectilíneas, necesitamos grandes masas y energías.

clp Es decir, mientras que en la deducción habitual se procede por "tanteos" (como hizo el propio Einstein), Hilbert sólo exige un principio general bastante natural: el Universo intenta doblarse lo menos posible.

Con esta notación, el axioma del que partió Hilbert (véase [**Mi-Th-Wh**] §17.7) fue el principio de acción estacionaria

$$\boxed{\delta(I_{\text{geom.}} + I_{\text{físic.}}) = 0}$$

donde la variación se toma con respecto a los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ de la métrica.

Una vez dado L, se puede definir matemáticamente el tensor energía-momento como

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial g_{\alpha\beta}} \tag{3.6}$$

(lo cual, considerando el lagrangiano de una partícula libre, se puede comprobar que es coherente con la idea física de que $T^{\alpha\beta}$ representa la densidad de energía y momento. Véase [**We**] §12.1,2).

Teorema 3.2.1 (Hilbert): *Con las definiciones anteriores, sea*

$$I = I_{\text{geom.}} + I_{\text{físic.}}$$

Entonces la acción es estacionaria, $\delta I = 0$, frente a variaciones de la métrica $g_{\alpha\beta}$ si y sólo si se cumplen las ecuaciones de campo de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}.$$

En la demostración aparecerá un punto técnicamente delicado que trataremos separadamente.

Lema 3.2.2 : *En cada región del espacio-tiempo se cumple*

$$\int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}\, d\Omega = 0.$$

<u>Dem.(del Teorema)</u>: De las fórmulas $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ y $d\Omega = \sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, se sigue

$$\delta I_{\text{geom.}} = \int \delta(R\sqrt{-g}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \int \delta(R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

$$= \int \big((\delta R_{\alpha\beta}) g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + R_{\alpha\beta}(\delta g^{\alpha\beta})\sqrt{-g} + R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}(\delta\sqrt{-g})\big) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3.$$

Y usando el lema,

$$\delta I_{\text{geom.}} = I_1 + I_2$$

donde

$$I_1 = \int R_{\alpha\beta}(\delta g^{\alpha\beta})\sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \qquad I_2 = \int R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}(\delta\sqrt{-g}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3.$$

Como $g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu}$ es la "matriz" constante identidad, $(\delta g^{\alpha\mu})g_{\mu\nu} + g^{\alpha\mu}(\delta g_{\mu\nu}) = 0$ y multiplicando por $g^{\beta\nu}$ se obtiene

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

Por otra parte, tomando la variación y desarrollando por filas como en la demostración del Lema 2.3.6, resulta $\delta g = (\delta g_{\mu\nu})gg^{\mu\nu}$ (nótese que una manera más sencilla de entender esto es observar que $\partial g/\partial g^{\alpha\beta}$ no es otra cosa que el cofactor $\alpha\beta$, esto es, $gg^{\alpha\beta}$). Por consiguiente

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

Sustituyendo estas expresiones en I_1 e I_2, se deduce

$$\delta I_{\text{geom.}} = \int \big(- R_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\big)\delta g_{\mu\nu}\, d\Omega = -\int \big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\big)\delta g_{\mu\nu}\, d\Omega.$$

La variación de $I_{\text{físic.}}$ es un cálculo inmediato

$$(8\pi G)^{-1}\delta I_{\text{físic.}} = 2\int \delta(L\sqrt{-g}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = 2\int \frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

$$= \int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} d\Omega.$$

Como las variaciones $\delta g_{\mu\nu}$ son arbitrarias, se concluye que $\delta(I_{\text{geom.}} + I_{\text{físic.}}) = 0$ equivale a las ecuaciones de campo de Einstein. ■

Por razones de concisión, pasaremos sobre la demostración del Lema 3.2.2 sin pararnos en algunos cálculos y detalles que se dejan al lector interesado.

DEM.(del Lema): Por la tensorialidad, si usamos unas nuevas coordenadas x'^{α}, las componentes del tensor métrico covariante y contravariante se transforman como

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \qquad \text{y} \qquad g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}.$$

De aquí, se puede deducir (con cálculos tediosos pero no excesivamente complicados) que los símbolos de Christoffel se transforman mediante la fórmula

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}.$$

Como el último sumando no depende de $g_{\alpha\beta}$, desaparece al tomar variaciones y se tiene que $\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ define un tensor (porque se transforma como ellos). Por el Lema 2.3.3, dado un punto p existe alguna carta tal que los símbolos de Christoffel son nulos en p, por tanto

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu}.$$

Al ser ambos miembros tensores que coinciden en un punto arbitrario usando cierta carta, coinciden usando cualquiera. Recordando que $g^{\mu\nu}_{;\lambda} = 0$ y escribiendo $V^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, $W^\nu = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}$, se tiene que la integral del enunciado es

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d\Omega = \int \left(V^\lambda_{;\lambda} - W^\nu_{;\nu}\right)\sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{3.7}$$

Del Lema 2.3.6 se deduce que

$$\sqrt{-g}\, V^\lambda_{;\lambda} = (\sqrt{-g}\, V^\lambda)_{,\lambda} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{-g}\, W^\nu_{;\nu} = (\sqrt{-g}\, W^\nu)_{,\nu}$$

y al efectuar la integral de (3.7) se obtendrán los valores de $\sqrt{-g}\, V^\lambda$ y $\sqrt{-g}\, W^\nu$ en la frontera, pero como las variaciones se anulan allí, la integral es nula. ■

Obsérvese que las propiedades físicas que tenía el tensor energía-momento, $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ (conservación del momento lineal) y $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ (conservación del momento angular) se deducen ahora matemáticamente. La primera de las propias ecuaciones de campo, que ahora han sido obtenidas como teorema, y la segunda de (3.6) y la simetría del tensor métrico.

Hay otra forma con interés independiente de entender la igualdad $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ dentro del contexto variacional sin necesidad de usar las ecuaciones de campo , y está basada en una idea que describiremos aquí brevemente. Considerando el lagrangiano como función de las coordenadas y del tensor métrico, hagamos la hipótesis de que es invariante por cambios de coordenadas (de hecho tanto en el caso clásico como en el relativista se suelen utilizar invariancias para "inventar" el lagrangiano adecuado [**La-Li**]). Los cambios infinitesimales de las coordenadas inducen cambios infinitesimales en la métrica, y la invariancia del lagrangiano se puede traducir en un principio de acción estacionaria, bajo ciertas variaciones simultáneas de métrica y coordenadas, para $I_{\text{físic.}}$ que escrito convenientemente lleva a $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$. El instrumento matemático adecuado para obtener rápidamente esta conclusión (véase [**Ha-El**] p. 67) es la *derivada de Lie* (véase también [**We**] 12§3 para una exposición sin este concepto).

Para terminar, veamos cómo obtener el tensor de energía-momento de un fluido perfecto a partir de su lagrangiano. En vez de escribir directamente la integral de acción daremos la motivación física que la sugiere.

Si para una partícula libre relativista, como hemos indicado antes,

$$I = -\int m\, d\tau,$$

en un fluido que esté formado por infinitas partículas infinitesimales, deberíamos considerar

$$I = -\int \rho\, d\Omega$$

donde ρ es la densidad (en el espacio-tiempo). Como un fluido es un continuo de partículas, entre ellas habrá necesariamente interacciones (choques) a no ser que todas viajen en la misma dirección. Por consiguiente puede que una parte de la densidad no sea realmente la densidad correspondiente a las partículas materiales que llamaremos D, sino que, por la equivalencia masa-energía, tenga en cuenta cierta energía interna, que denotaremos por e y que dependerá de la densidad[uff]. En modelos generales se consideran también otras influencias sobre e, pero no entraremos en ello aquí y escribiremos

$$\rho = D + e(D).$$

Está claro que en el mundo físico real D no puede ser una función totalmente arbitraria de las coordenadas. Por ejemplo, en el caso clásico se impone que la masa total $\int D\, dxdydz$ no cambie con el tiempo (la masa ni se crea ni se destruye) y otras condiciones. Lo único que usaremos aquí es un análogo de este hecho. Concretamente, una vez fijada una carta, si $\vec{U}$ es el campo de cuadrivelocidades de las partículas que componen el fluido, para cada región C del espacio-tiempo,

$$\int_C D\vec{U}\, d\Omega$$

representa el cuadrimomento total de todas las partículas infinitesimales en C, lo cual no puede depender de la manera de medir longitudes, áreas, volúmenes..., esto es, de la

[uff] El roce hace el cariño o la repulsión. En términos físicos, si las partículas están más apiñadas habrá más choques.

métrica que usemos (siempre que la carta esté fijada). Como $d\Omega = \sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ y C es arbitraria, esto implica que $D\vec{U}\sqrt{-g}$ es independiente de la métrica.

Tras estas consideraciones, el cálculo de $T^{\alpha\beta}$ se reduce a unas manipulaciones matemáticas en (3.6) incluidas en la demostración del siguiente lema que es una versión simplificada de §3.3 Ex. 4 en **[Ha-El]** (nótese allí la errata en el signo de $2\rho\Delta\rho$).

Proposición 3.2.3 : *Sea el lagrangiano $L = -\rho$ donde $\rho = D + e$ con $e = e(D)$ y D una función arbitraria tal que $DU^\alpha\sqrt{-g}$ no depende de la métrica para cierto campo de vectores temporales unitarios $\vec{U}$, entonces el tensor energía-momento que corresponde a este lagrangiano es*

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + pg^{\alpha\beta}$$

donde $p = p(D)$ es cierta función llamada presión.

DEM.: Por (3.6)

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\Big(D\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha\beta}} + e\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha\beta}} + \frac{\partial D}{\partial g_{\alpha\beta}}\sqrt{-g} + \frac{\partial e}{\partial D}\frac{\partial D}{\partial g_{\alpha\beta}}\sqrt{-g}\Big).$$

Como $\partial(\sqrt{-g})/\partial g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}$, se tiene

$$T^{\alpha\beta} = -2\frac{\partial D}{\partial g_{\alpha\beta}}\big(1 + \frac{\partial e}{\partial D}\big) - (D + e)g^{\alpha\beta}. \tag{3.8}$$

Por hipótesis $DU^\mu\sqrt{-g}$ no depende de $g_{\alpha\beta}$ y $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$. Al derivar la identidad

$$D^2 = g^{-1}g_{\mu\nu}(DU^\mu\sqrt{-g})(DU^\nu\sqrt{-g})$$

se obtiene

$$2D\frac{\partial D}{\partial g_{\alpha\beta}} = (-g^{-1}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g^{-1}\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu)(DU^\mu\sqrt{-g})(DU^\nu\sqrt{-g}).$$

Multiplicando los paréntesis

$$2D\frac{\partial D}{\partial g_{\alpha\beta}} = -D^2 g^{\alpha\beta} - D^2 U^\alpha U^\beta,$$

que sustituido en (3.8) prueba el resultado con $p = -e + D\partial e/\partial D$. ∎

Problemas 3.2

→**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Qué significado tiene que para el campo gravitatorio $\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi G\rho < 0$ mientras que para el campo eléctrico $\operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0^{-1}\rho > 0$ (para cargas positivas)? ¿No es acaso en ambos campos la fuerza proporcional al producto de masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia?

ii) Sea B una bola y ∂B su frontera (en la que suponemos que no hay masas ni cargas). ¿Es verdad que en el campo gravitatorio clásico $\int_{\partial B} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \;\Rightarrow\; B$ no contiene masas? ¿Y en el campo eléctrico?

iii) Supongamos dos masas unidas a través de una varilla inextensible de masa despreciable que les impide acercarse. La ecuación de Poisson, $\Delta V = 0$, es la misma y con las mismas condiciones de frontera tanto si existe la varilla como si no, sin embargo, claramente los dos sistemas se comportarán de manera distinta. ¿Por qué esto no contradice la unicidad de la solución de la ecuación de Laplace estudiada en los cursos de ecuaciones?

iv) Si la Teoría General de la Relatividad intenta ser una mejora de la gravitación newtoniana, ¿por qué no es incorrecto usar esta última teoría para hallar la constante en las ecuaciones de campo? ¿Es dicha constante exactamente $8\pi G$ o sólo aproximadamente?

v) ¿Por qué está claro físicamente que la métrica de Minkowski no es la única solución de las ecuaciones de campo con $T^{\alpha\beta} = 0$.

vi) ¿Cuánto vale $G^{\mu\nu}_{;\nu}$?

2) Calcular G^μ_μ donde G^ν_μ es el tensor de Einstein mixto, esto es $G^\nu_\mu = g^{\nu\alpha}G_{\alpha\mu}$.

$\rightarrow$**3)** Demostrar con detalle que

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = 8\pi G T^{\alpha\beta}$$

implica que $R = -8\pi G T$ (con $T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$) y por tanto $R = 0 \Leftrightarrow T = 0$.

$\rightarrow$**4)** Supongamos una relatividad general en n dimensiones con unas ecuaciones de campo del tipo

$$R_{ij} - kg_{ij}R = 0$$

cuando el tensor de energía-momento es nulo.

a) Demostrar que si $k \neq 1/n$ se tiene necesariamente $R = 0$.

b) Hallar R_{ij} y R para la esfera unidad S^2 en coordenadas esféricas (recuérdese que la métrica era $d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$ y ya habíamos calculado los símbolos de Christoffel).

c) Comprobar con el ejemplo de b) que la condición $k \neq 1/n$ de a) es necesaria.

$\rightarrow$**5)** Calcular el tensor de Einstein para $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ con la métrica $g_{00} = -(x^0)^2$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ y $g_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$. (*Indicación*: Con un cambio de variable previo, no es necesario hacer ningún cálculo).

6) Calcular el tensor de Einstein para el espacio-tiempo de Einstein-de Sitter $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ con la métrica $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = (x^0)^{4/3}$ y $g_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$.

$\rightarrow$**7)** Hallar $T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$ para un espacio-tiempo que tenga la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + e^t(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

y satisfaga las ecuaciones de campo.

$\rightarrow$**8)** En Errelandia sus habitantes creen vivir en una recta real, $\mathbb{R}$, bajo la acción de la gravedad y finalmente un físico les ha convencido de que no hay un sol en el origen, sino que que el espacio-tiempo tiene la métrica

$$ds^2 = -B^2(x)dt^2 + dx^2$$

donde $B \neq 0$ en $\mathbb{R} - \{0\}$.

a) Suponiendo que fuera del origen se cumple el análogo de las ecuaciones de campo (para $\mathbf{T} = 0$):

$$R_{ij} = 0,$$

y que $B(0) = 0$, $B'(0) = 1$, calcular la función B.

b) Partiendo del resultado del apartado anterior, estudiar qué métrica se obtendría si se decretase que las nuevas coordenadas del espacio-tiempo que deben usar los errelandeses son $X = x \cosh t$, $T = x \operatorname{senh} t$.

9) a) Sea $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual y la carta identidad. Considérese un cambio carta y sea g el determinante de la nueva métrica g_{ij}. Demuéstrese que $\sqrt{g}$ coincide con el valor absoluto del jacobiano de la transformación.

b) Generalizar este resultado a subvariedades de $\mathbb{R}^n$ y explicar por qué esto significa que la diferencial de volumen es $d\Omega = \sqrt{g}\, dx^1 \dots dx^m$.

$\rightarrow$**10)** Según un primer modelo de Einstein, el Universo globalmente tiene una métrica que con coordenadas adecuadas (digamos t para el tiempo y r, θ y φ para el espacio en coordenadas esféricas) puede escribirse en ciertas unidades como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2.$$

a) Teniendo en cuenta que cuando nació la relatividad general se pensaba que el Universo era estático, justificar la suposición de Einstein de que $T^{\alpha\beta} = 0$ excepto $T^{00} = \rho > 0$ donde ρ es la densidad de masa del Universo.

b) Demostrar que este modelo no satisface las ecuaciones de campo.

Nota: Para evitar contradecirse a sí mismo, Einstein añadió un nuevo término a las ecuaciones de campo. En la actualidad se sabe que el modelo es incorrecto porque no refleja la expansión del Universo.

11) En el exterior de una masa estática con simetría esférica $\mathbf{T} = 0$ y según veremos en el capítulo siguiente, la métrica es la de Schwarzschild que tiene la forma

$$ds^2 = -(1 + Kr^{-1})dt^2 + (1 + Kr^{-1})^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

donde K es una constante (relacionada con la masa). Demostrar que $R_{00} = 0$ y explicar por qué esto es coherente con las ecuaciones de campo.

12) En el interior de una masa estática con simetría esférica la métrica, en lugar de la de Schwarzschild citada en el ejercicio anterior, es

$$ds^2 = -A^2(r)dt^2 + (1 + Kr^2/R^3)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

donde R es una constante (el radio de la masa estática) y

$$A(r) = \frac{3}{2}(1 + K/R)^{1/2} - \frac{1}{2}(1 + Kr^2/R^3)^{1/2}.$$

Demostrar que $R_{00} \neq 0$ y explicar por qué esto es coherente con las ecuaciones de campo.

→**13)** En la sección anterior habíamos obtenido la aproximación para los símbolos de Christoffel de la métrica $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{2}\epsilon\, \eta^{\nu\mu}(h_{\alpha\mu,\beta} + h_{\mu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\mu}).$$

Con esta relación y la correspondiente a derivar ambos miembros (que no es necesario justificar aquí), demostrar que

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \approx \frac{\epsilon}{2}\eta^{\alpha\sigma}(h_{\sigma\nu,\beta\mu} - h_{\beta\nu,\sigma\mu} - h_{\sigma\mu,\beta\nu} + h_{\beta\mu,\sigma\nu}),$$

y por tanto

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \approx \frac{\epsilon}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu}).$$

14) Comprobar que si $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$ con $h_{\alpha\beta} \in C^2$ se cumple en cada punto

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{R^{00} - (g^{00})^2\big(\Gamma^{\nu}_{00,\nu} - \Gamma^{\nu}_{0\nu,0}\big)}{\epsilon^2} < \infty.$$

→**15)** Demostrar a partir del Lema 2.3.6 que para cualquier campo de vectores $\vec{V}$ en el espacio-tiempo $\sqrt{-g}\,V^{\lambda}_{;\lambda} = (\sqrt{-g}\,V^{\lambda})_{,\lambda}$.

16) Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, tratar de explicar por qué el laplaciano de una función, f, en una variedad semiriemanniana se define como

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\big(\sqrt{|g|}\,g^{ij} f_{,i}\big)_{,j}$$

(*Indicación*: El laplaciano es la divergencia del gradiente, pero el gradiente no es un vector sino una uno-forma).

17) Comprobar que las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0.$$

para el lagrangiano $\mathcal{L} = \sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}$ con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, llevan a que las trayectorias $(x(t), y(t), z(t))$ son rectilíneas. (Nota: Esto prueba el principio de inercia en relatividad especial a partir de la formulación lagrangiana).

Historias en titulares:

Est hominis errare

El pasado 25 de Noviembre, A. Einstein ha publicado su Teoría General de la Relatividad. El camino ha sido tan complejo y con tantos errores, vueltas y revueltas que Einstein, anticipándose a las críticas, ha bromeado diciendo de sí mismo: "Este tipo, Einstein, se ajusta a lo que le conviene. Cada año se retracta de lo que escribió el año anterior". Hasta ahora, aparte de M. Grossmann (su colaborador) y de D. Hilbert y H.A. Lorentz, pocos parecen entender la novedosa teoría.

1915

Math rules

La nueva teoría de Einstein se basa en ciertas ecuaciones para la fuerza de la gravedad que se escriben como

$$G_{\mu\nu}=8\pi G\, T_{\mu\nu}$$

y sobre las que él ha declarado que "son similares a un edificio una de cuyas alas (el primer miembro de la ecuación) es de fino mármol, mientras que la otra es madera de baja calidad (el segundo miembro)".

1950

Divergencia de Opinión

El bien conocido físico E. Schrödinger ha explicado la naturaleza de las ecuaciones de campo diciendo que "no debieran considerarse ecuaciones de campo, sino la definición de $T_{i\kappa}$, el tensor energía-momento, de la misma forma que la ecuación de Laplace div $\vec{E}=\rho/\epsilon_0$ no dice otra cosa más que hay una carga y llamamos div $\vec{E}$ a la densidad de carga. La carga no causa que la divergencia del vector eléctrico no se anule sino que ella es la divergencia no nula".

1950

¿Qué hay que saberse?:

De nuevo lo que hay que saberse es muy poco.

• La métrica del espacio-tiempo no es arbitraria sino que debe satisfacer las ecuaciones de campo

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}=8\pi GT^{\mu\nu}$$

donde $T^{\mu\nu}$ son las componentes de un tensor que indica la densidad del cuadrimomento. (Para un fluido perfecto $T^{\mu\nu}=(\rho+p)U^\mu U^\nu+pg^{\mu\nu}$ donde ρ es la densidad y p la presión).

• Hilbert dedujo las ecuaciones de campo esencialmente a partir de la hipótesis de que el espacio-tiempo tiende a curvarse lo menos posible.

¿Para qué sirve?:

En principio, si supiéramos resolver las ecuciones de campo, dadas unas condiciones iniciales y de frontera, servirían para hallar la métrica del espacio-tiempo. Sin embargo las ecuaciones son tan complicadas que no hay demasiadas soluciones de interés (explícitas) ni un método general para hallarlas. Por otra parte, las ecuaciones de campo son invariantes por cambios de carta, así que hay que fijar algunas condiciones sobre éstas para que realmente el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que se obtiene, esté determinado. A pesar de esta visión pesimista, en el siguiente capítulo se deducirá la solución correspondiente al exterior de una masa estática esférica, y si uno es profundamente optimista puede hacer hipótesis que le permitan buscar soluciones, como veremos en el último capítulo, que representen al Universo globalmente.

4. La solución de Schwarzschild

4.1. La métrica de Schwarzschild y sus geodésicas

Veamos con sentido crítico lo hecho hasta ahora: Con la idea de revisar y perfeccionar la teoría gravitatoria de Newton, sencilla fórmula $F = GMm/r^2$, se ha introducido un poderoso formalismo matemático para llegar a unas ecuaciones tan sumamente complicadas[clp] que parecen de utilidad práctica nula. Einstein, en realidad, no dio ni siquiera una solución exacta con relevancia física de sus ecuaciones de campo cuando $T^{\alpha\beta} = 0$, sino que calculó aproximaciones que iban más allá de la teoría de Newton y que eran suficientes para hacer algunas predicciones.

En esta sección estudiaremos la solución hallada por K. Schwarzschild pocos meses después de que Einstein presentase su Teoría General de la Relatividad. Los cálculos son tediosos pero no excesivamente complicados. La idea es bien conocida: al imponer la máxima simetría (simetría esférica) a la solución de una ecuación en derivadas parciales puede transformarse en una ecuación diferencial ordinaria[uff]. Aunque siempre sea arriesgado hacer "historia ficción", es de esperar que Einstein habría hallado por sí mismo la solución estudiada en esta sección en un plazo razonable si Schwarzschild no hubiera sido tan rápido, lo cual no quita su gran mérito a este último científico, quien hizo sus cálculos en el fragor de la Primera Guerra Mundial (murió poco después de terminar su trabajo por una enfermedad contraída en el frente ruso) y además fue uno de los pioneros en proponer que el espacio físico no es euclídeo.

La importancia de la solución de Schwarzschild es enorme, entre otras cosas porque modeliza la métrica del espacio-tiempo alrededor de una masa esférica estática, siendo en este sentido el análogo relativista de $F = GMm/r^2$, y además es totalmente explícita. Hubo que esperar casi 50 años para que se encontrase otra solución explícita de significado físico comparable: la *solución de Kerr*, correspondiente a una masa esférica que gira sobre sí misma.

Al final del segundo capítulo vimos que la simetría esférica de una variedad tridimensional se traduce en una métrica de la forma

$$dl^2 = B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2.$$

[clp] El tensor de Einstein tiene 16 componentes, que por la simetría dan lugar a 10 ecuaciones en derivadas parciales no lineales que deben ser satisfechas por las componentes de la métrica. Ni siquiera es fácil escribir una sola de estas ecuaciones (recuérdese la fórmula para el tensor de Ricci), así que quien se atreva con esto es un valiente.

[uff] Esto es, si uno dice que que al usar coordenadas esféricas los ángulos dan igual y sólo importa el radio, entonces típicamente se obtiene una ecuación en la que los ángulos dan igual y sólo importa el radio.

Por consiguiente es natural representar el espacio-tiempo alrededor de una masa esférica como esta métrica más los términos correspondientes a la variable temporal

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtdr + 2g_{02}dtd\theta + 2g_{03}dtd\varphi + dl^2.$$

Si suponemos que el espacio-tiempo es estático (no varía con el tiempo) se tiene que ni B ni el resto de los $g_{\mu\nu}$ dependen de t. Además $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ porque en otro caso la falta de invariancia con respecto a la inversión del tiempo $t \mapsto -t$ indicaría algún tipo de "sentido de giro". Haremos una hipótesis física más y es que "lejos", cuando $r \to +\infty$, la métrica anterior se transforme en la de Minkowski. Esto es como decir que una masa lejana curva muy poco el espacio-tiempo plano y por ello ds^2 es asintóticamente plana.

En definitiva llegamos a que la métrica que corresponde al exterior de una masa estática esférica debe ser de la forma

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 \tag{4.1}$$

donde $A(r), B(r) \to 1$ cuando $r \to +\infty$.

Como A y B sólo dependen de r, las complicadas ecuaciones de la ecuación de Einstein se transformarán ahora, como ya mencionamos antes, en ecuaciones diferenciales ordinarias que serán a lo más de segundo orden porque éste es el máximo orden de derivación en el tensor de Einstein. Para llegar a dichas ecuaciones diferenciales debemos calcular el tensor de Ricci y como paso previo los símbolos de Christoffel. La notación en los próximos resultados será como la empleada hasta ahora: los subíndices y superíndices 0, 1, 2, 3 indicarán las variables $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$.

Lema 4.1.1 : *Para la métrica* (4.1) *se cumple*

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{A'}{2A}, \qquad \Gamma^1_{00} = \frac{A'}{2B}, \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{B'}{2B}, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{B}, \qquad \Gamma^1_{33} = -\frac{r}{B}\operatorname{sen}^2\theta,$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^2_{33} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

y el resto de los símbolos de Christoffel son nulos.

DEM.: Aplicamos el método lagrangiano con

$$\mathcal{L} = -A\,\dot{t}^2 + B\,\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\;\dot{\varphi}^2\,.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\lambda}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\nu}\Big) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu} = 0,$$

implican para $\nu = 0, 1$

$$\ddot{t} + \frac{A'}{A}\,\dot{r}\,\dot{t} = 0, \qquad \ddot{r} + \frac{A'}{2B}\dot{t}^2 - \frac{r}{B}\dot{\theta}^2 + \frac{B'}{2B}\dot{r}^2 - \frac{r}{B}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0.$$

Y para $\nu = 1, 2$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\,\dot{\theta} - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\,\dot{\varphi} + \frac{2\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0.$$

Cada línea del enunciado se obtiene, respectivamente, identificando los coeficientes de la diferentes ecuaciones geodésicas con los símbolos de Christoffel. ■

Por la particular simetría del elemento de línea (4.1), se puede probar sin hacer los cálculos que el tensor de Ricci es diagonal.

Lema 4.1.2 : *Si $R_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de Ricci para la métrica* (4.1) *entonces $R_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$.*

DEM.: Como (4.1) es invariante al cambiar t por $-t$, $R_{\mu\nu}$ también lo será (porque el tensor de Ricci sólo depende de la métrica). Así pues usando la tensorialidad bajo el cambio de coordenadas $x'^0 = -x^0$, $x'^i = x^i$, $i = 1, 2, 3$; se obtiene para $\nu \neq 0$

$$R_{0\nu} = R_{\rho\sigma}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^0}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} = R_{0\nu}(-1)\cdot 1 \;\Rightarrow\; R_{0\nu} = 0.$$

Con argumentos similares (invariancia por $\theta \mapsto \pi - \theta$ y $\phi \mapsto 2\pi - \phi$ se sigue $R_{2\nu} = 0$ para $\nu \neq 2$ y $R_{3\nu} = 0$ para $\nu \neq 3$. La anulación del resto de los términos no diagonales se deduce de la simetría del tensor de Ricci. ■

Aunque sólo faltan por hallar cuatro componentes del tensor de Ricci y ya conocemos todos los símbolos de Christoffel, los cálculos serán un poco largos y la mayoría de los libros los omiten. El formalismo de Cartan permite una reducción drástica (véase §14.6 en [**Mi-Th-Wh**] para una introducción rápida) pero implica un conocimiento en profundidad de las formas diferenciales.

Teorema 4.1.3 : *Las componentes del tensor de Ricci para la métrica* (4.1) *son*

$$(R_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} R_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{22}\,\mathrm{sen}^2\,\theta \end{pmatrix}$$

donde

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{(A')^2}{4AB} - \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'}{rB}$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{(A')^2}{4A^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rB}, \qquad R_{22} = \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1.$$

<u>DEM.</u>: Por el Lema 2.3.6

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} = (\log\sqrt{-g})_{,\mu} = \big(\frac{1}{2}\log A + \frac{1}{2}\log B + 2\log r + \log \operatorname{sen}\theta\big)_{,\mu}$$

y se deduce inmediatamente

$$\Gamma^{\rho}_{0\rho} = 0, \quad \Gamma^{\rho}_{1\rho} = \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}, \quad \Gamma^{\rho}_{2\rho} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \Gamma^{\rho}_{3\rho} = 0.$$

Recordando la fórmula para el tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho},$$

se tiene:

Para $\mu = \nu = 0$,

$$\begin{aligned} R_{00} =& \Gamma^{1}_{00,1} - 0 + \Gamma^{\rho}_{1\rho}\Gamma^{1}_{00} - \big(\Gamma^{0}_{10}\Gamma^{1}_{00} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{10}\big) \\ =& \Big(\frac{A'}{2B}\Big)' + \big(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\big)\frac{A'}{2B} - 2\frac{A'}{2A}\frac{A'}{2B}. \end{aligned}$$

Para $\mu = \nu = 1$,

$$\begin{aligned} R_{11} =& \Gamma^{1}_{11,1} - \Gamma^{\rho}_{1\rho,1} + \Gamma^{\rho}_{1\rho}\Gamma^{1}_{11} - \Big(\big(\Gamma^{0}_{01}\big)^2 + \big(\Gamma^{1}_{11}\big)^2 + \big(\Gamma^{2}_{21}\big)^2 + \big(\Gamma^{3}_{31}\big)^2\Big) \\ =& \Big(\frac{B'}{2B}\Big)' - \Big(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\Big)' + \big(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\big)\frac{B'}{2B} - \Big(\big(\frac{A'}{2A}\big)^2 + \big(\frac{B'}{2B}\big)^2 + \frac{2}{r^2}\Big) \end{aligned}$$

y después de operar se llega a la expresión que aparece en el enunciado.

Para $\mu = \nu = 2$,

$$R_{22} = \Gamma^1_{22,1} - \Gamma^\rho_{2\rho,2} + \Gamma^\rho_{1\rho}\Gamma^1_{22} - \Big(\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \big(\Gamma^3_{32}\big)^2\Big)$$

$$= \Big(\frac{-r}{B}\Big)' - \Big(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\Big)' + \big(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\big)\frac{-r}{B} - \Big(2\frac{-r}{B}\frac{1}{r} + \Big(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\Big)^2\Big).$$

Nótese que cuando escribimos el apóstrofo tras una función que depende de θ indicamos la derivación con respecto de esta variable (no respecto de r). En particular $-(\operatorname{cotag}\theta)' = 1 + \operatorname{cotag}^2\theta$ y los términos que depende de θ se simplifican.

Para $\mu = \nu = 3$,

$$R_{33} = \big(\Gamma^1_{33,1} + \Gamma^2_{33,2}\big) - 0 + \big(\Gamma^\rho_{1\rho}\Gamma^1_{33} + \Gamma^\rho_{2\rho}\Gamma^2_{33}\big) - \big(\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{31} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33}\big)$$

$$= \Big(\frac{-r}{B}\Big)' \operatorname{sen}^2\theta - (\operatorname{sen}\theta\cos\theta)' + \Big(\big(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\big)\frac{-r}{B}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\Big)$$

$$- \Big(2\frac{-r}{B}\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{1}{r} - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\Big).$$

Después de operar los sumandos que no contienen a r en la última igualdad es fácil comprobar que $R_{33} = R_{22}\operatorname{sen}^2\theta$, lo que concluye la prueba. ■

Una vez conocidas las componentes del tensor de Ricci ya estamos pertrechados para hallar una solución de las ecuaciones de campo.

Teorema 4.1.4 : *Suponiendo el tensor energía-momento idénticamente nulo, las únicas soluciones de las ecuaciones de campo de la forma* (4.1) *con* $A(r), B(r) \to 1$ *cuando* $r \to +\infty$*, son*

$$ds^2 = -(1 + Kr^{-1})dt^2 + (1 + Kr^{-1})^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

donde K *es una constante arbitraria.*

Observación: Si quisiéramos extender la solución al interior de una estrella con simetría esférica el tensor energía-momento ya no sería idénticamente nulo sino que dependería de la presión y la densidad, y éstas del radio (la relación básica entre estas magnitudes en el marco de la relatividad general se llama ecuación de Oppenheimer-Volkoff, véase [**Hu-To**] §21.3 y [**Wa**] §6.2). Las soluciones interiores son fundamentales para dar una base teórica al estudio de la evolución y muerte de las estrellas (véase [**Sc**] §10.7).

<u>DEM.</u>: Si el tensor de energía-momento es idénticamente nulo las ecuaciones de campo se reducen a

$$R_{\mu\nu} = 0$$

y por el teorema anterior esta relación establece un sistema de ecuaciones diferenciales para A y B. Eliminando A'' de R_{00} y R_{11} por medio de una combinación lineal adecuada se llega a una ecuación particularmente sencilla

$$0 = \frac{B}{A}R_{00} + R_{11} = \frac{A'}{rA} + \frac{B'}{rB} = \frac{(AB)'}{rAB},$$

lo que implica que AB es constante y de la condición $A, B \to 1$ cuando $r \to +\infty$ se deduce

$$B = A^{-1}.$$

Sustituyendo en la ecuación $R_{22} = 0$

$$0 = R_{22} = -rA' - A + 1 = -(rA)' + 1$$

y se obtiene finalmente

$$A = 1 + \frac{K}{r}, \qquad B = \left(1 + \frac{K}{r}\right)^{-1}$$

donde K es una constante arbitraria.

Es fácil comprobar que para estas funciones A y B se cumple realmente $R_{\mu\nu} = 0$. Esta comprobación es, desde el punto de vista matemático, necesaria ya que tenemos un sistema aparentemente sobredeterminado (tres ecuaciones diferenciales para hallar dos funciones), aunque la inexistencia de soluciones sería poco creíble desde el punto de vista físico. ■

Nótese que para $K = 0$ se obtiene la métrica de Minkowski (en coordenadas polares) que trivialmente satisface las ecuaciones de campo y que tiene como geodésicas las rectas. Físicamente, $K = 0$ querría decir que una masa no tiene ninguna influencia sobre las trayectorias rectas descritas por las partículas en su ausencia. Esto está en clara contradicción con nuestra experiencia: un balón lanzado a una canasta sigue una trayectoria parabólica, no recta. Aunque para $r \to +\infty$ también se obtiene la métrica de Minkowski, la interpretación es bien diferente: la influencia de una masa es pequeña si estamos muy lejos de ella (lejos de la Tierra y de otras masas el balón seguiría una trayectoria recta, sólo podríamos dar *mates* para encestar).

En coordenadas cartesianas la métrica del teorema se escribe como

$$ds^2 = -(1 + Kr^{-1})dt^2 + \ldots$$

donde los puntos suspensivos indican una pequeña perturbación de la métrica euclídea cuando $r \to \infty$. En estas condiciones habíamos visto en el capítulo anterior que para velocidades suficientemente pequeñas $g_{00} \approx -2V - 1$ con V el potencial newtoniano, que en este caso es $V = -GMr^{-1}$. Es decir,

$$g_{00} + 1 = Kr^{-1} \sim -2GMr^{-1},$$

de donde se deduce

$$K = -2GM.$$

Matemáticamente no hemos hecho nada más que cambiar el nombre de la constante. Por consiguiente si no queremos apelar para nada a la teoría de Newton se puede decir que dada una solución como la del teorema anterior se define la masa gravitatoria del cuerpo esférico que la genera como $-K/(2G)$, de hecho para simplificar esta relación en muchos textos se adoptan las llamadas "unidades geometrizadas" con las que $G = 1$. Nótese que con esta definición no hay ninguna razón matemática para que la masa sea positiva[clp] aunque experimentalmente sea así (las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas).

A la solución del teorema con K escrita como antes se la llama, en honor a su descubridor, <u>solución de Schwarszchild</u> o <u>métrica de Schwarszchild</u>, siendo de la forma

$$\boxed{ds^2 = -\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)dt^2 + \big(1 - \frac{2GM}{r}\big)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.}$$

Obsérvese que la métrica es singular para $r = 0$ y $r = 2GM$ siendo el primer valor natural desde el punto de vista físico mientras que el segundo no lo es desde la perspectiva clásica y tiene que ver con los agujeros negros. En cualquier caso supondremos implícitamente en los razonamientos subsiguientes que estamos fuera de estos valores y que de hecho $r > 2GM$. En la práctica, para los astros que nos rodean esta condición no es muy restrictiva porque la métrica de Schwarzschild en unidades no relativistas es

$$ds^2 = -\big(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\big)c^2dt^2 + \big(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\big)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

y por tanto la condición $r > 2GM$ se escribe como $r > 2GMc^{-2}$. Por ejemplo, para la Tierra sólo pedimos $r > 8'9\,mm$ que se cumple con creces en la superficie.

Es importante notar que las coordenadas t, r, θ, φ que aparecen en la métrica de Schwarzschild, llamadas coordenadas de Schwarzschild, no tienen por qué coincidir con los tiempos, radios y ángulos que mide cada observador en un experimento físico. Al igual que en la relatividad espacial las mediciones dependen de los movimientos relativos de los observadores, aquí también dependerán de la posición de éstos debido al principio de

[clp] Dentro del ámbito de la mecánica se puede "demostrar" que la masa es positiva si uno hace la hipótesis de que la Naturaleza prefiere los mínimos a los máximos de modo que no hay un principio de máxima acción. En realidad esta nota es incomprensible y es sólo una excusa para mecionar **[La-Li]** §4.

equivalencia: da lo mismo sufrir la gravedad que sufrir aceleraciones[uff]. Ya vimos en el capítulo anterior este fenómeno cuando aún no sabíamos la forma exacta de la métrica, analicemos la situación ahora en tiempo y espacio con más detalle.

Si dos sucesos son, en coordenadas de Schwarzschild, $(t_0, r_0, \theta_0, \varphi_0)$ y $(t_0+dt, r_0, \theta_0, \varphi_0)$ entonces el tiempo transcurrido para el observador que usa estas coordenadas es evidentemente dt pero el observador situado en el punto espacial $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ mide el tiempo propio $d\tau = -ds$

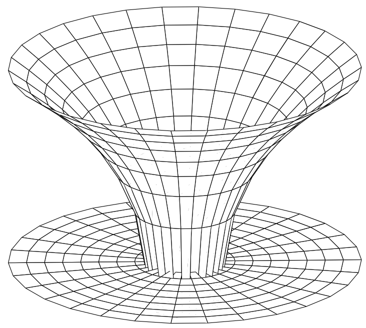
$$-d\tau^2 = -(1 - 2GMr_0^{-1})dt^2 \;\Rightarrow\; \boxed{d\tau = (1 - 2GMr_0^{-1})^{1/2}dt.}$$

De la misma forma, para un incremento puramente espacial en coordenadas de Schwarzschild, digamos de $(t_0, r_0, \theta_0, \varphi_0)$ a $(t_0, r_0 + dr, \theta_0, \varphi_0)$, un observador que en el tiempo t_0 haya colocado una regla de medir entre $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ y $(r_0 + dr, \theta_0, \varphi_0)$ medirá una longitud

$$dl^2 = (1 - 2GMr_0^{-1})^{-1}dr^2 \;\Rightarrow\; \boxed{dl = (1 - 2GMr_0^{-1})^{-1/2}dr.}$$

Desconsiderando la coordenada θ, digamos tomando $\theta = \pi/2$, podemos representar esta expansión del espacio como la curvatura de una superficie bidimensional. En ausencia de masa, $M = 0$, el espacio-tiempo es plano pero si $M > 0$ este plano se curva y las longitudes se agrandan con respecto a sus proyecciones planas.

Distancias planas < distancias curvas



Con la coordenada tiempo, según hemos visto, ocurre el fenómeno inverso contrayéndose el tiempo propio cuanto más cerca estemos de una masa. De nuevo nótese que el factor $1 - 2GMr_0^{-1}$ se escribe como $1 - 2GMr_0^{-1}c^{-2}$ en unidades no relativistas, con lo cual estas variaciones de tiempo y espacio debidas a la gravedad son extremadamente pequeñas para los astros que nos rodean.

[uff] Sabíamos por la paradoja de los gemelos en la relatividad especial que cuando hay aceleraciones aparecen variaciones absolutas en el tiempo. Como se necesita cierta aceleración (encender los motores) para mantenerse inmóvil en un campo gravitatorio sin que nos arrastre, en general, el tiempo medido por diferentes observadores inmóviles es diferente.

Para ilustrar la situación describiremos un experimento físico interesante y conceptualmente sencillo. Supongamos dos observadores(-as) inmóviles A y B, Ana y Blanca, alineadas con una gran masa central y situadas al mismo lado de ésta. Si en la posición en la que está Ana se enciende momentáneamente una fuente luminosa en el tiempo t_1^A en coordenadas de Schwarzschild y vuelve a encenderse en el tiempo t_2^A, Ana medirá que el lapso de tiempo entre ambos destellos es

$$\Delta\tau_A = (1 - 2GMr_A^{-1})^{1/2}(t_2^A - t_1^A).$$

Ambos rayos de luz viajarán por geodésicas nulas hasta Blanca llegando en los tiempos t_1^B y t_2^B. Como la única diferencia entre ambos rayos es que uno se emite más tarde que el otro y los coeficientes de la métrica no dependen de t, ambos tardarán el mismo tiempo (de Schwarzschild) en llegar hasta Blanca[uff]. Por consiguiente

$$t_1^B - t_1^A = t_2^B - t_2^A \;\Rightarrow\; t_2^A - t_1^A = t_2^B - t_1^B.$$

El lapso de tiempo medido por Blanca será

$$\Delta\tau_B = (1 - 2GMr_B^{-1})^{1/2}(t_2^B - t_1^B),$$

así que combinando estas igualdades se concluye

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \frac{(1 - 2GMr_A^{-1})^{1/2}}{(1 - 2GMr_B^{-1})^{1/2}}.$$

Esta fórmula implica que si un fenómeno oscilatorio ocurre en las cercanías de una gran masa gravitatoria, cuanto más lejos estemos menos frecuencia detectamos. De manera ingenua pero representativa podemos pensar que las masas atraen a los frentes de onda juntándolos y aumentando la frecuencia en sus cercanías.

En el caso de las radiaciones electromagnéticas, especialmente para el espectro luminoso de las estrellas, este fenómeno se llama <u>corrimiento hacia el rojo gravitatorio</u> (como veremos en el próximo capítulo, hay otro famoso corrimiento hacia el rojo debido a la expansión del Universo) y se ha detectado astronómicamente aunque no es nada fácil de cuantificar con precisión porque es muy complicado medir la masa y el radio de una gran estrella lejana. Otra posibilidad es experimentar con el retraso de las señales de radio enviadas desde la Tierra y reflejadas por un objeto cercano al Sol o a una gran masa. Algunos datos experimentales están incluidos en [**Mi-Th-Wh**] §40.4 y en [**We**] §8.7 (véanse también los comentarios de [**Wa**] §6.3).

<u>Ejemplo</u> . Supongamos que Ana y Blanca están situadas respectivamente en $r_A = 50GM/9$ y $r_B = 25GM/8$ (con $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$), y que sus cronómetros empiezan a

[uff] Esto se reduce a observar que si $(t(\lambda), x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$ satisface la ecuación de las geodésicas entonces $(t(\lambda)+\text{cte}, x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$ también la satisface porque los símbolos de Christoffel no dependen de t.

funcionar en el tiempo de Schwarzschild $t = 0$. Estudiar qué percibirá cada una acerca de la marcha del cronómetro de la otra y qué ocurriría si Blanca estuviera muy cerca de $r = 2GM$.

La luz tarda en ir de Ana a Blanca, o viceversa, cierto tiempo T_0, así que aunque ambos cronómetros se conecten en el mismo momento, cada una no *verá* funcionar al de la otra hasta T_0 segundos después de que lo haga el suyo. Por otra parte, según el análisis anterior

$$\Delta\tau_A = \frac{(1-2GMr_A^{-1})^{1/2}}{(1-2GMr_B^{-1})^{1/2}}\Delta\tau_B = \frac{4}{3}\Delta\tau_B.$$

Por tanto para Ana su reloj marca el tiempo T mientras que el de Blanca atrasa (cada segundo de Blanca tarda 4/3 de segundo en pasar, según Ana) y no comienza a funcionar hasta T_0, esto es, marca $3(T-T_0)/4$. De la misma forma, Blanca pensará que su reloj marca T y el de Ana $4(T-T_0)/3$. Si Blanca estuviera muy cerca de $r = 2GM$ entonces Ana vería que el reloj de Blanca está casi parado. (En la última sección de este capítulo analizaremos esta extraña situación con detalle).

Una vez que sabemos cuál es la geometría del espacio-tiempo podemos hallar sus geodésicas, que son el análogo de las trayectorias seguidas por partículas de prueba en la teoría de campos clásica. Por muy complicadas que sean las ecuaciones, los planetas se siguen moviendo con gran aproximación siguiendo elipses así que no debemos esperar grandes cambios con respecto a la teoría de Newton. Sin embargo, como veremos en la próxima sección, hay algunos efectos minúsculos pero detectables que avalan la teoría general de la relatividad frente a la teoría newtoniana.

Una reducción muy ventajosa es aprovechar la libertad para elegir las coordenadas girando los ejes cartesianos espaciales de manera que la parte espacial de la cuadrivelocidad inicial de una geodésica dada esté en el plano XY, esto es $\theta(\lambda_0) = \pi/2$, $\theta'(\lambda_0) = 0$.

Teorema 4.1.5 : *Las geodésicas de la métrica de Schwarzschild que para un valor inicial, λ_0, del parámetro cumplen $\theta(\lambda_0) = \pi/2$, $\theta'(\lambda_0) = 0$, están determinadas por las ecuaciones:*

$$\big(1-\frac{2GM}{r}\big)\frac{dt}{d\lambda} = E, \qquad r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = L, \qquad \theta = \frac{\pi}{2},$$

$$\big(1-\frac{2GM}{r}\big)\big(\frac{dt}{d\lambda}\big)^2 - \big(1-\frac{2GM}{r}\big)^{-1}\big(\frac{dr}{d\lambda}\big)^2 - r^2\big(\frac{d\varphi}{d\lambda}\big)^2 = \kappa$$

donde E y L son constantes arbitrarias, $\kappa = 0$ para geodésicas nulas y $\kappa = 1$ para geodésicas *temporales (con $\tau = \lambda$).*

Nota: Los nombres E y L no son casuales porque estas constantes corresponden en el caso clásico a la energía por unidad de masa y al momento angular por unidad de masa[uff]. Aunque no consideraremos en los sucesivo geodésicas espaciales, éstas corresponden a $\kappa = -1$.

DEM.: Realmente ya habíamos calculado las geodésicas en la prueba del Lema 4.1.1 por el método variacional, siendo de la forma

$$(4.2) \qquad \frac{d}{d\lambda}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}}\Big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \qquad \frac{d}{d\lambda}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\Big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}, \qquad \frac{d}{d\lambda}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}, \qquad \frac{d}{d\lambda}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\Big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$$

con

$$\mathcal{L} = -\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)\,\dot{t}^2 + \big(1 - \frac{2GM}{r}\big)^{-1}\,\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\ \dot{\varphi}^2 .$$

La tercera ecuación de (4.2), como habíamos visto, se escribe como

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\big(\frac{d\varphi}{d\lambda}\big)^2 = 0$$

que implica $\theta''(\lambda_0) = 0$ y derivando sucesivamente, en general, $\theta^{(n)}(\lambda_0) = 0$ para $n > 0$. La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias implica que las soluciones de (4.2) son analíticas (desarrollables en serie) así que $\theta \equiv$cte., concretamente $\theta = \theta(\lambda_0) = \pi/2$.

El lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende de t ni de φ (en la mecánica racional clásica se dice que son variables cíclicas o ignorables) lo que permite escribir la primera y cuarta ecuaciones de (4.2) como las leyes de conservación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \text{cte.}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \text{cte.}$$

que dan lugar a las dos primeras fórmulas del enunciado.

Ahora podríamos manipular la segunda ecuación de (4.2) para terminar de caracterizar las geodésicas, pero es más sencillo utilizar simplemente la normalización (recuérdese el

[uff] Seguro que el libro gordo usado en la asignatura de Física decía en algún sitio que $GMmr^{-1}$ es la energía potencial en el campo gravitatorio, y pasando páginas para atrás pudiera decir también que el módulo del momento angular cuando la velocidad es perpendicular al radio es $mrv{=}mr^2\omega{=}mr^2 d\phi/dt$. Identificando el tiempo propio $\lambda{=}\tau$ con el tiempo t de toda la vida y de los libros de Bachillerato, uno puede quedarse tranquilo con la notación.

Lema 2.2.4)

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = -\kappa$$

que implica directamente la última fórmula del enunciado. ∎

En el caso de las geodésicas temporales ($\kappa = 1$, $\lambda = \tau$) que corresponden al movimiento de partículas materiales, sustituyendo $dt/d\tau$ y $d\phi/d\tau$, se puede escribir la ecuación de las geodésicas como

$$(4.3) \qquad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V(r) = E^2$$

donde $V(r) = 1 - 2GMr^{-1} + L^2r^{-2} - 2GML^2r^{-3}$. Esta fórmula se puede considerar como el análogo, en relatividad general, de la fórmula clásica

Energía cinética + Energía potencial = Energía total.

Por eso a $V(r)$ se le llama a veces potencial efectivo y a (4.3) ecuación de energía.

Ejemplo . Hallar la ecuación que rige la caída libre de partículas partiendo del reposo.

Si se parte del reposo, $r'(0) = 0$ y $\varphi'(0) = 0$, por tanto $L = 0$ y la ecuación de energía se escribe como

$$(r')^2 = E^2 - 1 + 2GMr^{-1}.$$

Si llamamos r_0 a la altura inicial $r(0)$, al evaluar en $\tau = 0$ se tiene $0 = E^2 - 1 + 2GMr_0^{-1}$. Por consiguiente la ecuación buscada es

$$(r')^2 = 2GM(r^{-1} - r_0^{-1}).$$

Problemas 4.1

→**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Explicar por qué sería poco creíble desde el punto de vista físico la inexistencia de soluciones de la forma (4.1).

ii) ¿En qué sentido el tiempo de Schwarzschild es el tiempo propio para observadores estáticos en el infinito?

iii) ¿Cuál es la métrica correspondiente a la región interior limitada por una esfera hueca? (*Indicación*: Utilícese que experimentalmente se conoce que la métrica no es singular y también que, como veremos en un problema posterior, las condiciones de frontera cuando $r \to +\infty$ no son estrictamente necesarias para deducir la solución de Schwarzschild).

iv) ¿Cuál es la curvatura escalar para la métrica de Schwarzschild?

v) ¿Es posible que un fotón que parte desde $r = \infty$ llegue a $r = 1$ en un tiempo de de Schwarzschild finito? ¿Y una partícula material? (*Indicación*: Estudiar si la velocidad dr/dt está acotada).

→**2)** Probar que la métrica de Schwarzschild en unidades no relativistas es

$$ds^2 = -\big(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\big)c^2 dt^2 + \big(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\big)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

(*Indicación*: Recuérdese que, según la fórmula de Newton, GMm/r^2 tiene unidades de fuerza).

3) En muchos textos la métrica (4.1) se escribe como

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

a) Hallar los símbolos de Christoffel correspondientes.

b) Calcular R_{00} y R_{11}.

c) Resolver $R_{00} = R_{11} = 0$ bajo la hipótesis $\Phi(r), \Lambda(r) \to 0$ cuando $r \to +\infty$. (*Indicación*: Cuando se ha reducido todo a una ecuación diferencial para Λ, el cambio $y = \Lambda' - (2r)^{-1}$ simplifica bastante).

4) Comprobar que las funciones A y B halladas en esta sección ($A = 1 + Kr^{-1}$, $B = (1 + Kr^{-1})^{-1}$) realmente anulan todas las componentes diagonales del tensor de Ricci.

→**5)** Hallar la solución de Schwarzschild generalizada que se obtiene si no se impone la condición $A, B \to 1$ cuando $r \to +\infty$. Demostrar que con un cambio de unidades en el tiempo se reduce a la de Schwarzschild.

→**6)** Hallar alguna de las componentes diagonales del tensor de Ricci para la métrica (4.1) sin mirar a los cálculos de esta sección.

7) Consideremos una métrica como (4.1) pero donde A y B quizá dependan de t, esto es,

$$ds^2 = -A(t,r)dt^2 + B(t,r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

En este ejercicio vamos a probar el *Teorema de Birkhoff* que afirma que la única métrica de esta forma (salvo los cambios de coordenadas del tercer apartado) que verifica las ecuaciones de campo con $T_{\alpha\beta} = 0$, y satisface las condiciones de frontera $A, B \to 1$, cuando $r \to \infty$, es la métrica de Schwarzschild.

a) Probar que todos los símbolos de Christoffel son iguales a los hallados cuando no se supuso la dependencia en t, excepto

$$\Gamma^0_{00} = \frac{A_{,0}}{2A}, \qquad \Gamma^0_{11} = \frac{B_{,0}}{2A}, \qquad \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{B_{,0}}{2B}.$$

b) Comprobar que $R_{10} = B_{,0}/(rB)$ y deducir que B no depende de t. De ello y de la fórmula para R_{22}, obtener que $A(t,r) = a(r)\,c(t)$. (Nota: El cálculo de R_{10} es un poco largo y quizá es mejor omitirlo. Por otra parte, R_{22} no requiere cálculos adicionales).

c) Explicar por qué con un cambio de coordenadas $\widetilde{t} = \int \sqrt{c(t)}\,dt$ se puede suponer que $c \equiv 1$ y deducir el Teorema de Birkhoff.

d) Explicar por qué el Teorema de Birkhoff implica que (suponiendo simetría esférica) cuando el colapso de una estrella da lugar a un agujero negro, podemos detectar variaciones en el brillo pero no en la fuerza gravitatoria.

$\rightarrow$**8)** Hallar la ecuación de una superficie en coordenadas cilíndricas $z = f(r,\varphi)$ de manera que la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}^3$ coincida para $r > 2GM$ con la métrica de Schwarzschild restringida a $t =$cte, $\theta = \pi/2$. Esta superficie representa la curvatura del espacio alrededor de una masa.

9) Hallar el coeficiente de dz^2 al escribir la solución de Schwarzschild en coordenadas cartesianas.

10) Hallar un cambio de variable $r = f(\rho)$ que transforme la métrica de Schwarzschild en la llamada *forma isótropa*

$$-\big(1-\frac{GM}{2\rho}\big)^2\big(1+\frac{GM}{2\rho}\big)^{-2}dt^2 + \big(1+\frac{GM}{2\rho}\big)^4(d\rho^2+\rho^2 d\theta^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2),$$

comprobando con detalle que verdaderamente el cambio pasa de una a la otra.

$\rightarrow$**11)** En este ejercicio vamos a comprobar que la métrica de Schwarzschild corresponde realmente a una variedad curvada y que sirve como contraejemplo a una pregunta natural en Geometría Riemanniana.

a) Hallar R^1_{212} para la métrica de Schwarzschild.

b) Demostrar que no existe ningún cambio de coordenadas de manera que la métrica de Schwarzschild coincida con la de Minkowski.

c) Riemann probó que si el tensor de Riemann es nulo, con un cambio adecuado de coordenadas la métrica es del tipo $\pm(dx^1)^2 \pm (dx^2)^2 \pm \ldots \pm (dx^m)^2$. Demostrar que este resultado no es necesariamente cierto si se reemplaza el tensor de Riemann por el de Ricci.

→**12)** Supongamos que una partícula se aleja radialmente de una estrella de manera que si se prolongase indefinidamente su movimiento, llegaría al infinito con velocidad cero.

a) Explicar por qué se debe tener $E = 1$ en la ecuación de las geodésicas.

b) Demostrar que el tiempo de Schwarzschild que necesita para ir de r_1 a r_2 es

$$\frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{r}}{1 - 2GM/r} dr.$$

<u>Nota</u>: Aunque no se pida en este ejercicio, con un cambio de variable adecuado esta integral se puede calcular, obteniéndose:

$$-\big(\frac{2r}{3} + 4GM\big)\sqrt{\frac{r}{2GM}} + 2GM \log\big(\frac{\sqrt{r} + \sqrt{2GM}}{\sqrt{r} - \sqrt{2GM}}\big)\Big|_{r_1}^{r_2}.$$

13) Pruébese que si una regla tiene sus extremos en las coordenadas de Schwarzschild $(0, r_1, \pi/2, 0)$ y $(0, r_2, \pi/2, 0)$, con $r_1 < r_2$ entonces su "longitud real" (su longitud como geodésica espacial normalizada) es $g(r_2) - g(r_1)$ donde

$$g(r) = \sqrt{r^2 - 2GMr} + 2GM \log(\sqrt{r} + \sqrt{r - 2GM}).$$

(*Indicación*: No hace falta calcular la integral correspondiente, basta comprobar que su resultado es $g(r_2) - g(r_1)$).

→**14)** Si mido $1'75m$, me he pasado toda la vida de pie sobre la Tierra ($M = 5'98 \cdot 10^{24} kg$, $R = 6'38 \cdot 10^6 m$) y mi cabeza tiene exactamente 22 años; estudiar si mis pies son más o menos jóvenes que mi cabeza y aproximar la diferencia de edad. (Despréciese el crecimiento, la rotación de la Tierra y los efectos gravitatorios externos).

→**15)** Demostrar que si de una estrella de masa M y radio R con simetría esférica sale despedido radialmente un objeto con velocidad inicial $dr/dt = v_0$, entonces en la ecuación de las geodésicas correspondiente

$$E = (1 - 2GM/R)^{1/2}\big(1 - (1 - 2GM/R)^{-2} v_0^2\big)^{-1/2}.$$

16) Como veremos en la última sección de este capítulo, si dejamos caer una linterna hacia una masa puntual desde $r > 2GM$ mediremos en nuestra posición que $r \to 2GM^+$ cuando $t \to +\infty$. Demostrar que, sin embargo, en un tiempo finito dejaremos de ver su luz con nuestros ojos. (*Indicación*: Nótese que no podemos ver, por ejemplo el rayo de luz que envía el mando a distancia al receptor de televisión).

17) En algunos textos se llama corrimiento hacia el rojo al tanto por uno en que disminuye la frecuencia y se da la fórmula aproximada $GM(r_1^{-1} - r_2^{-1})$ para una onda que se emite en r_1 y se detecta en r_2. Deducir esta aproximación y explicar en qué condiciones es buena.

→**18)** Para una línea de universo de la métrica de Schwarzschild se definen los momentos generalizados p_θ y p_φ como $p_\theta = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta}$ y $p_\varphi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$ donde $\mathcal{L}$ es el lagrangiano correspondiente.

a) Comprobar que

$$\sqrt{(p_\theta)^2 + (p_\varphi)^2/\operatorname{sen}^2\theta} = 2r^2\sqrt{\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2}$$

.

b) Si λ es el parámetro de la línea de universo, demostrar que

$$\frac{d(p_\theta)^2}{d\lambda} = 8r^4\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\;\dot{\theta}\,\dot{\varphi}^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{d(p_\varphi)^2}{d\lambda} = 0.$$

c) Deducir que $r^2\sqrt{\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2}$ permanece constante a lo largo de cada línea de universo.

19) Los dos últimos apartados del ejercicio anterior implican que:

$$r^4\operatorname{sen}^4\theta\,\dot{\varphi}^2 = c_1, \qquad r^4\,\dot{\theta}^2 + r^4\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2 = c_2$$

a lo largo de cada línea de universo, donde c_1 y c_2 son constantes.

a) Explicar por qué en las líneas de universo de partículas materiales siempre podemos suponer $\theta(0) = \pi/2$ y $\theta'(0) = 0$ y deducir de estas hipótesis que $c_1 = c_2$.

b) Restando las ecuaciones, concluir que $\theta \equiv \pi/2$ y explicar por qué todo esto demuestra que al igual que en el caso clásico las órbitas son siempre planas.

→**20)** Demostrar que en relatividad general, al igual que en el caso clásico, es posible que un planeta (de masa despreciable) siga una órbita circular alrededor de una estrella. Demostrar además que se verifica la ley de Kepler $\omega^2 r^3 = GM$ donde $\omega = d\varphi/dt$. (*Indicación*: Escribir la ecuación geodésica correspondiente a la variable r).

21) Deducir detalladamente la ecuación de energía (4.3).

Historias en titulares:

Hora cero

Einstein no cree en la realidad física del comportamiento singular de la solución de Schwarzschild que debería provocar que en $r{=}2GM$ "un reloj marchase a velocidad nula". En un reciente trabajo en *Annals of Mathematics*, concluye que, al menos para cúmulos de materia de cierto tipo, "La singularidad de Schwarzschild no aparece porque la materia no puede concentrarse arbitrariamente, y esto se debe a que en otro caso las partículas constituyentes alcanzarían la velocidad de la luz".

1939

Colorín Colorado

El corrimiento hacia el rojo gravitatorio que predice la Teoría General de la Relatividad es muy pequeño para poder observarse en el Sol, pero se piensa que la misteriosa estrella compañera de Sirius podría confirmar parcialmente las predicciones. Sorprendentemente R.V. Pound y G.A. Rebka han corroborado el corrimiento hacia el rojo gravitatorio sin recurrir a experimentos astronómicos, mediante el poder selectivo de absorción de algunos cristales.

1960

El Sol

La Teoría General de la Relatividad reemplazó en 1916 la sencilla fórmula de Newton por la solución de Schwarzschild cuya exactitud ha sido verificada a través de algunos efectos en los alrededores del Sol. Cincuenta años después, R.H. Dicke y H.M. Goldberg afirman haber medido un achatamiento del Sol de unos $52\,km$ que podría explicar una parte de los efectos considerados relativistas. Si los resultados se confirman, la solución de Schwarzschild no sería correcta y la Teoría General de la Relatividad sufrirá un duro revés.

1966

¿Qué hay que saberse?:

Aunque los cálculos hayan sido largos, lo único que hemos hecho es deducir la métrica de Schwarzschild mencionando alguna consecuencia y escribiendo las ecuaciones de las geodésicas. Repartiendo toda la información en varios puntos, podemos mencionar para señalar con el rotulador fluorescente:

• La métrica correspondiente a una masa estática con simetría esférica es de la forma

$$ds^2 = -A(r)\,dt^2 + B(r)\,dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

con $A, B \to 1$ cuando $r \to +\infty$. Imponiendo $R_{\alpha\beta} = 0$ (las ecuaciones de campo cuando $T^{\alpha\beta} = 0$) y la aproximación newtoniana para identificar cierta constante de integración, se obtiene la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)dt^2 + \big(1 - \frac{2GM}{r}\big)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

• La dependencia en r de A y B implica que observadores en diferentes puntos perciben diferentes longitudes y tiempos incluso si están en reposo relativo.

• Las geodésicas de la métrica de Schwarzschild son curvas planas (podemos suponerlas contenidas en el plano ecuatorial) y satisfacen ciertas ecuaciones diferenciales de primer orden.

¿Para qué sirve?:

La métrica de Schwarzschild y sus geodésicas sirven para estudiar los movimientos de las partículas bajo la acción gravitatoria de cuerpos masivos con simetría esférica. En realidad la sencilla fórmula GMm/r^2 ya ha servido para lo mismo, con gran éxito, durante siglos y como veremos en la próxima sección la diferencia en el Sistema Solar es mínima, casi indetectable. Sin embargo en condiciones extremas la métrica de Schwarzschild es "la verdad" hasta donde hoy sabemos (hay que tener en cuenta que la historia de la Física nos enseña que la verdad suele tener fecha de caducidad) y aunque nosotros no podamos vivir en esas condiciones extremas podemos teorizar sobre lo que ocurre en las cercanías de una estrella de neutrones o un agujero negro.

4.2. La desviación de la luz y la rotación del perihelio

La métrica de Schwarzschild se diferenciará más de la de Minkowski cuanto mayor sea la masa (o más exactamente la relación entre la masa y el radio). Teniendo en cuenta que el objeto cercano con mayor masa es el Sol, si queremos buscar efectos que pertenezcan intrínsecamente a la relatividad general, debemos examinar las trayectorias en sus cercanías. Podemos experimentar con geodésicas nulas o con geodésicas temporales, lo que da lugar a los dos efectos discutidos en esta sección: los rayos luminosos se curvan ligeramente cerca del Sol y los planetas interiores (especialmente Mercurio) sufren una diminuta alteración (casi inapreciable) en su movimiento.

La desviación de la luz fue una predicción de Einstein, mientras que la anomalía en el movimiento de Mercurio era conocida experimentalmente mucho antes de la relatividad general. Sin embargo, en nuestra exposición alteraremos el orden cronológico porque el último efecto requiere un análisis algo más complicado.

Según el cálculo de las geodésicas que habíamos visto en la sección anterior (Teorema 4.1.5), las ecuaciones de movimiento de la luz (de un fotón) en presencia de un objeto masivo están determinadas por dos constantes L y E cumpliéndose

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - (1 - 2GMr^{-1})L^2r^{-2}, \qquad \frac{d\varphi}{d\lambda} = Lr^{-2}. \tag{4.4}$$

Para resolver (4.4) eliminamos primero el parámetro λ que no tiene relevancia física (recuérdese que para los fotones no existe el concepto de tiempo propio). Dividiendo la primera ecuación por el cuadrado de la segunda se tiene que $r = r(\varphi)$ verifica la ecuación diferencial ordinaria

$$(r')^2 = E^2L^{-2}r^4 - r^2 + 2GMr. \tag{4.5}$$

La solución con $r(0) = r_0$ se puede obtener separando variables

$$\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{dw}{\sqrt{E^2L^{-2}w^4 - w^2 + 2GMw}}$$

pero esta forma de la solución no parece muy manejable y además se puede demostrar rigurosamente que no hay posibilidad de calcular la integral explícitamente en términos de funciones elementales. Dicho sea de paso, este tipo de integral se llama *elíptica* y además de tener una gran relevancia en Variable Compleja y otras áreas aparece en varios cálculos de la Física Matemática.

Se presenta, por tanto, el problema matemático de conseguir una buena aproximación para la solución de (4.5). Aquí daremos unas explicaciones un poco más prolijas que en la mayoría de los textos dejando claro cuál es el razonamiento riguroso que se sigue y cuáles son las hipótesis aproximativas bajo las que procedemos motivadas por el tamaño y significado de las constantes. Comenzaremos por este último punto:

Deshaciendo las unidades relativistas el último término de (4.5) es $2GMrc^{-2}$ que para las masas y radios de los objetos astronómicos de nuestro alrededor es incomparablemente menor que el término anterior, r^2. Por ejemplo, en la superficie de la Tierra $2GMrc^{-2}/r^2$ vale $1'39\cdot 10^{-9}$, para la Luna $6'26\cdot 10^{-11}$ e incluso para el Sol es sólo $4'22\cdot 10^{-6}$. Teniendo en cuenta que el tamaño relativo del último término es pequeño se deduce que $r' = 0$ se verifica cuando r es aproximadamente LE^{-1}. Concretamente $\widetilde{r_0} = LE^{-1}$ es con gran precisión el mínimo valor[uff] de r, que denotaremos por r_0, y que tras una rotación de los ejes podemos suponer que se alcanza en $\varphi = 0$. En definitiva, debemos aproximar la solución de

$$
\begin{cases} (r')^2 = \widetilde{r_0}^{-2} r^4 - r^2 + \epsilon r \\ r(0) = r_0 \end{cases} \tag{4.6}
$$

donde $\epsilon = 2GM/c^2$ es pequeño (en tamaño relativo) y r_0 y $\widetilde{r_0}$ son constantes muy próximas ligadas por la relación $\widetilde{r_0}^{-2} r_0^3 - r_0 + \epsilon = 0$. Nótese que si $r(\varphi)$ es solución de (4.6) también lo es $r(-\varphi)$ y de la unicidad se sigue que $r(\varphi) = r(-\varphi)$ en un entorno de cero, de hecho esta propiedad de simetría de la solución es tan fuerte como la condición inicial $r(0) = r_0$ que podremos omitir a partir de ahora.

El cambio $u = 1/r$ permite simplicar ligeramente (4.6) y, sobre todo, transforma todas las soluciones que no pasan por el origen (no atraviesan la masa) en soluciones acotadas de la nueva ecuación. Esta ausencia de infinitos es muy conveniente para aplicar métodos aproximativos. Efectuando el susodicho cambio se tiene

$$
(u')^2 = \widetilde{r_0}^{-2} - u^2 + \epsilon u^3. \tag{4.7}
$$

Para cada ϵ se tiene un problema diferente y por tanto una solución diferente que, con el ligero abuso de notación obvio, denotaremos por $u(\varphi, \epsilon)$. Como ϵ es pequeño podemos aproximar bien $u(\varphi, \epsilon)$ por su desarrollo de Taylor de orden uno en ϵ

$$
u(\varphi, \epsilon) = A(\varphi) + \epsilon B(\varphi) + R_1
$$

donde A y B son funciones pares y R_1 es el correspondiente resto de Taylor que en general está acotado por un múltiplo de ϵ^2 (recuérdese por ejemplo la forma de Cauchy del resto).

[uff] Como r está acotado inferiormente, $r \geq 0$, es seguro que alcanza un mínimo. La posibilidad de que ese mínimo sea $r=0$ no es de interés físico aquí porque indicaría que el rayo de luz choca con la masa considerada.

Sustituyendo esta aproximación en (4.7) y suprimiendo todo lo que involucre ϵ^2 o R_1, para ser coherentes con la aproximación de orden uno, se tiene (iguálense los coeficientes de Taylor de 1 y ϵ).

$$(A')^2 = \widetilde{r_0}^{-2} - A^2 \qquad \text{y} \qquad 2A'B' = -2AB + A^3.$$

La primera ecuación se puede resolver de varias formas y su única solución positiva y par cerca de cero es

$$A(\varphi) = \widetilde{r_0}^{-1}\cos\varphi.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación se deduce

$$B' - \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}B = -\frac{\cos^3\varphi}{2\widetilde{r_0}^2\operatorname{sen}\varphi}.$$

La solución de la ecuación homogénea correspondiente es $B_H(\varphi) = C\operatorname{sen}\varphi$. Por el método de variación de las constantes se sigue que la solución general es

$$B = C\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}\widetilde{r_0}^{-2}(1+\operatorname{sen}^2\varphi)$$

e imponiendo que sea par se tiene $C = 0$. Con ello hemos obtenido que la solución aproximada de (4.7) es

$$u(\varphi) = \widetilde{r_0}^{-1}\cos\varphi + \frac{\epsilon}{2}\widetilde{r_0}^{-2}(1+\operatorname{sen}^2\varphi)$$

y por tanto la de (4.6) es

$$r(\varphi) = \frac{2\widetilde{r_0}^2}{2\widetilde{r_0}\cos\varphi + \epsilon(1+\operatorname{sen}^2\varphi)}.$$

Veamos brevemente el aspecto de esta solución. Si $\epsilon = 0$ entonces $r(\varphi) = \widetilde{r_0}(\cos\varphi)^{-1}$ no es otra cosa que la ecuación en polares de la recta vertical $x = \widetilde{r_0}$. Si $\epsilon > 0$ es pequeño tenemos una gráfica parecida a la de esta recta pero $r \to \infty$ cuando $\varphi \to \pm\alpha$ donde α verifica

$$\cos\alpha + \frac{\epsilon}{2}\widetilde{r_0}^{-1}(1+\operatorname{sen}^2\alpha) = 0,$$

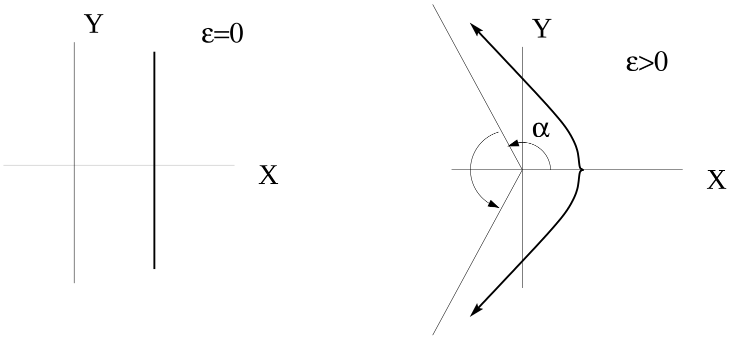
es decir existen dos asíntotas oblicuas en las direcciones de ángulos $\pm\alpha$. Como $\alpha \approx \pi/2$ ($\epsilon\widetilde{r_0}^{-1}$ es pequeño) se pueden usar las aproximaciones de orden uno $\cos\alpha = \operatorname{sen}(\pi/2-\alpha) \approx$

$\pi/2 - \alpha$ y $\operatorname{sen}^2 \alpha \approx 1$ para obtener

$$\alpha - \frac{\pi}{2} \approx \frac{\epsilon}{\widetilde{r_0}}.$$

Recordando que $\epsilon = 2GM/c^2$ y que $\widetilde{r_0} \approx r_0$ se concluye que un rayo de luz que pasa a distancia r_0 de un cuerpo masivo sufre una variación en su dirección de ángulo

$$\boxed{\beta = 2\alpha - \pi \approx \frac{4GM}{c^2 r_0}}$$



Por ejemplo, el Sol tiene un radio de $6'96 \cdot 10^8 m$ y una masa de $1'99 \cdot 10^{30} kg$ así que un rayo de luz que parta de una estrella y pase rozando la superficie del Sol debe sufrir una desviación aproximada de

$$\beta \approx \frac{4 \cdot 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 1'99 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 6'96 \cdot 10^8} = 8'45 \cdot 10^{-6} rad = 1.74''.$$

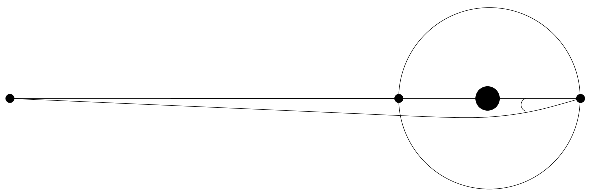
Ejemplo . Estudiar si se puede percibir la desviación gravitatoria de la luz en la Tierra.

En este caso $r_0 = 6'38 \cdot 10^6 m$ y $M = 5'98 \cdot 10^{24} kg$, por tanto

$$\beta \approx \frac{4 \cdot 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'98 \cdot 10^{24}}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 6'38 \cdot 10^6} = 2'78 \cdot 10^{-9} rad$$

que es del orden de una diezmillonésima de grado, fuera de cualquier posibilidad de medición directa (este ángulo es 200 veces menor que el subtendido a un metro de distancia por una sola longitud de onda de luz visible).

En principio $1.74''$ es un ángulo muy pequeño (casi cinco diezmilésimas de grado) pero medible con instrumentos muy precisos. Si comparamos la posición aparente de una estrella lejana cuando está frente a nosotros y cuando pasados seis meses (media órbita terrestre) está casi tapada por el Sol deberíamos detectar un cambio aparente en la posición de la estrella de ángulo β.



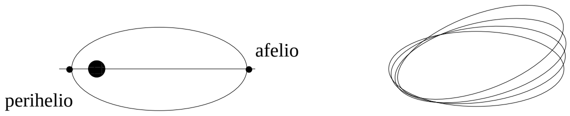
Este experimento, aparte de la extremada precisión con que debe llevarse a cabo se enfrenta con una objeción casi pueril: Cuando el Sol está delante es imposible ver nada porque de día no hay estrellas. Para solucionarlo hay que esperar a que haya un eclipse total muy perfecto (éstos sólo son observables desde posiciones muy localizadas en la Tierra y durante poco tiempo) y tener la suerte de que haya estrellas brillantes suficientemente cercanas al disco solar.

En 1919 se realizó este experimento y se "midió" una desviación de $1.98'' \pm 0.16''$ mediante métodos fotográficos lo que constituyó un gran éxito para la casi recién nacida Teoría General de la Relatividad y dio una merecida popularidad y fama a Einstein como el primero que lograba modificar la Ley de Gravitación Universal de Newton que regula el movimiento de todos los cuerpos celestes. Irónicamente, a pesar de que estos datos triunfalistas se repiten en la mayoría de los libros, parece ser que en 1919 se vio lo que se quería ver, porque el error en la precisión de los instrumentos era mayor que la cantidad a medir (véanse los comentarios de S.W. Hawking en su *Historia del Tiempo* y las dudas de los años cuarenta en [**Be**]).

El experimento se ha repetido muchas veces desde entonces con luz visible y otros tipos de radiaciones (rayos X) y en la actualidad se puede afirmar que la predicción de Einstein está confirmada con gran precisión (véanse algunos datos antiguos en [**We**] p. 193).

Ahora veremos cómo se puede usar un cuerpo material en lugar de fotones para comprobar otra predicción de la Teoría General de la Relatividad, con la ventaja de que es mucho más difícil equivocarse con los datos experimentales porque están disponibles desde el siglo XIX en relación con el movimiento anómalo de Mercurio. Por su importancia, dedicaremos algunas líneas a la historia del problema.

Recordemos en primer lugar que de acuerdo la primera ley de Kepler los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. Los puntos de la órbita más cercano y más lejano al Sol, que son vértices de la elipse, se llaman perihelio y afelio, respectivamente. En los *"Principia Mathematica"*, que se considera una de las cumbres del pensamiento humano, Newton demostró que ésta y el resto de las leyes que regulan la mecánica celeste se siguen de la sencilla y conocida fórmula $F = GMm/r^2$. Pero esta fórmula también prueba que los movimientos elípticos son sólo una aproximación ya que los planetas interactúan gravitacionalmente[uff] unos sobre otros y hay pequeñas variaciones con respecto a la elipse que se obtendría para el Sol orbitado por un solo planeta de pequeña masa.



Rotación del perihelio

En el siglo XIX se estudió con suma precisión la órbita de Mercurio y se observó que no era una elipse estática sino que el perihelio iba rotando de revolución en revolución cierto ángulo que con la precisión actual es de $574''$ por cada siglo. Sorprendentemente una minúscula parte de esta rotación, concretamente $43''$ por siglo (al principio se pensó que algo menos) no era debida a la influencia de otros planetas. A pesar de ser una cantidad casi inapreciable (habría que esperar casi 10 000 años para detectar una variación de un grado) permaneció como un problema menor pero insidioso durante muchos años. Se sugirió que quizá existiera un nuevo planeta o gran asteroide, llamado provisionalmente Vulcano, entre el Sol y Mercurio. También se propuso (siguiendo antecedentes del propio Newton, véase [**Hu-To**]) que quizá la fórmula $F = GMm/r^2$ era sólo una primera aproximación. Esta segunda opción resultó ser más acertada porque, como veremos a continuación, la Teoría General de la Relatividad permite deducir los inexplicables $43''$ por siglo de rotación del perihelio. Durante algún tiempo, esta minúscula cantidad fue el único débil apoyo experimental de la teoría de Einstein.

Como apunte histórico final, diremos que en los años 60 se reabrió el problema ya que R. Dicke y otros astrofísicos tras algunos experimentos hicieron temblar la Teoría General de la Relatividad al concluir que una parte, pequeña pero sustancial, de los $43''$ no era relativista sino que se debía a que el Sol no era exactamente esférico (véase Ex.[18.7] en [**Hu-To**]). Después de algunas controversias y más experimentos que se han prolongado hasta la actualidad, Einstein ha vuelto a tener razón.

Para plantear el problema matemático escribimos las ecuaciones de las geodésicas, que en este caso son según el Teorema 4.1.5 (véase también la ecuación de energía tras la

---

[uff] Esto es, aunque la fuerza del Sol sobre la Tierra $F{=}GMm/r^2$ haga que ésta siga una órbita elíptica (en realidad casi circular), hay que considerar también la fuerza de Venus sobre la Tierra $F'{=}Gm'm/r^2$ y la debida al resto de los planetas.

demostración)

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - (1 - 2GMr^{-1})(1 + L^2r^{-2}), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = Lr^{-2}.$$

Ahora seguiremos los mismos pasos preparatorios que en el caso de las geodésicas nulas.

Al dividir la primera ecuación por el cuadrado de la segunda se tiene la siguiente ecuación para $r = r(\varphi)$

$$(r')^2 = \widetilde{E}r^4 + 2GML^{-2}r^3 - r^2 + 2GMr$$

donde $\widetilde{E} = (E^2 - 1)L^{-2}$. Deshaciendo las unidades relativistas el coeficiente del último término, $2GM$, es $2GMc^{-2}$ y dicho término puede considerarse como una pequeña perturbación en comparación con el resto, siempre en tamaño relativo.

Escribiendo, como antes, $\epsilon = 2GMc^{-2}$ y haciendo el cambio $u = 1/r$ la ecuación adquiere un aspecto ligeramente más sencillo (se baja un grado)

$$(u')^2 = \widetilde{E} + 2GML^{-2}u - u^2 + \epsilon u^3 \tag{4.8}$$

Obsérvese que, a diferencia de lo hecho con las geodésicas nulas, no estamos interesados en una buena aproximación asintótica de la solución para cierta condición inicial. Lo único que queremos hallar es el ángulo entre dos perihelios consecutivos. Seguiremos [**Fo-Ni**] con un argumento debido a C. Møller que es bastante directo y general no necesitando la hipótesis de que la órbita sea casi circular (como en [**Sc**]) lo cual no sería aplicable a Mercurio.

En el perihelio y en el afelio u alcanza su máximo y su mínimo, digamos u_p y u_a, por tanto la derivada se debe anular y estos dos valores son raíces del polinomio del segundo miembro de (4.8). Como es cúbico debe haber una tercera raíz dada por $\epsilon^{-1} - u_a - u_p$ ya que ϵ^{-1} es la suma de las tres raíces**uff**.

Una vez "halladas" las raíces podemos factorizar el segundo miembro de (4.8) como

$$\begin{aligned}(u')^2 =& \epsilon(u - u_a)(u - u_p)(u - \epsilon^{-1} + u_a + u_p)\\ =& (u - u_a)(u_p - u)(1 - \epsilon(u + u_a + u_p)).\end{aligned}$$

uff Basta aplicar $\epsilon(x-\theta_1)(x-\theta_2)(x-\theta_3)=\epsilon x^3-\epsilon(\theta_1+\theta_2+\theta_3)x^2+\ldots$, y si uno quiere quedar bien, decir que no es más que la fórmula de Vieta.

En suma, se tiene que (4.8) es equivalente a

$$\frac{u'}{\pm\sqrt{P(u)}} = 1 \qquad \text{donde} \qquad P(u) = (u - u_a)(u_p - u)(1 - \epsilon(u + u_a + u_p))$$

y el signo será positivo si u es creciente ($u' > 0$) y negativo en caso contrario.

Supongamos que la órbita se recorre en sentido positivo. Partiendo del afelio, al pasar al perihelio siguiente u crece mientras que cuando se pasa del perihelio anterior al afelio presente u decrece. Con esta idea en mente, integrando la ecuación anterior se obtienen las siguientes fórmulas para la variación del ángulo:

$$\varphi_{\text{per.sig.}} - \varphi_{\text{afe.}} = \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}, \qquad \varphi_{\text{afe.}} - \varphi_{\text{per.ant.}} = \int_{u_p}^{u_a} \frac{du}{-\sqrt{P(u)}}.$$

Sumando ambas fórmulas tenemos que la variación del ángulo entre dos perihelios consecutivos es

$$\Delta = 2\int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}.$$

El problema está matemáticamente resuelto pero no a efectos prácticos ya que una vez obtenidos experimentalmente u_a y u_p no es fácil evaluar la integral anterior[clp] porque, como ya indicamos, al ser P de tercer grado no hay solución con funciones elementales. La idea es que cuando $\epsilon \to 0$, P se hace de grado dos y la integral se puede evaluar, lo que sugiere aproximar por Taylor en ϵ usando la aproximación de orden uno $(1 - C\epsilon)^{-1/2} \approx 1 + C\epsilon/2$ cuando $C\epsilon$ es pequeño. Concretamente, aplicando esta aproximación una vez que se ha sacado el factor $1/\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}$, se obtiene

$$\Delta \approx \int_{u_a}^{u_p} \frac{2 + \epsilon(u_a + u_p + u)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du.$$

Es seguro que la integral, digamos I, se puede calcular porque sólo involucra una raíz de un polinomio de segundo grado y, de hecho, el cálculo no es tan tedioso como parece. Nótese

[clp] Bueno, esto es mentira en sentido estricto, basta preguntársela a nuestro programa matemático preferido (los románticos retrógrados pueden usar tablas de funciones elípticas). Lo que se quiere indicar es que no disponemos de una fórmula general sencilla que nos dé una idea del resultado y que tampoco podemos aproximarlo fácilmente con nuestras propias manos (quizá aplicadas sobre una calculadora de bolsillo), sin necesidad de ir al laboratorio de numérico o a la biblioteca.

que el "cambio al punto medio" $u = v + (u_a + u_p)/2$ reduce el denominador a una resta de cuadrados

$$I = \int_{-l}^{l} \frac{2 + 3\epsilon(u_a + u_p)/2 + \epsilon v}{\sqrt{l^2 - v^2}} dv = \int_{-l}^{l} \frac{2 + 3\epsilon(u_a + u_p)/2}{\sqrt{l^2 - v^2}} dv$$

donde $l = (u_p - u_a)/2$. El término ϵv ha desaparecido en la segunda igualdad porque da lugar a una integral inmediata trivialmente nula. Finalmente, sacando del radical un factor l, se obtiene directamente un arco seno (o si uno lo prefiere puede hacer el cambio $v = l \operatorname{sen} w$), exactamente

$$I = \big(2 + \frac{3}{2}\epsilon(u_a + u_p)\big) \operatorname{arc\,sen} \frac{v}{l}\Big|_{-l}^{l} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}\epsilon(u_a + u_p).$$

El término 2π implica simplemente que hemos dado una vuelta completa y algo más. Recordando que $\epsilon = 2GMc^{-2}$ y designando las distancias al afelio y al perihelio como $r_a = 1/u_a$ y $r_p = 1/u_p$, se concluye

$$\boxed{\Delta \approx 3\pi \frac{GM}{c^2}\Big(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_p}\Big).}$$

Sustituyendo la masa del Sol $M = 1'99 \cdot 10^{30} kg$ y las distancias del Sol al afelio y al perihelio de Mercurio $r_a = 7'01 \cdot 10^{10} m$ y $r_p = 4'57 \cdot 10^{10} m$, se obtiene que en cada revolución hay una variación del ángulo de

$$\Delta \approx 5'02 \cdot 10^{-7} rad.$$

Teniendo en cuenta que Mercurio tarda $0'24$ años en dar una vuelta alrededor del Sol, cada siglo habrá dado $416'67$ vueltas y la variación del ángulo se multiplicará por este número, siendo

$$\text{Variación secular} \approx 2'09 \cdot 10^{-4} rad = 43.18''$$

lo que coincide con gran precisión con la cantidad observada.

Ejemplo . Sabiendo que para la Tierra $r_a = 1'53 \cdot 10^{11} m$ y $r_p = 1'47 \cdot 10^{11} m$, calcular cuánto ha rotado el perihelio desde hace 2 001 años.

Como la Tierra da una vuelta alrededor del Sol exactamente una vez al año, basta multiplicar la aproximación de Δ por 2 001.

$$2\,001 \cdot 3\pi \frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 1'99 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2}\Big(\frac{1}{1'53 \cdot 10^{11}} + \frac{1}{1'47 \cdot 10^{11}}\Big) = 3'71 \cdot 10^{-4} rad \approx 1'\,16''.$$

Posiblemente los datos astronómicos que nos puedan llegar de civilizaciones antiguas, no son tan precisos como para corroborar este resultado (aunque siempre haya una oportunidad para los extraterrestres de la Atlántida o de Nazca).

Problemas 4.2

→**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Por qué es obvio geométricamente que $r(\varphi) = \widetilde{r_0}(\cos\varphi)^{-1}$ es una recta?

ii) ¿Cómo una gran masa puede actuar como lente? ¿Cómo se pueden producir aparentes multiplicidades de imágenes? (Nota: Estos fenómenos han sido observados astronómicamente).

iii) Con la notación de esta sección ϵ para el Sol es aproximadamente 2950. ¿Por qué este valor no invalida las estimaciones realizadas si claramente no es "pequeño"?

iv) Alguna vez se ha supuesto la existencia de masas "antigravitatorias", esto es, masas negativas. ¿Cómo afectaría esto a la desviación de la luz?

v) Si un planeta gira en sentido negativo, ¿la rotación del perihelio se produce siempre en el sentido de giro?

vi) Cuando Einstein dedujo la rotación del perihelio de su nueva teoría, pensaba (incorrectamente) que las ecuaciones de campo eran $R_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}$, ¿por qué esto no afectó al resultado?

→**2)** Supongamos que en los n vértices de un polígono regular están situados planetas del tamaño y masa de la Tierra ($R = 6'38 \cdot 10^6 m$, $M = 5'98 \cdot 10^{24} kg$). Estimar n si queremos que la luz recorra aproximadamente la frontera del polígono.

3) Explicar por qué r_0 y $\widetilde{r_0}$ están ligados por la relación $\widetilde{r_0}^{-2} r_0^3 - r_0 + \epsilon = 0$. Sabiendo que para el Sol $\epsilon = 2949'62\, m$ y $r_0 = 6'96 \cdot 10^8 m$, hallar la diferencia $|r_0 - \widetilde{r_0}|$.

4) A partir de la relación del problema anterior, para cada ϵ fijado, $\widetilde{r_0}$ se puede considerar una función de r_0. Demostrar que

$$\lim_{r_0 \to +\infty} (\widetilde{r_0} - r_0) = \frac{\epsilon}{2}.$$

5) Hallar detalladamente la solución general de

$$B' - \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} B = -\frac{\cos^3\varphi}{2\widetilde{r_0}^2 \operatorname{sen}\varphi}.$$

por el método de variación de las constantes.

→**6)** Para $\epsilon = 2949'62\,m$ y $\widetilde{r_0} = 6'96 \cdot 10^8 m$, demostrar que la solución exacta de la ecuación $\cos\alpha + (1+\operatorname{sen}^2\alpha)\epsilon/(2\widetilde{r_0}) = 0$ es $\pi/2 + \lim x_n$ donde

$$x_{n+1} = x_n - \operatorname{sen} x_n + (1+\cos^2 x_n)\epsilon/(2\widetilde{r_0}) \qquad \text{con } x_0 = 0.$$

Comprobar que $\pi/2 + x_1$ da la aproximación $\pi/2 + \epsilon/\widetilde{r_0}$ y que $\pi/2 + x_2$ no introduce una mejora apreciable.

7) En los siguientes apartados, en los que usaremos la notación de la primera parte de esta sección, veremos una forma ligeramente distinta de cuantificar la desviación de la luz.

a) Demostrar que las geodésicas nulas satisfacen

$$u'' + u = 3\epsilon u^2/2.$$

b) Hallar las funciones pares que resuelven la ecuación anterior cuando $\epsilon = 0$.

c) Buscar una aproximación de orden uno en ϵ, $u = A(\varphi) + \epsilon\, B(\varphi)$, a la solución con A y B funciones pares, obteniendo

$$A + \epsilon B = (\lambda_1 + \mu_1\epsilon)\cos\varphi + \frac{\epsilon}{2}\lambda_1^2(1+\operatorname{sen}^2\varphi)$$

con λ_1 y μ_1 constantes.

d) De las condiciones $A(0) = \widetilde{r_0}^{-1}$ y $A(0)+\epsilon B(0) = r_0^{-1}$ deducir, utilizando la relación $\widetilde{r_0}^{-2} r_0^3 - r_0 + \epsilon = 0$ y que ϵ/r_0 es pequeño, que $\lambda_1 = \widetilde{r_0}^{-1}$ y $\mu_1 \approx 0$.

8) En el tercer capítulo vimos que cualquier teoría de gravitación debe corresponder, al menos a grandes distancias, a una métrica del tipo $ds^2 \approx -(1-2GMr^{-1})dt^2 + \dots$ Suponiendo que los puntos suspensivos representan la métrica usual de $\mathbb{R}^3$ en esféricas, se llega a

$$-(1-2GMr^{-1})dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

Demostrar que las geodésicas nulas con $\theta \equiv \pi/2$ verifican

$$\big(1-\frac{2GM}{r}\big)\frac{dt}{d\lambda} = E, \qquad r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = L, \qquad \big(\frac{dr}{d\lambda}\big)^2 + r^2\big(\frac{d\varphi}{d\lambda}\big)^2 = \big(1-\frac{2GM}{r}\big)\big(\frac{dt}{d\lambda}\big)^2.$$

donde E y L son constantes arbitrarias.

→**9)** En este ejercicio vamos a calcular la desviación de los rayos luminosos cerca de una masa con GMr_0^{-1} pequeño, si la métrica fuera la del ejercicio anterior.

a) Demostrar que $r = r(\varphi)$ satisface

$$(r')^2 + r^2 = \widetilde{r_0}^{-2} r^4 (1-2GMr^{-1})^{-1} \qquad \text{con } \widetilde{r_0} = LE^{-1}.$$

b) Sea $u = 1/r$. Comprobar que la ecuación anterior se escribe aproximadamente como

$$(u')^2 + u^2 = \widetilde{r_0}^{-2}(1 + 2GMu).$$

c) Probar que la única solución par de esta ecuación es

$$u = \lambda \cos\varphi + GM\widetilde{r_0}^{-2} \qquad \text{con } \lambda = \widetilde{r_0}^{-1}\sqrt{1 + G^2M^2\widetilde{r_0}^{-2}}.$$

d) Deducir que la desviación de los rayos luminosos es (en unidades no relativistas) aproximadamente $2GMc^{-2}\widetilde{r_0}^{-1}$. (Nota: Por métodos más elementales, éste fue el valor erróneo inicialmente predicho por Einstein).

→**10)** Se dice que una lente tiene d dioptrías si los rayos paralelos que llegan a ella, convergen en un punto (llamado foco) $1/d$ metros después de haberla atravesado. Hallar el número de dioptrías que debe tener un cristal de gafas de $2\,cm$ de radio (circulares, tipo John Lennon) situado en el borde del Sol, para que tenga el efecto de desviación de la luz deducido en esta sección. (Nota: Alguna vez se sugirió que la corona solar actuaba como estas gafas, lo que invalidaría la relatividad general, pero su efecto es pequeño [**Li-Pr-Pr-Te**] p. 569).

11) Demostrar la afirmación hecha acerca de que en un movimiento elíptico perfecto con el Sol en un foco, el afelio y el perihelio son vértices de la elipse, de hecho los extremos del eje mayor. (*Indicación*: Nótese que lo único que hay que probar es que en cualquier elipse en $\mathbb{R}^2$ centrada y orientada de la forma habitual, los puntos más cercanos y lejanos a los focos son los cortes con el eje X).

12) Probar que la ecuación (4.8) para $\epsilon = 0$ y $-G^2M^2L^{-4} < \widetilde{E} < 0$ admite una solución de la forma $u = A(1 + B\cos\varphi)$ con A, B constantes en función de $\widetilde{E}$, G, L y M. Demostrar que, suponiendo que el valor inicial $u(0) = u_0$ hace el segundo miembro positivo, todas las soluciones son de esta forma salvo reemplazar φ por $\varphi - \varphi_0$.

13) Demostrar que para $A, 1 - B^2 > 0$ la fórmula $1/r = A(1 + B\cos\varphi)$ es la ecuación en coordenadas polares de una elipse centrada en uno de sus focos, con semieje mayor $A^{-1}(1-B^2)^{-1}$ y semidistancia focal $A^{-1}|B|(1-B^2)^{-1}$. (Nota: Este problema y el anterior muestran que las órbitas de Newton se deducen de las de Einstein con $\epsilon = 0$. El caso $1 - B^2 \le 0$ corresponde a órbitas parabólicas e hiperbólicas).

→**14)** Demostrar que si $B^2 - 4AC > 0$ y $A < 0$, la ecuación $\epsilon x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ tiene tres raíces reales $r_1(\epsilon) < r_2(\epsilon) < r_3(\epsilon)$ cuando $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño y que $r_1(\epsilon) \to r_1(0)$, $r_2(\epsilon) \to r_2(0)$ y $r_3(0) \to +\infty$ cuando $\epsilon \to 0^+$. Explicar por qué esto implica que pequeñas perturbaciones relativistas no alteran sustancialmente el tamaño del afelio y del perihelio newtonianos que corresponden a $\epsilon = 0$ en los razonamientos de esta sección. (*Indicación*: Intentar acotar las zonas donde están las raíces usando el Teorema de Bolzano).

$\rightarrow$**15)** Consultar los datos de las órbitas de cada uno de los nueve planetas del Sistema Solar y calcular en cada caso el número de años que tienen que pasar para que el perihelio haya dado una vuelta completa.

16) Según la tercera ley de Kepler, en forma cuantitativa, si a es el semieje mayor de la elipse que describe un planeta al girar alrededor del Sol y T es el tiempo que tarda en completar una revolución, se cumple $a^3/T^2 = GM/(4\pi^2)$ donde M es la masa del Sol. Probar que nuestra aproximación de la rotación del perihelio es equivalente a la dada por Einstein en 1915 (en [**Ei2**] el resultado aparece con una errata)

$$\Delta \approx \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-e^2)}$$

donde e es la excentricidad (la distancia focal dividida por a).

$\rightarrow$**17)** En algunos textos aparece la aproximación $\Delta \approx 6\pi GMc^{-2}r_m^{-1}$ donde r_m es el radio medio $r_m = (r_a + r_p)/2$, la cual no es muy buena para órbitas de gran excentricidad. Demostrar que esta cantidad es siempre menor o igual que la obtenida en esta sección. Estudiar cuándo se da la igualdad y hallar la diferencia entre ambas para la órbita de Mercurio.

18) Consideremos el caso newtoniano que formalmente corresponde a $\epsilon = 0$. Demostrar que si $\widetilde{E}$ y L permanecen fijos, el afelio de una órbita elíptica crece indefinidamente cuando $M \to +\infty$ y el afelio tiende a cero. Tratar de dar un significado físico a este hecho.

$\rightarrow$**19)** Si $\Delta(\epsilon)$ es el verdadero valor de la rotación del perihelio y $\widetilde{\Delta}(\epsilon)$ es la aproximación que hemos dado aquí, demostrar que existe una constante, K, tal que para ϵ/r_p suficientemente pequeño se cumple $|\Delta(\epsilon) - \widetilde{\Delta}(\epsilon)| < K\epsilon^2/r_p^2$. (*Indicación*: Utilizar la fórmula de Taylor con término de error).

20) Acotar superiormente el valor de K en el problema anterior para la órbita de Mercurio y concluir que el error cometido es despreciable.

Historias en titulares:

Planeta X

En 1845 Le Verrier midió una rotación del perihelio de Mercurio de unos $35''$ por siglo, mientras que mediciones más recientes han probado que el ángulo preciso es de $43''$ por siglo. Este fenómeno está todavía sin explicar y en una de las entradas de la última edición de la *Encyclopaedia Britannica*, S. Newcomb ha escrito: "O bien un cuerpo desconocido actúa sobre Mercurio o bien la teoría de la gravitación necesita una modificación".

1902

Light or Heavy

A. Einstein ha retomado su predicción de 1907 de que los rayos luminosos se curvan $0.83''$ en las cercanías del Sol y pide que los astrónomos se ocupen del tema incluso si sus consideraciones pueden parecer poco fundamentadas. Curiosamente hace más de cien años, el astrónomo J.G. von Soldner llegó a la misma predicción (en un trabajo poco conocido) suponiendo la luz compuesta de pequeñas partículas materiales.

1911

La Verdad

Durante el último eclipse total, se ha medido en dos pequeñas islas una desviación de los rayos luminosos de $1.98''$ y $1.61''$, con lo cual la compleja Teoría General de la Relatividad de A. Einstein recibe un espaldarazo experimental. A la pregunta de una joven estudiante acerca de qué hubiera hecho ante un resultado negativo, Einstein ha dado una respuesta entre jocosa, presumida y semiblasfema: "Entonces lo habría sentido por el buen Dios porque la teoría es correcta".

1919

¿Qué hay que saberse?:

Esencialmente lo que hay que saberse es que:

• Las ecuaciones diferenciales que corresponden a la geodésica nula de un rayo de luz que pasa rozando al Sol y a la geodésica temporal de un planeta, digamos Mercurio, que orbita en los alrededores del Sol, son demasiado complicadas como para resolverlas explícitamente. Pero algunas aproximaciones ingeniosas y precisas son suficientes para concluir que el rayo de luz se *dobla* 1.74 segundos de arco y que la órbita de Mercurio se va torciendo 43 segundos de arco cada siglo.

No es necesario memorizar la manera en la que se hacen las aproximaciones, pero es muy aconsejable leer con detalle el razonamiento completo y, si es posible, disfrutar con él.

¿Para qué sirve?:

Quizá los 1.74" o los 43" no les importen a nadie como cantidades concretas salvo porque apoyan la Teoría General de la Relatividad, pero la forma en que se obtienen es de cierto interés por sí misma. De nuevo podemos soñar despiertos:

Año 2006, has pasado de una empresa de videojuegos a otra de alta tecnología en la que quieres ganarte un ascenso. El último microprocesador que se está diseñando multiplica las horas extra obligadas, porque hay que sacarlo en breve al mercado y alguien ha apuntado que se podría calentar demasiado después de un largo periodo de funcionamiento continuado y acabar dañándose. No hay tiempo para hacer simulaciones prácticas y la sección de Cálculo Numérico no da ninguna respuesta segura porque la curva de temperatura en función del tiempo viene dada por cierta ecuación diferencial y los Runge-Kutta que conocen sirven para intervalos finitos y no cuando $t\to\infty$.

Ya empiezas a cansarte de estar hasta las tantas trabajando por el maldito microprocesador. Cuando llegas a casa te viene una idea a la mente, buscas unos antiguos apuntes, pasas páginas y después de unas horas... ¡Ajá!, la función $1/x$ pasa infinito a cero así que ya está resuelto lo del intervalo infinito, y la nueva ecuación se resuelve en términos de integrales elípticas muy feas. Como esto es pequeño, lo llamas ϵ, como las integrales y la ecuación dejan de ser feas para ϵ=0, hallas la solución en ese caso y la perturbas con algo lineal en ϵ consiguiendo así una aproximación con error tan pequeñito como ϵ^2. Para presumir hallas un par de aproximaciones de orden superior y lo dibujas todo en una gráfica, al lado de la cual las de la sección de numérico parecen hechas en un autobús circulando por una carretera con baches y sin asfaltar.

Se queme o no se queme el microprocesador, no más horas extra. Ahora a dormir.

4.3. Agujeros negros

Olvidémosnos por un momento de las novelas de ciencia ficción e incluso de lo que sabemos hasta ahora de relatividad general para dar una primera aproximación a lo que es un agujero negro.

Si desde la superficie de la Tierra lanzamos verticalmente y hacia arriba un objeto con velocidad inicial v_0 entonces de la fórmula de Newton $F = ma$ se sigue que la ecuación de movimiento $r = r(t)$ es la solución de

$$r'' = -\frac{GM}{r^2} \qquad \text{con } r(0) = R, \quad r'(0) = v_0$$

donde M y R son la masa y el radio de la Tierra. Multiplicando por r', integrando y sustituyendo las condiciones iniciales se tiene

$$\frac{1}{2}(r')^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R},$$

por tanto

$$v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}} \;\Rightarrow\; -\frac{GM}{r} < \text{cte. negativa} \;\Rightarrow\; r < \text{cte. positiva.}$$

Así que si $v_0 < v_e = \sqrt{2GM/R}$ el objeto no sobrepasará cierta altura máxima y volverá a caer (como para la Tierra $v_e \approx 11\, km/s$ siempre que las velocidades sean normales, “todo lo que sube, baja”). Si $v_0 \geq v_e$ se puede comprobar que el objeto puede ir arbitrariamente lejos, escapando del campo gravitatorio, por eso a v_e se le llama velocidad de escape. Por la relatividad especial sabemos que c es la velocidad máxima posible, así que si para cierto astro $\sqrt{2GM/R} > c$, nada, ni siquiera la luz, podría escapar del campo gravitatorio y tendríamos que dicho astro atrae a los objetos no permitiendo que se escapen (es un agujero) y además no emite ninguna luz ni radiación (es negro). Sorprendentemente, ya en 1798, con el razonamiento anterior, P.S. Laplace teorizó sobre estos objetos en los que la luz no podría escapar (el texto original se incluye en [**Ha-El**]). Como ya hemos mencionado en la sección anterior, $2GMR^{-1}c^{-2}$ es mucho menor que 1 para todos los objetos astronómicos cercanos, por ejemplo para el Sol es $4'22 \cdot 10^{-6}$ o para Júpiter es $1'97 \cdot 10^{-8}$ lo que indica que están muy lejos de ser agujeros negros dentro de esta idea intuitiva. La relación entre la masa y el radio debería ser tan fantásticamente grande que se piensa que sólo se podría dar en ciertos colapsos estelares y centros supermasivos de galaxias.

Volvamos ahora a la relatividad general y recordemos que la sencilla fórmula de gravitación de Newton corresponde a la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -(1 - 2GMr^{-1})dt^2 + (1 - 2GMr^{-1})^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2.$$

Lo que ocurre para $2GMr^{-1} = 1$ (esto es, para $\sqrt{2GM/r} = c$ en unidades no relativistas) es realmente malo porque la métrica degenera contrayéndose el tiempo indefinidamente y expandiéndose del mismo modo el espacio. Esto recuerda al manido recurso de las novelas de ciencia ficción: cuando la nave del apuesto protagonista está suficientemente cerca ($r = 2GMc^{-2}$) de un agujero negro ($2GMR^{-1}c^{-2} > 1$) se produce una distorsión del espacio-tiempo que puede tener efectos distintos según las necesidades del guión. Como veremos, la realidad es bastante más prosaica pero aun así muy sorprendente.

Antes de seguir introduzcamos algo de notación: A la longitud $r = 2GM$ (que en unidades no relativistas es $r = 2GMc^{-2}$) se la llama radio de Schwarzschild y con este lenguaje un agujero negro es una masa esférica, estática cuyo radio es menor que el radio de Schwarzschild. Realmente ésta es una definición restrictiva y en la literatura especializada se consideran agujeros negros menos simétricos, véase §11.3 en [**Sc**] y Box 32.3, 33.1 en [**Mi-Th-Wh**]). Por otra parte, al menos en el caso aquí considerado, cálculos astrofísicos sugieren que las presiones involucradas son tan grandes que no hay razón conocida para pensar que un agujero negro tenga ni siquiera un verdadero radio bajo el radio de Schwarzschild, sino que más bien podemos imaginar que está concentrado en el punto central. Matemáticamente, por tanto, podemos redefinir el concepto sin introducir nada nuevo: un agujero negro es la solución de Schwarzschild sin tener que preocuparnos por el problema físico de que la partícula que estemos estudiando termine su trayectoria porque choque contra la superficie[clp]. Aunque no tengamos una bola de masa, hablaremos del interior y del exterior de un agujero negro para referirnos a los puntos con $r < 2GM$ y $r > 2GM$, respectivamente. A la esfera determinada por la singularidad de Schwarzschild $r = 2GM$ se le suele llamar horizonte.

El primer resultado que enunciaremos acaba con muchos relatos de ciencia ficción en los que una parte de la tripulación es engullida por un agujero negro y después de muchas vicisitudes vuelve a encontrarse con sus antiguos compañeros. Veremos que para un observador estático situado fuera de un agujero negro, ninguna partícula llega nunca a alcanzar el horizonte. Incluso teniendo en cuenta sólo la idea intuitiva que hemos visto antes, hay una buena razón para esto: Si los objetos pudieran caer dentro de un agujero

[clp] En realidad toda esta sección es una ampliación del estudio de la solución de Schwarzschild bajo un epígrafe sugestivo para que uno pueda presumir en casa y con los amigos. Cualquier masa se podría convertir en un agujero negro si lográsemos reducir su radio arbitrariamente. Con la notación habitualmente empleada, nosotros estudiaremos aquí los *agujeros negros de Schwarzschild* que corresponden a una masa estática. Otros tipos tratados ampliamente en la bibliografía son los *agujeros negros de Kerr* y los *agujeros negros de Reissner-Nordstrøm*, que corresponden respectivamente a una masa que gira y a una masa con carga eléctrica.

negro (según un observador exterior), como la mecánica es invariante por inversiones de tiempo (al ver una cinta de vídeo marcha atrás no hay nada mecánicamente imposible), también podría salir.

Para partículas materiales sólo consideraremos la situación simplificada y más significativa de caída libre en la dirección radial partiendo del reposo. Es decir, vamos a considerar la línea de universo de una partícula material (geodésica temporal) de la métrica de Schwarzschild[uff],

$$\gamma_1(\tau) = \big(t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \varphi(\tau)\big) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \gamma_1(0) = (0, r_0, \pi/2, 0), \; r_0 > 2GM \\ r'(0) = \theta'(0) = \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

Recuérdese del capítulo anterior que al parametrizar esta línea de universo por el tiempo propio, por definición se tiene que es futura y por tanto $t'(0) > 0$.

Proposición 4.3.1 : *Si para cierta sucesión de valores de τ la geodésica γ_1 cumple $r \to 2GM^+$ entonces $t \to +\infty$.*

Nota: Esto quiere decir que las geodésicas representado la caída libre de un objeto que se acerca indefinidamente al horizonte, tarda infinito tiempo (de Schwarzschild) en alcanzarlo. Como ya hemos señalado, esto implica que ningún observador situado en el exterior del agujero negro puede detectar que un objeto cae en su interior.

Dem.: La demostración se reduce a resolver en este caso particular las ecuaciones del Teorema 4.1.5. Bajo nuestras condiciones, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$ y sustituyendo el dato inicial en las ecuaciones

$$\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)\frac{dt}{d\tau} = E, \qquad \big(1 - \frac{2GM}{r}\big)\big(\frac{dt}{d\tau}\big)^2 - \big(1 - \frac{2GM}{r}\big)^{-1}\big(\frac{dr}{d\tau}\big)^2 = 1,$$

se obtiene $E = (1 - 2GMr_0^{-1})^{1/2}$. Diviendo la segunda ecuación por el cuadrado de la primera y despejando

$$\big(\frac{dr}{dt}\big)^2 = \frac{2GM}{r_0 - 2GM}\frac{(r_0 - r)(r - 2GM)^2}{r^3}.$$

Esta misma expresión implica que instantes después del tiempo inicial sólo puede ser $r < r_0$, en otro caso $(dr/dt)^2 < 0$, lo que significa que r ha decrecido (lo cual es físicamente obvio)

[uff] Si el objeto material parte del reposo desde el exterior del agujero negro, entonces $dr/d\tau = 0$, $d\theta/d\tau = 0$, $d\varphi/d\tau = 0$ y $r(0) = r_0 > 2GM$. Por la simetría se puede suponer que sale desde cualquier dirección radial, por ejemplo $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$ (esto es como decir la del eje X).

y que el signo de la derivada es negativo. Tras estas consideraciones, extrayendo raíces cuadradas y separando variables se deduce

$$t = \sqrt{\frac{r_0 - 2GM}{2GM}} \int_r^{r_0} \frac{w}{w - 2GM} \sqrt{\frac{w}{r_0 - w}} dw. \tag{4.9}$$

Nótese que el integrando tiene dos singularidades: $w = r_0$ y $w = 2GM$, siendo la primera integrable y la segunda no ya que para $\delta > 0$

$$\int_{r_0-\delta}^{r_0} (r_0 - w)^{-1/2} dw < \infty, \qquad \int_{2GM}^{2GM+\delta} (w - 2GM)^{-1} dw = \infty.$$

De (4.9) se deduce fácilmente que la región interior $r \leq 2GM$ es inalcanzable por la geodésica γ_1 y que, de hecho, $t \to +\infty$ si y sólo si $r \to 2GM^+$. ■

A continuación veremos un resultado similar para las geodésicas nulas: Un rayo de luz lanzado hacia un agujero negro tarda una infinidad de tiempo en llegar al horizonte. De nuevo por la reversibilidad del tiempo[uff], como no hay geodésicas nulas que entren en el agujero negro tampoco existen geodésicas nulas que salgan de él. Por consiguiente un agujero negro es realmente negro.

En analogía con lo hecho antes, para estudiar las líneas de universo radiales de los fotones, consideraremos la geodésica nula de la métrica de Schwarzschild

$$\gamma_0(\lambda) = \big(t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \varphi(\lambda)\big) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \gamma_0(0) = (0, r_0, \pi/2, 0), \ r_0 > 2GM \\ \theta'(0) = \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

Ahora no tiene sentido suponer que un rayo de luz parte del reposo (contradiría que es una geodésica nula), sólo supondremos que apunta inicialmente hacia el origen (es "entrante") y que es futura, esto es, $r'(0) < 0 < t'(0)$.

Proposición 4.3.2 : *Las coordenadas $t(\lambda)$ y $r(\lambda)$ de la geodésica γ_0 satisfacen*

$$t = r_0 - r + 2GM \log\big(\frac{r_0 - 2GM}{r - 2GM}\big) \qquad \textit{con } r = r_0 - E\lambda$$

donde E es una constante positiva. En particular, la trayectoria de γ_0 está incluida en la región $r > 2GM$ y si $r \to 2GM^+$ entonces $t \to +\infty$.

[uff] Esto es sólo decir que las fórmulas del Teorema 4.1.5 son invariantes al sustituir t por $-t$ y $\lambda{=}\tau$ por $\lambda{=}-\tau$. Geométricamente esto sólo refleja el hecho de que las geodésicas se pueden recorrer en dos direcciones.

<u>Dem.</u>: Como antes, se tiene $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$ y las ecuaciones (nótese que $\kappa = 0$ con la notación del Teorema 4.1.5)

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} = E, \qquad \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 0.$$

Así pues

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2.$$

La segunda ecuación da la parametrización de r mientras que extrayendo raíces cuadradas en la primera, ajustando los signos y separando variables se llega a

$$t = -\int_{r_0}^{r} \left(1 - \frac{2GM}{w}\right)^{-1} dw.$$

La integral es elemental y después de algunos cálculos lleva al resultado deseado. ■

La métrica de Schwarzschild tiene un aspecto muy "feo" para $0 < r \le 2GM$, a saber, es singular en el radio de Schwarzschild $r = 2GM$, y para $r < 2GM$ la coordenada t se convierte en espacial y la r en temporal dependiendo de ésta última los coeficientes de la métrica (no es una métrica estática). Sin embargo los dos resultados anteriores implican que, como observadores exteriores no debemos preocuparnos porque nunca podremos recibir ninguna señal desde el interior del agujero negro[clp]. Si la región $0 < r < 2GM$ permanece vedada a cualquier medición externa no parece que tenga mucho sentido físico (aunque hay alguno, como veremos más adelante) estudiar el movimiento de posibles objetos en dicha región. Sin embargo, no hay ninguna razón geométrica que haga que calcular las geodésicas en $0 < r < 2GM$ sea más o menos difícil que en $r > 2GM$.

Por ejemplo, un razonamiento similar al de la proposición anterior prueba que si en la definición de γ_0 se reemplaza $r_0 > 2GM$ por $0 < r_0 < 2GM$, las coordenadas $t = t(\lambda)$

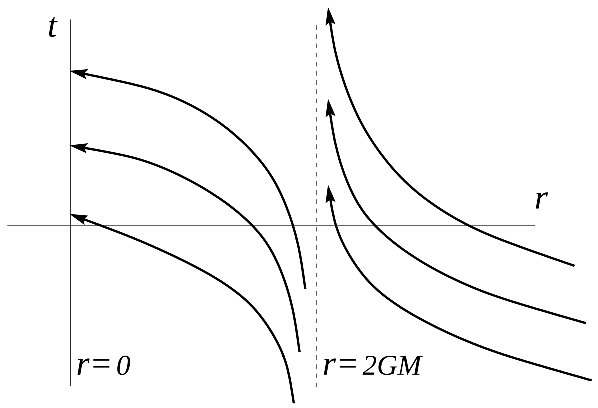
[clp] Este hecho es bastante tranquilizador para los que, como Einstein, rechazaban que pudiera existir la singularidad de Schwarzschild (o cualquier otra) en el mundo físico real. Resulta que aunque haya singularidades no podemos detectar desde fuera su existencia así que es como si no existieran. Se ha conjeturado que en general (incluso para agujeros negros sin simetría esférica) nunca podemos detectar las singularidades desde el exterior y por tanto no debe preocuparnos su existencia. Con una notación un poco sicalíptica, se dice que las *singularidades desnudas* están prohibidas por un *censor cósmico*. Recientemente se ha probado que, al menos sobre el papel (matemáticamente), las singularidades desnudas pueden existir así que no hay razón para que el censor cósmico no se permita sus alegrías, lo cual desde el punto de vista físico no es muy bueno. Para complicar más el tema de las singularidades, veremos al final de la sección que la de Schwarzschild se desvanece (parcialmente, según nuestros cálculos y totalmente con otros más elaborados **[Sc]**) si se emplean unas coordenadas suficientemente artificiales.

y $r = r(\lambda)$ satisfacen

$$t = r - r_0 + 2GM \log\big(\frac{2GM - r}{2GM - r_0}\big) \qquad \text{con } r = r_0 + E\lambda$$

donde E es una constante negativa.

Cuando representamos las geodésica nulas radiales entrantes (y futuras) , $r'(0) < 0 < t'(0)$, en un diagrama (r, t) obtenemos curvas que tienen al radio de Schwarzschild como asíntota y cuyo corte con $t = 0$ es, por definición, el valor del punto de partida r_0. Las curvas a la derecha de la asíntota son las únicas que pueden verse desde el exterior del agujero negro.



Nótese que las geodésicas salientes, $0 < r'(0), t'(0)$, pueden representarse por las simétricas de estas curvas por el eje r recorridas hacia la izquierda.

Aunque hemos probado que se tarda un tiempo (de Schwarzschild) infinito en alcanzar el horizonte, sólo se necesita tiempo propio finito para llegar a él. Esta afirmación choca fuertemente con nuestro sentido común y Einstein trató de evitarla en [**Ei3**] probando que bajo ciertas hipótesis que pudieran darse en la formación de cúmulos estelares, el horizonte $r = 2GM$ debería estar "tapado" con masa (esto es, no se puede crear un agujero negro). En seguida analizaremos con detalle la aparente contradicción, pero antes veamos el enunciado concreto.

Proposición 4.3.3 : *Sea γ_1 una geodésica temporal en $r > 2GM$ como antes y sea*

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}}\,(v + \operatorname{sen} v) \qquad \textit{con} \;\; v = 2 \arccos\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}.$$

Entonces γ_1 está bien definida en $[0, \tau_0)$ y se cumple

$$\lim_{\tau\to\tau_0^-} r(\tau) = 2GM.$$

<u>DEM.</u>: Según habíamos visto, γ_1 está determinada por las ecuaciones

$$\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)\frac{dt}{d\tau} = E, \qquad \big(1 - \frac{2GM}{r}\big)\big(\frac{dt}{d\tau}\big)^2 - \big(1 - \frac{2GM}{r}\big)^{-1}\big(\frac{dr}{d\tau}\big)^2 = 1$$

con $E = (1 - 2GMr_0^{-1})^{1/2}$. Despejando $dt/d\tau$ de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, obtenemos (también se podría aplicar simplemente la ecuación de energía de la primera sección de este capítulo)

$$\big(\frac{dr}{d\tau}\big)^2 = 2GM\big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\big).$$

El cambio de variable $\tau = (v + \operatorname{sen} v)\sqrt{r_0^3/(8GM)}$ es un cambio lícito para $v \in (-\pi, \pi)$ porque $d\tau/dv \neq 0$, y conduce a

$$\big(\frac{dr}{dv}\big)^2 = \frac{r_0^3}{4}\big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\big)(1 + \cos v)^2.$$

Por sustitución directa es fácil comprobar que la solución de esta ecuación diferencial, con $r(0) = r_0$, es $r = r_0(1 + \cos v)/2 = r_0\cos^2(v/2)$. Con lo cual la geodésica γ_1 se puede parametrizar como

$$\tau = \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}}\,(v + \operatorname{sen} v), \qquad r = r_0\cos^2(v/2), \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0$$

y t viene dada por una función que, según (4.9), tiende a infinito cuando $r \to 2GM^+$ (y no está definida para $r < 2GM$). Las ecuaciones anteriores prueban que esta situación se produce cuando $\tau \to \tau_0^-$ con τ_0 como en el enunciado. ■

Parafraseando lo visto hasta ahora, si nuestras ínclitas observadoras, A y B, Ana y Blanca, están en el exterior de un agujero negro y Ana permanece inmóvil mientras que Blanca se deja atraer desde el reposo en caída libre hacia un agujero negro, entonces Ana observará que, por alguna razón incomprensible, la velocidad de Blanca empezará a disminuir a partir de un punto dado de manera que nunca llegará a atravesar el horizonte. Por otra parte, Blanca mide que según se acerca a cierto tiempo finito (dado por τ_0

en la proposición anterior) tiende a alcanzar el horizonte, Además, según vimos en la sección dedicada a la métrica de Schwarzschild, despreciando el efecto de la velocidad, los incrementos de tiempo medidos por los relojes de Ana y Blanca están relacionados mediante

$$\frac{\Delta\tau_A}{(1-2GMr_A^{-1})^{1/2}} = \frac{\Delta\tau_B}{(1-2GMr_B^{-1})^{1/2}}.$$

Con lo cual cuando Blanca esté suficientemente cerca del horizonte, Ana ya habrá muerto de vieja hace años, y mientras le llega la hora, Ana pensará que Blanca comparativamente apenas envejece. Si hiciéramos cálculos más precisos considerando los efectos de la velocidad (las fórmulas anteriores sólo eran ciertas para observadores inmóviles) la relación es incluso más drástica y Ana envejecerá comparativamente más rápidamente todavía (como veremos más adelante, lo de Blanca será todavía peor).

Una vez acostumbrados a las paradojas de la relatividad especial, lo que parece realmente extraño aquí es que la coordenada tiempo se haga infinita para un valor finito del tiempo propio. Por otra parte, matemáticamente no es tan raro que una geodésica se acabe en un tiempo finito porque, por ejemplo, haya un agujero en la variedad o hayamos llegado al límite del abierto donde es válida la carta que usamos. Veamos la situación en un ejemplo artificial para después clarificar nuestro caso.

Consideremos la métrica

$$ds^2 = (1+y^2)dx^2 + 2xydxdy + x^2dy^2. \tag{4.10}$$

En principio sólo es definida positiva en $(\mathbb{R}-\{0\})\times\mathbb{R}$. En la recta $x=0$ la métrica degenera y dy se comporta como antes dt, expandiéndose indefinidamente en función de ds. Tras algunos cálculos se comprueba que las geodésicas normalizadas con $x(0)=1$, $y(0)=y_0>0$, $x'(0)=-1$, son de la forma

$$\gamma_+(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda)) = \big(1-\lambda, \frac{y_0}{1-\lambda}\big).$$

Por tanto llegamos a $x=0$ en $\lambda=1$ pero $y(\lambda)\to+\infty$, lo que simplemente refleja que para x cercana a cero hay que incrementar enormemente y para tener una pequeña variación de λ. Si x e y representaran magnitudes físicas nunca podríamos salir de nuestro universo $x>0$ porque tendríamos que atravesar una frontera, $x=0$, en la que $y\to+\infty$. Sin embargo nada nos impide hallar las geodésicas del otro lado, digamos ahora con $x(0)=-1$, $y(0)=-y_0$, obteniendo

$$\gamma_-(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda)) = \big(-1-\lambda, -\frac{y_0}{1+\lambda}\big)$$

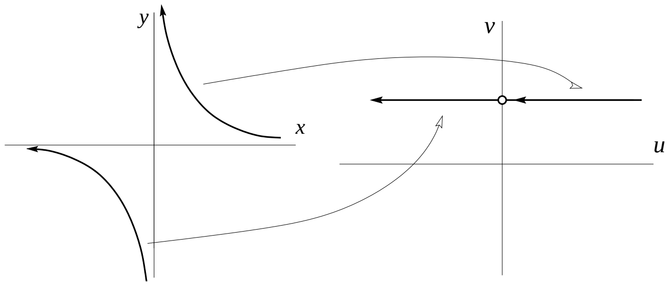
que es igual que γ_+ salvo cambiar el parámetro $\lambda = \lambda + 2$. En resumen, si depreciamos la singularidad de $x = 0$, podemos suponer que en algún sentido, según avanza λ, la geodésica γ_+ atraviesa $x = 0$ y enlaza con otra del tipo γ_-. Quizá con unas nuevas coordenadas podamos ver esa unión que ocurre en el infinito. Tomando $u = x$, $v = xy$, las geodésicas pasan a ser rectas y de hecho (4.10) se transforma en

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

que es la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^2$. Ahora es evidente que

$$\big(u(\gamma_+(\lambda)), v(\gamma_+(\lambda))\big) = (1 - \lambda, y_0), \qquad \big(u(\gamma_-(\lambda)), v(\gamma_-(\lambda))\big) = (-1 - \lambda, y_0)$$

son geodésicas y que ambas son distintas parametrizaciones de la misma trayectoria. Aunque u y v no tengan sentido físico permiten entender el problema global.



Aplicando estas ideas a nuestro caso, aunque para Ana, Blanca tarde una infinidad en llegar al horizonte, no se contradice el hecho de que Blanca note que lo alcanza cuando $\tau \to \tau_0^-$. También aquí existen nuevas coordenadas en las que las geodésicas se pueden continuar más allá de τ_0 y enlazar con una geodésica interior. En este sentido, Blanca habrá entrado en el agujero negro aunque Ana y todos los observadores exteriores estáticos mueran antes de verla siquiera pasar el horizonte. Por cierto, en la práctica el viaje de Blanca tendría un destino fatal: incluso sin considerar la intensísima radiación que rodea los agujeros negros y que la mataría antes de acercarse, moriría antes o después por las fuerzas asociadas a la gravedad, y típicamente antes de llegar al horizonte (véase §32.6 y Ex. 31.1, 31.3, 31.4 en [**Mi-Th-Wh**]).

Después de este final infeliz veamos las coordenadas que permiten evitar la singularidad de Schwarzschild y continuar al menos las geodésicas entrantes.

Proposición 4.3.4: *Con el cambio de coordenadas* $(t, r, \theta, \varphi) \mapsto (v, r, \theta, \varphi)$ *donde*

$$v = \begin{cases} t + r + 2GM \log(r - 2GM) & \text{si } r > 2GM \\ -t + r + 2GM \log(2GM - r) & \text{si } r < 2GM \end{cases}$$

la métrica de Schwarzschild se transforma en

$$ds^2 = (1 - 2GMr^{-1})dv^2 - 2dvdr - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2,$$

y las geodésicas nulas para esta métrica que corresponden a geodésicas nulas radiales, $\theta(0) = \pi/2$, $\varphi(0) = \theta'(0) = \varphi'(0) = 0$, *entrantes,* $dr/dt < 0$, *se escriben de la forma*

$$v = \text{cte.}$$

Nota: Estas coordenadas, llamadas de Eddington-Finkelstein, permiten ver juntos los dos trozos, $0 < r < 2GM$ y $r > 2GM$, de la geodésica determinada por un rayo de luz que cae dentro de un agujero negro. Su efecto geométrico es similar al visto en el ejemplo anterior. También funciona bien para las geodésicas temporales entrantes, pero su principal inconveniente es que no es así para las salientes, $dr/dt > 0$. Esto se puede remediar usando nuevas cartas con otras coordenadas[clp] que no introduciremos aquí (véase §19 en [**Hu-To**] y Box 31.2 en [**Mi-Th-Wh**]).

DEM.: De la definición de v se sigue

$$dv = \pm dt + (1 - 2GMr^{-1})^{-1} dr \tag{4.11}$$

donde el signo positivo corresponde al primer caso y el negativo al segundo. Operando,

$$(1 - 2GMr^{-1})dv^2 - 2dvdr(1 - 2GMr^{-1})dt^2 - (1 - 2GMr^{-1})^{-1}dr^2.$$

Con lo que hemos probado que la métrica del enunciado es la misma que la de Schwarzschild tras el cambio de coordenadas. Las geodésicas con θ y φ constantes, si son nulas deben satisfacer

$$(1 - 2GMr^{-1})\Big(\frac{dv}{d\lambda}\Big)^2 - 2\frac{dv}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0.$$

Si expresamos v en función de r, $v = v(r)$, diviendo entre $(dr/d\lambda)^2$ en la ecuación anterior se tiene

$$\Big((1 - 2GMr^{-1})\frac{dv}{dr} - 2\Big)\frac{dv}{dr} = 0.$$

Con lo que las geodésicas cumplen

$$\frac{dv}{dr} = \text{cte.} \qquad \text{ó} \qquad \frac{dv}{dr} = 2(1 - 2GMr^{-1})^{-1}.$$

[clp] Hasta 1960 no se encontraron unas coordenadas, las de Kruskal-Szekeres, que resolvieran simultáneamente los problemas de singularidad de todas las geodésicas.

Por otra parte, (4.11) implica

$$\frac{dv}{dr} = \frac{dt}{dr}\,\mathrm{sgn}(1 - 2GMr^{-1}) + (1 - 2GMr^{-1})^{-1}.$$

De donde el segundo tipo de geodésicas no puede satisfacer $dt/dr < 0$ y, por tanto, no es entrante y la única posibilidad es $v = \mathrm{cte}$. ■

Problemas 4.3

→**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) ¿Qué argumento podrían haber dado los contemporáneos de Laplace en contra de su razonamiento relativo a los agujeros negros?

ii) ¿Por qué razón "horizonte" es un término adecuado para referirse a la esfera $r = 2GM$ asociada a un agujero negro?

iii) ¿Cuál es la velocidad de la luz en la dirección radial para un observador que use las coordenadas de Schwarzschild, (t, r, θ, φ)?

iv) ¿No contradice el apartado anterior la relatividad especial?

v) ¿Es cierto para la luz el adagio "todo lo que sube baja" dentro o fuera de un agujero negro?

vi) ¿Podría Blanca dar marcha atrás muy rápido en su viaje y verse a sí misma cayendo? (*Indicación*: Empléese que el vector tangente de su línea de universo es temporal y que para *verse* a sí misma debe ir más rápido que la luz que emite).

vii) ¿Por qué se presta tanta atención a la singularidad en $r = 2GM$ y tan poca a $r = 0$?

viii) Si excavásemos a suficiente profundidad en la Tierra, ¿nos encontraríamos la singularidad de Schwarzschild?

→**2)** Probar que con el argumento newtoniano del comienzo de la sección, para velocidades mayores que la de escape realmente se cumple que el objeto se alejará arbitrariamente según transcurre el tiempo.

→**3)** Calcular hasta qué longitud tendrían que disminuir la Tierra, el Sol y Júpiter sus radios, respectivamente, para que se comportasen como agujeros negros.

4) Comprobar que el cambio $\tau = (v + \mathrm{sen}\, v)\sqrt{r_0^3/(8GM)}$ lleva a la ecuación diferencial mencionada en la prueba del cálculo de τ_0. Además de $r = r_0 \cos^2(v/2)$, $r \equiv r_0$ es otra solución con $r(0) = r_0$. Explicar qué hipótesis falla en el teorema de unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Comprobar que la ecuación geodésica $\frac{d}{d\lambda}(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}) - \partial\mathcal{L}/\partial r = 0$ lleva a descartar esta nueva solución.

5) Completar los detalles en la demostración de la primera proposición de esta sección.

$\rightarrow$**6)** Según habíamos visto, la geodésica γ_1 cumple

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{dr}{d\tau}\Big)^2 = GM\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big).$$

Comprobar que combinando las fórmulas de Newton $F = -GMm/r^2$ y $F = ma$ se llega a un resultado análogo. Explicar por qué entonces los movimientos de caída libre son diferentes en la mecánica de Newton y en la relatividad general

7) Calcular la integral final que lleva a la parametrización de γ_0 y explicar el significado de la fórmula resultante si no se emplea el signo negativo.

$\rightarrow$**8)** Hallar una fórmula para las geodésicas nulas "entrantes" en $0 < r < 2GM$. Explicar por qué son simétricas a las salientes en el plano (r,t). Probar que según r decrece, t crece.

9) Probar rigurosamente que para cualquier $r_0 > 2GM$

$$\lim_{r\to 2GM^+} \int_r^{r_0} \frac{w}{w-2GM}\sqrt{\frac{w}{r_0-w}}dw = +\infty.$$

$\rightarrow$**10)** Probar que según Ana (que supondremos que usa las coordenadas de Schwarzschild), cuando Blanca está cercana al horizonte, digamos $r - 2GM = \delta$, su velocidad es aproximadamente proporcional a δ. Utilizar este hecho y un argumento como el de *Aquiles y la Tortuga* para explicar por qué Ana no puede ver a Blanca atravesar el horizonte. (*Indicación*: Emplear la fórmula para dr/dt del primer resultado de esta sección).

11) Si la Tierra colapsase de pronto para formar un agujero negro, calcular cuánto tardaríamos aproximadamente sus habitantes en atravesar el horizonte según nuestras mediciones.

$\rightarrow$**12)** Blanca lleva un bonito jersey de color violeta (frecuencia $\nu = 7'5 \cdot 10^{14} s^{-1}$) y se separa de Ana desde $r_0 = 10^8 m$ para dejarse caer hacia su apartamento cercano a un agujero negro de masa $M = 10^{34} kg$. Cuando llega, Ana ve que el jersey de Blanca es de color rojo (frecuencia $\nu = 4'3 \cdot 10^{14} s^{-1}$). Calcular la coordenada radial del apartamento de Blanca.

$\rightarrow$**13)** Supongamos que una partícula tiene una velocidad inicial tal que primero se aleja (radialmente) de un agujero negro pero que no es suficiente para permitirle escapar y acaba cayendo en él. Demostrar que se cumple

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{dr}{d\tau}\Big)^2 = GM\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_m}\Big)$$

donde r_m es el máximo valor de r alcanzado. (*Indicación*: Comenzar probando que $E^2 = 1 - 2GMr_m^{-1}$).

14) Estudiar qué velocidad inicial en la dirección radial, dr/dt, se debe comunicar a una partícula situada en $r = r_0$ para que no sea atrapada por un agujero negro y comparar la solución con la velocidad de escape newtoniana. (*Indicación*: Se puede usar el problema anterior con $r_m \to +\infty$).

$\to$**15)** Estudiar si es posible que un rayo de luz quede dando vueltas alrededor de un agujero negro siguiendo una trayectoria circular.

16) Supongamos que un objeto cae hacia un agujero negro en caída libre partiendo del reposo desde un punto indefinidamente alejado, $r_0 \to +\infty$. Calcular la máxima velocidad alcanzada.

17) Comprobar que la curva $x(\lambda) = 1 - \lambda$, $y(\lambda) = y_0(1-\lambda)^{-1}$ realmente define una geodésica de la métrica $ds^2 = (1+y^2)dx^2 + 2xydxdy + x^2dy^2$.

$\to$**18)** El tensor de Riemann cuatro veces contravariante se define de la forma obvia a partir del usual. Sabiendo que para la métrica de Schwarzschild se verifica $R^{\mu\nu\lambda\sigma}R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 48G^2M^2r^{-6}$, demostrar que no existe ningún cambio de coordenadas que elimine la singularidad de $r = 0$.

19) Un resultado debido a S.W. Hawking afirma que si dos agujeros negros chocan y se fusionan dando lugar a uno mayor, el área del horizonte del agujero negro resultante debe ser mayor o igual que la suma de las áreas de los horizontes de los agujeros negros iniciales. A partir de este resultado, calcular la mínima masa del agujero negro resultante obtenido a partir de dos cuyas masas suman $2 \cdot 10^{35} kg$.

$\to$**20)** Los agujeros negros con carga eléctrica (llamados de Reissner-Nordstrøm) responden a la métrica

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + (A(r))^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

con $A(r) = 1 - 2GMr^{-1} + (4\pi\epsilon_0)^{-1}q^2Gr^{-2}$ donde q es la carga y ϵ_0 la permeabilidad del vacío.

a) Escribir esta métrica en unidades no relativistas.

b) Estudiar si la carga favorece o impide que una estrella con cierta masa y radio fijados sea un agujero negro y tratar de buscar una razón física para ello.

c) Sabiendo que la carga de un electrón es $1'6 \cdot 10^{-19} C$ y su masa $9'1 \cdot 10^{-30} kg$, hallar qué radio debería tener para que fuera un agujero negro. (Nota: En los albores de la relatividad general se pensó que quizá la métrica de Reissner-Nordstrøm explicara algunos fenómenos subatómicos, pero más tarde se supo que lo que ocurre a escalas tan pequeñas pertenece al dominio de la Física Cuántica).

*__21)__ A cierta distancia de un agujero negro, cinco minutos después de haber encendido una linterna en una dirección perpendicular a la radial, noto que su luz alumbra mi espalda. Calcular la masa del agujero negro sabiendo que la luz ha seguido una trayectoria perfectamente circular ($r =$cte).

Historias en titulares:

La Bomba

Recientemente S.W. Hawking ha probado mediante consideraciones termodinámicas y cuánticas que los los agujeros negros no son tan negros como parecen porque, según sus cálculos, deben emitir una levísima radiación. La teoría es bastante desconcertante porque implica que un agujero negro se podría evaporar poco a poco para acabar explotando violentamente. Es muy dudoso que esta predicción se llegue a confirmar experimentalmente.

1974

La Verdad Desnuda

Los agujeros negros parecen un hecho en la Astrofísica actual. El más antiguo y más probable candidato para merecer este nombre es Cygnus X-1. S.W. Hawking y K.S. Thorne han hecho una apuesta bastante indigna al respecto. Si se prueba que verdaderamente es un agujero negro, Thorne ganará una subscripción a *Penthouse* por un año, y si se prueba su inexistencia Hawking (¿como un consuelo por sus numerosos artículos sobre agujeros negros?) ganará una subscripción a *Private Eye* por cuatro años.

1975

La Masa

El telescopio espacial Hubble ha detectado un gran disco de material de más de 480 000 años luz conectado con el centro de la galaxia M87 mediante un chorro de gas de más de 3 000 años luz. Esto aumenta las evidencias en favor de que el centro de algunas galaxias podría ser un agujero negro supermasivo. En el caso de M87 su masa pudiera alcanzar el equivalente de 3 000 millones de veces la del Sol.

1994

¿Qué hay que saberse?:

Los puntos principales son:

• La solución de Schwarzschild es singular en el *horizonte* $r = 2GM$ pero esta singularidad sólo se manifiesta en hipotéticos objetos estelares con radio excesivamente pequeño en relación con su masa: los agujeros negros.

• Las geodésicas temporales que corresponden a una partícula que cae radialmente hacia un agujero negro cumplen $t \to +\infty$ cuando $r \to +2GM$, así que con las coordenadas de Schwarzschild nunca alcanza el horizonte. Sin embargo para un valor finito del tiempo propio se tiene que $r \to 2GM$, y consecuentemente un observador que viaja con la partícula, según sus propias mediciones, alcanza el horizonte en un tiempo finito.

• Tampoco las geodésicas nulas llegan a alcanzar el horizonte con las coordenadas de Schwarzschild.

• Usando un cambio de coordenadas adecuado las ecuaciones de algunas geodésicas dejan de ser singulares en $r = 2GM$ y admiten una continuación natural dentro del agujero negro.

¿Para qué sirve?:

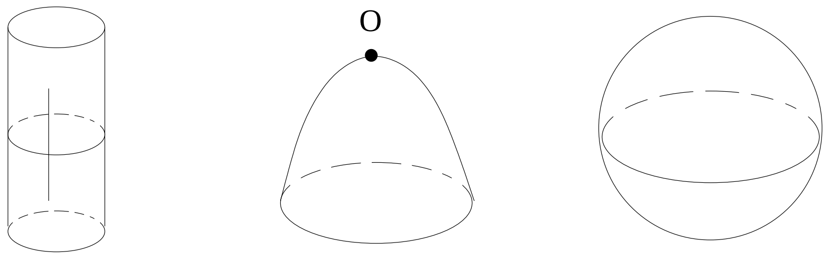
La existencia y propiedades de los agujeros negros es algo que debemos entender casi al mismo nivel que la afirmación de que la superficie del Sol está a $6\,000^o$ y el núcleo a $20\,000\,000^o$: aunque sea cierto más vale no estar muy cerca para comprobarlo. Por ello parece imposible que podamos usar en la práctica los agujeros negros. Sin embargo en el plano teórico dan algunas respuestas, crean algunas cuestiones físicas y matemáticas interesantes y sirven para escribir toneladas de Ciencia Ficción.

5. Cosmología

5.1. Observaciones e hipótesis cosmológicas

Al menos en principio, si conociéramos la distribución de masas y energías de todo el Universo y su estado actual, podríamos teorizar acerca de la métrica asociada a las coordenadas que hayamos elegido y su dinámica futura. Esto parece demasiado pretencioso, y seguramente lo es, pero siempre podemos hacer hipótesis suficientemente fuertes, formularlas matemáticamente, ponerlas en un teorema y decir que hemos probado algo. Como no podemos obligar al Universo a que satisfaga las hipótesis de los teoremas que demostremos quizá éstos representen poco más que nuestros propios prejuicios. Por ejemplo, Einstein supuso inicialmente que el Universo era una superficie esférica tridimensional y por tanto con curvatura escalar constante (véase p. 124 en [**Ei2**]). Las ecuaciones de campo implican una dependencia del tiempo pero como no había evidencia de ello Einstein añadió un término más a las ecuaciones de campo (la *constante cosmológica*) y eliminó tal dependencia obteniendo un modelo estático del Universo. Más adelante con la observación, debida a E.P. Hubble, del corrimiento hacia el rojo que implicaba una expansión, se arrepintió de ello y siguió los argumentos de A.A. Friedmann (quien parece ser que no creía en la realidad física de su propio modelo [**Sp**]) cuyas ideas, combinadas con las de otros autores, se siguen manejando hoy en día.

La hipótesis fundamental (un poco más débil que la "esfericidad" supuesta por Einstein), llamada a veces hipótesis cosmológica, es que para cada tiempo fijado (aquí "tiempo" tiene un significado específico que se explica más adelante) el espacio es homogéneo e isótropo. Homogéneo quiere decir que todos los puntos son indistinguibles e isótropo que todas las direcciones son indistinguibles.



Homogéneo no isótropo	Isótropo en O (simetría esférica)	Homogéneo e isótropo (isótropo en todo punto)

Por ejemplo, un insecto viviendo en una superficie cilíndrica sin referencias externas no distingue unos puntos de otros pero puede distinguir direcciones porque en horizontal vuelve al punto de partida y en vertical no. El cilindro es homogéneo pero no isótropo**clp**. Una persona subida a la cima de una montaña perfectamente simétrica puede elegir cualquier dirección para bajar: hay isotropía en la cima pero no en el resto de los puntos. Por último, una esfera o el plano son homogéneos e isótropos: no hay ni puntos ni direcciones distinguidas.

Si miramos el cielo en una noche estrellada parece lejos de ser homogéneo e isótropo: distinguimos la Luna, la Osa Mayor, el Camino de Santiago,... pero observaciones astronómicas sugieren que si pudiéramos ver todas las estrellas se mostrarían, a gran escala, uniformemente distribuidas en la cúpula celeste (isotropía desde la Tierra) y parece natural pensar que la Tierra no tiene nada de especial (a veces se llama a esto *hipótesis Copernicana*) y que alguien que viviese en otra galaxia debería ver el mismo tipo de cielo estrellado. Supondremos por tanto isotropía y homogeneidad y no sólo ahora sino en cualquier instante pasado o futuro, en particular, supondremos que observamos a una escala tal que las masas estelares aparecen como un continuo: no hay estrellas individuales o galaxias, sino una nube de polvo o más bien una especie de fluido. Un importante aval astronómico para la hipótesis cosmológica es la llamada <u>radiación de fondo</u> detectada en 1965 por A.A. Penzias y R.W. Wilson. Ésta es una débil radiación (que suele expresarse como una temperatura, $2'7^{\mathrm{o}}K$) que llena el espacio. Se considera como los restos de la radiación primigenia tras el *big-bang* que originó el Universo y su gran isotropía (típicamente sólo varía con la dirección en un $0'001\%$) se aporta como indicio de la homogeneidad e isotropía del Universo; mientras que su débil pero existente anisotropía se utiliza para justificar la formación de las galaxias. A pesar de estas evidencias, todavía hay lugar para modelos, como el descrito en [**Sm-Te**], en los que no se cumple la hipótesis cosmológica.

Llamemos dl^2 a la parte espacial de la métrica del espacio-tiempo, es decir, dl^2 se obtiene formalmente poniendo $dt = 0$ en ds^2. Para traducir matemáticamente la hipótesis cosmológica primero notamos, que según vimos al final del segundo capítulo, la isotropía alrededor de un punto implica que podemos elegir coordenadas r, θ y φ tales que

$$dl^2 = B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 \tag{5.1}$$

donde B es una función con $B(0) = 1$. Además la homogeneidad implica la constancia de la curvatura escalar**uff**. Estas dos consecuencias de la isotropía y homogeneidad son en realidad equivalentes a ellas y nos evitan dar una complicada definición matemática acorde con la idea intuitiva de que todos los puntos y direcciones son iguales (véase [**We**] Cap. 13

clp Para ser rigurosos deberíamos decir que el cilindro no es *topológicamente* isótropo o "globalmente" isótropo. Si tomamos un pequeño abierto del cilindro, métricamente no hay niguna diferencia con otro de $\mathbb{R}^2$ (lo podemos aplastar sobre él sin cambiar distancias) y por tanto no es posible distinguir direcciones a cortas distancias.

uff En otro caso podríamos distinguir unos puntos de otros por el valor de la curvatura escalar en ellos. Si uno quiere un teorema puede mirar el de Schur en [**Gi**].

o **[Gi]** §20.2).

Proposición 5.1.1 : *Una variedad riemanniana tridimensional, isótropa alrededor de un punto y con curvatura escalar constante, R, (en particular una variedad isótropa y homogénea) admite una métrica de la forma*

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - Rr^2/6} + r^2 d\theta^2 + r^2 \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

Conviene escribir esta métrica de otra forma equivalente más útil.

Corolario 5.1.2: *Una variedad como la de la proposición anterior también admite una métrica de la forma*

$$dl^2 = C^2\big(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2\big)$$

donde $C > 0$ y $k = \operatorname{sgn} R \in \{-1, 0, 1\}$.

DEM.(del Corolario): Basta sustituir en la métrica de la proposición r por Cr con C arbitrario si $R = 0$ y $C = \sqrt{6k/R}$ en otro caso. ■

DEM.(de la Proposición): Para hallar el tensor de Ricci R_{ij} correspondiente a la métrica (5.1) podemos aprovechar los cálculos de la solución de Schwarzschild del capítulo anterior. Basta notar que si ponemos $A =$constante, digamos $A = -1$, entonces todas las derivadas parciales de las componentes de la métrica con respecto a la variable temporal se anulan, así que el tensor de Ricci coincide con la parte espacial del hallado en el Teorema 4.1.3 cuando se toma $A = -1$, esto es

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} B'/rB & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & R_{22}\,\mathrm{sen}^2\theta \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad R_{22} = \frac{B'r}{2B^2} - \frac{1}{B} + 1.$$

Según la definición de curvatura escalar

$$R = g^{ij}R_{ij} = \frac{B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2}\big(\frac{B'r}{2B^2} - \frac{1}{B} + 1\big),$$

obteniéndose la ecuación diferencial

$$\frac{rB'}{B^2} - \frac{1}{B} = R\frac{r^2}{2} - 1$$

que puede escribirse como

$$-\Big(\frac{r}{B}\Big)' = \Big(\frac{1}{6}Rr^3 - r\Big)'$$

y por tanto (recuérdese que $B(0) = 1$)

$$B(r) = (1 - \frac{1}{6}Rr^2)^{-1},$$

lo cual prueba el resultado. ■

Para introducir la métrica, ds^2, del espacio-tiempo debemos tener en cuenta que dl^2 puede cambiar según varía el tiempo. En el lenguaje del corolario anterior $C = C(t)$. La forma más sencilla y natural de añadir la parte que involucra a dt es como en el espacio de Minkowski, lo que lleva a considerar la métrica de Robertson-Walker

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + C^2(t)\Big(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\Big)}$$

como un modelo del espacio-tiempo del Universo.

Se pueden dar argumentos físicos para justificar esta forma de introducir el tiempo. Recuérdese que cuando estudiamos la solución de Schwarzschild, vimos que el tiempo transcurre más o menos deprisa para diferentes observadores estáticos dependiendo de su posición. Pero ahora si exigimos que todas las posiciones sean iguales, no queda más remedio que el tiempo transcurra a la misma velocidad para todos (a veces se dice que t es el tiempo cósmico), así que g_{00} no puede depender de r, θ ó φ. Si g_{00} fuera una función de t, digamos $g_{00} = -A(t)$, entonces con un cambio $d\tilde{t} = \sqrt{A(t)}\, dt$ se puede conseguir $A = -1$. También la equivalencia de todos los puntos y direcciones sugiere[uff] que $g_{0j} = g_{j0} = 0$ (véase [**Sc**], Cap. 12).

Con la métrica de Robertson-Walker, se tiene que $t = \tau$, $(r, \theta, \varphi) = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ son líneas de universo (geodésicas temporales), cada una de las cuales puede considerarse como la "historia" del punto espacial $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Si, como hemos mencionado, conjeturamos el Universo como un fluido (perfecto), y las galaxias (o como queramos llamar a las componentes elementales de dicho fluido) siguen las líneas de universo anteriores, su cuadrivelocidad es

$$\vec{U} = 1 \cdot \partial_0 = \delta_0^\nu \partial_\nu.$$

[uff] Sin entrar en detalles, nótese que por ejemplo $g_{01} > 0$ implica que, en general, los vectores futuros con una componente en la dirección radial positiva (con segunda coordenada positiva) miden más que los que apuntan en el sentido opuesto (segunda coordenada negativa), y bajo nuestras hipótesis no parece sensato suponer que la longitud depende de hacia dónde miremos.

Según vimos en la segunda sección del tercer capítulo, esto lleva a considerar el tensor energía-momento (véase también un modelo simplificado al final del siguiente párrafo)

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\delta_0^\mu \delta_0^\nu + pg^{\mu\nu}$$

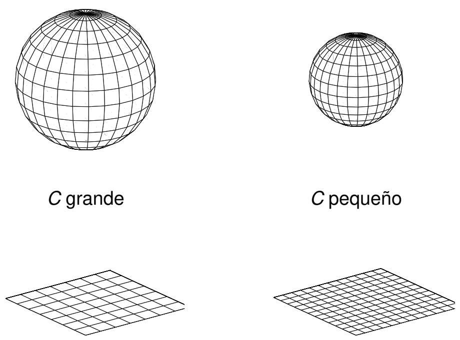
donde ρ y p son funciones no negativas que representan la densidad y la presión.

Para ser coherentes con el modelo de Universo como nube de polvo sin energía internas ni movimientos locales caóticos, debemos escoger $p = 0$, pero se cree que en sus orígenes el Universo era más bien un mar de radiación que ejercía una presión no nula, con lo cual hay que admitir esta modificación para tiempos muy lejanos. En general $p = 0$ corresponde a un universo dominado por la masa mientras que p grande corresponde a uno dominado por la radiación y el estado actual de nuestro Universo responde, según todos los indicios, al primer modelo. Esto da pie al siguiente argumento simplificado que no requiere más que la definición del tensor energía-momento: Si según nuestras mediciones nuestra galaxia y sus alrededores están en reposo, el cuadrimomento correspondiente será de la forma $\vec{P} = (m, 0, 0, 0)$ y como $T^{\alpha\beta}$ es la densidad de la componente α de $\vec{P}$ para x^β constante, se debe tener

$$\big(T^{\alpha\beta}\big) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{esto es,}\ \ T^{\alpha\beta} = \rho\,\delta_0^\alpha \delta_0^\beta$$

donde ρ es la densidad de masa.

Es interesante discutir el significado de $C(t)$: si es muy pequeño quiere decir que la longitud de arco apenas se incrementa al ir de unos puntos (espaciales) a otros, es decir, que el Universo está espacialmente muy contraído mientras que si $C(t)$ es grande ocurrirá lo contrario, lo cual refleja el hecho de que $C^2(t)$ sea esencialmente el inverso de la curvatura.



De hecho si $k = 1$,

$$C^2(t)\Big(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\Big)$$

es la métrica de una (hiper-)superficie esférica tridimensional, un dilatado de S^3, de radio $C(t)/\sqrt{6}$. Es decir, si suponemos, con Einstein que el Universo es, en cuanto a espacio, una esfera, $C(t)$ nos indica su radio en función del tiempo salvo un factor constante. Aunque para $k = 0$ y $k = -1$ se obtengan métricas asociadas de forma natural a variedades no acotadas ($\mathbb{R}^3$ y cierta "seudoesfera", véase [**Hu-To**] Cap. 23), $C(t)$ sigue indicando el tamaño entendido como las unidades de medida que usan los habitantes de estas variedades riemannianas a lo largo del tiempo con esta elección de coordenadas.

Según todos los indicios astronómicos, actualmente $C'(t) > 0$, así que vivimos, en el sentido explicado anteriormente, en un Universo en expansión. La idea cualitativa queda bien representada con el conocido ejemplo de un globo que se hincha. Aunque los puntos del globo no tienen movimiento propio dentro de su superficie, desde cada uno de ellos se observa que el resto se alejan en todas las direcciones[uff].

Una de las consecuencias de la expansión del Universo, y su mayor indicio, es el corrimiento hacia el rojo que analizaremos una vez más gracias a nuestras atentas y siempre bien dispuestas observadoras, Ana y Blanca, ahora separadas por muchos años luz de distancia.

Supongamos que Ana, que consideraremos situada en el origen ($r = 0$), enciende una linterna en el instante t_1^A y la vuelve a encender en t_2^A. Blanca, que está en una galaxia situada en $(r_0, 0, 0)$, detecta estos dos destellos, que viajan por geodésicas nulas, en los tiempos t_1^B y t_2^B. Aunque exista un tiempo cósmico absoluto, como la métrica depende del tiempo, mientras la luz llega a Blanca hay una deformación del espacio-tiempo que provoca que detecte un intervalo de tiempo distinto de $t_2^A - t_1^A$ (en términos clásicos diríamos que si el Universo se expande, el segundo destello tarda un poco más que el primero porque la galaxia de Blanca se ha alejado). La simetría de la situación sugiere que las líneas de universo de los rayos luminosos que detecta Blanca son radiales cumpliendo $\theta = \varphi = 0$. Por ser geodésicas nulas, verifican

$$-\Big(\frac{dt}{d\lambda}\Big)^2 + C^2(t)\frac{(dr/d\lambda)^2}{1-kr^2} = 0.$$

y separando variables

$$\frac{dr/d\lambda}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{dt/d\lambda}{C(t)}.$$

[uff] Si pequeños insectos miopes vivieran en la superficie del globo, nos podrían decir (bueno, los insectos no hablan, a no ser que sean de Walt Disney) que no se mueven y que siguen manteniendo su misma latitud y longitud pero, por razones inexplicables, sus congéneres están cada vez más lejos. Un insecto muy listo podría medir la curvatura de Gauss del globo (sin salir de él) y decirnos que lo que pasa es que la geometría se está deformando con el tiempo.

Integrando estas ecuaciones e imponiendo que el primer destello de la linterna de Ana parte de $r = 0$ en t_1^A y el segundo en t_2^A, se tiene que sus líneas de universo satisfacen respectivamente

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_1^A}^t \frac{dt}{C(t)} \qquad \text{y} \qquad \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_2^A}^t \frac{dt}{C(t)}.$$

Cuando lleguen a Blanca, $r = r_0$, en los tiempos t_1^B y t_2^B, se debe cumplir por tanto

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_1^A}^{t_1^B} \frac{dt}{C(t)} \qquad \text{y} \qquad \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_2^A}^{t_2^B} \frac{dt}{C(t)}.$$

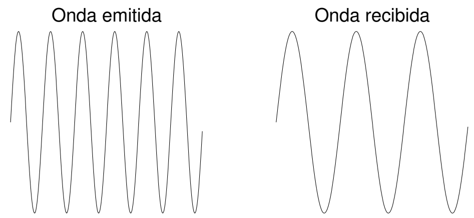
Restando estas dos últimas igualdades y utilizando las propiedades básicas de la integral (nótese que $\int_a^b - \int_c^d = \int_a^c - \int_b^d$), se deduce

$$\int_{t_1^A}^{t_2^A} \frac{dt}{C(t)} = \int_{t_1^B}^{t_2^B} \frac{dt}{C(t)}.$$

Si los intervalos de tiempo $\Delta t_1^A = t_2^A - t_1^A$, $\Delta t_1^B = t_2^B - t_1^B$ son pequeños, entonces se tiene

$$\frac{\Delta t_1^A}{\Delta t_1^B} \approx \frac{C(t_1^A)}{C(t_1^B)}.$$

En un universo en expansión, por ser $t_1^A < t_1^B$, se cumplirá la desigualdad $\Delta t_1^A < \Delta t_1^B$ y el efecto será más acusado cuanto mayor sea la velocidad de la expansión. Si consideramos la luz como una onda entonces su periodo de oscilación es pequeñísimo (del orden de $10^{-15}s$) con lo cual no hace falta que Ana encienda y apague su linterna muy rápido, sino que la deje encendida y que Blanca observe la variación de la frecuencia.



Por consiguiente, si ω_A es la frecuencia de la luz emitida medida por Ana y ω_B es la de la luz recibida medida por Blanca, se tiene (recuérdese que frecuencia$=2\pi/$periodo)

$$\omega_B < \omega_A.$$

Esto es, la luz que nos llega de la galaxias más lejanas parece tener frecuencia más pequeña, éste es el famoso corrimiento hacia el rojo en Cosmología (recuérdese que la luz del espectro visible con menor frecuencia corresponde al color rojo), y desde la perspectiva clásica puede entenderse como una consecuecia del efecto Doppler[uff] (véase [**Al-Fi**] §18.13).

Concluimos esta sección introduciendo dos importantes magnitudes asociadas a la dinámica del Universo.

Si t_0 indica el tiempo actual, podemos entender $C(t)/C(t_0)$ como la proporción en la que se modifican las distancias en cada instante t con respecto a la actualidad. Así pues, suponiendo (erróneamente) que la luz viaja instantáneamente, si vemos una galaxia a distancia D, dentro de ϵ segundos nos parecerá que está a distancia $C(t_0+\epsilon)D/C(t_0)$, esto es, que tiene una velocidad $C'(t_0)D/C(t_0)$ con respecto a nosotros. Por consiguiente, dividiendo la velocidad de las galaxias entre sus distancias debemos obtener una constante, llamada constante de Hubble

$$H_0 = \frac{C'(t_0)}{C(t_0)}$$

que desempeña, como veremos más adelante, un papel importantísimo en Cosmología (véase [**Sp**] para una introducción divulgativa). En principio es observable astronómicamente[clp] pero esto no es fácil por diversas razones, entre otras porque el Universo se empeña en no ajustarse perfectamente a nuestras hipótesis matemáticas (las galaxias se agrupan en cúmulos alterando la homogeneidad, etc.); además hay que tener en cuenta que vemos las galaxias gracias a la luz o radiación que emiten y ésta viaja "sólo" a $300\,000 km/s$ y no instantáneamente como hemos supuesto, con lo cual tenemos un idea muy antigua de las galaxias más lejanas y la relación entre velocidades y distancias aparentes no es exactamente H_0 sino que requiere algunas correcciones.

El nombre de *constante* de Hubble no deja de ser irónico porque desde que Hubble la introdujo en 1929 se le han asignado muchísimos valores. Aunque no hay total acuerdo

[uff] Como veremos a continuación, a nuestro parecer las galaxias más lejanas tienen mayor velocidad y el efecto Doppler es algo sencillo como decir que si Pulgarcito va dejando migas de pan para poder volver a casa, sabremos que ha echado a correr cuando las migas estén más espaciadas. De la misma forma, las ondas de luz de las galaxias veloces están más estiradas, presentando longitudes de onda más largas.

[clp] La distancia a las galaxias se mide sobre todo a partir de cierto tipo de estrellas, las cefeidas, que presentan variaciones conocidas de brillo. Esencialmente cuanto más pálidas las vemos más lejos estará la galaxia que las contiene, y la velocidad se mide gracias al corrimiento hacia el rojo. (Véase [**Mi-Th-Wh**] Box 29.4 para una versión más concreta y menos simplista de los problemas prácticos que surgen al medir H_0).

entre los cosmólogos, mencionaremos aquí el valor $H_0 \approx 2'5 \cdot 10^{-18} s^{-1}$ pero no sería imposible que mañana apareciera en los periódicos que se ha "demostrado" que es muy distinta de esta cantidad (el valor inicialmente medido por Hubble fue $1'7 \cdot 10^{-17} s^{-1}$ y hace 20 años se consideraba $1'8 \cdot 10^{-18} s^{-1}$ como un valor fiable). Una constante de Hubble grande significa una expansión rápida lo que se traduce, según veremos, en un *big-bang* cercano en el tiempo.

El valor actual de la curvatura escalar, R, o incluso de k no es asequible directamente por experimentos astronómicos ya que para estudiar cuánto difiere el Universo de ser euclídeo deberíamos hacer experimentos a una escala comparable con el "radio" del Universo, en otro caso sería como intentar medir el radio de la Tierra estudiando lo curvado que está el suelo de nuestra habitación. Sin embargo, como veremos en la próxima sección, modelos sencillos permiten mediciones indirectas a través de fórmulas que expresan R y k en términos de H_0 y de otra cantidad que debería ser observable astronómicamente (véase [**We**] y [**Mi-Th-Wh**] §29.4), el parámetro de deceleración

$$q_0 = -\frac{C(t_0)C''(t_0)}{(C'(t_0))^2}.$$

Para ser realista, a diferencia de lo que ocurre con H_0, no hay acuerdo ni siquiera acerca del orden del magnitud de q_0. En [**Fo-Ni**] se menciona con reticencias $q_0 = 0'025$ y actualmente hay razones experimentales para creer que $k = 0$, lo que introducido en los modelos de la próxima sección implicaría $q_0 = 0'5$.

Si uno quiere ser escéptico, incluso si el Universo fuera "pequeño" y nuestros telescopios muy potentes o nuestras naves espaciales muy rápidas, sólo podríamos obtener información de una minúscula porción del espacio-tiempo, ya que desde el supuesto nacimiento del Universo sólo ha dado tiempo a que nos lleguen geodésicas nulas (y por tanto información) de una pequeña región (llamada universo observable). Sin embargo algunos hechos experimentales, como la radiación de fondo, sugieren que aunque nuestros modelos cosmológicos sean burdos, tienen algo de verdad.

Problemas 5.1

→**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Una esfera no es isótropa porque, por ejemplo, al dar una vuelta al mundo a velocidad constante partiendo de Madrid, recorriendo su meridiano tardamos más que recorriendo su paralelo, así que podemos distinguir direcciones. ¿Dónde está el error en este razonamiento?

ii) ¿Por qué hemos supuesto implícitamente que k no depende de t?

iii) ¿Por qué no contradice la homogenidad e isotropía que los coeficientes de la métrica o los símbolos de Christoffel dependan de (r, θ, φ), esto es, de la posición espacial?

iv) Si el Universo es una variedad y matemáticamente no necesitamos que haya nada en el "exterior" (que sea subvariedad), ¿dónde se expande?

v) ¿Por qué no contradice la relatividad especial y general que exista un tiempo cósmico que coincida con el tiempo propio de todas las galaxias?

vi) ¿Cómo puede ser que exista un tiempo cósmico, si la duración del periodo de una onda de luz es diferente para observadores en distintas galaxias?

vii) ¿Cómo se puede decir que el Universo se expande si hemos supuesto que para cada galaxia $(r, \theta, \varphi) = (r_0, \theta_0, \varphi_0) =$ cte?

viii) A veces en Cosmología se exige que no haya geodésicas temporales cerradas, esto es, que unan un punto (x^0, x^1, x^2, x^3) consigo mismo. ¿Qué tendrían de malo? (*Indicación*: Considérese qué pasaría con la coordenada x^0 a lo largo de la línea de universo correspondiente).

$\rightarrow$**2)** Comprobar que $t = \tau$, $(r, \theta, \varphi) = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ definen realmente geodésicas futuras temporales de la métrica de Robertson-Walker.

3) Explicar por qué el inverso de la constante de Hubble tiene unidades de tiempo mientras que $C(t)$ es adimensional. Estudiar qué unidades habría que asignar a k.

4) Encontrar el error en el siguiente argumento contradictorio: Si el Universo tiene curvatura positiva, para que la métrica de Robertson-Walker corresponda a un espacio-tiempo se debe tener $r < 1$ (en otro caso la métrica no sería de género 1) pero está claro que el Universo mide más de un metro. (*Indicación*: Comenzar resolviendo primero el ejercicio anterior).

5) Describir cómo se podría medir astronómicamente q_0 aunque llevar el experimento a la práctica sea complicado.

6) Escribir las ecuaciones que definen las geodésicas para la métrica de Robertson-Walker con $k = 0$.

7) Dada la métrica

$$dl^2 = dr^2 + \operatorname{senh}^2 r\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2).$$

a) Demostrar que los símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\Gamma^1_{22} = -\operatorname{senh} r\,\cosh r, \quad \Gamma^1_{33} = -\operatorname{senh} r\,\cosh r\,\operatorname{sen}^2\theta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\cosh r}{\operatorname{senh} r},$$

$$\Gamma^2_{33} = -\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta, \qquad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{\cosh r}{\operatorname{senh} r}, \qquad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

b) Hallar las componentes del tensor de Ricci. (*Indicación*: Gracias a un argumento como el empleado para la métrica de Schwarzschild, sin necesidad de hacer los cálculos podemos dar por hecho que $R_{ij} = 0$ para $i \neq j$).

c) Comprobar que estamos en las hipótesis de la Proposición 5.1.1 y hallar un cambio de coordenadas que reduzca la métrica a una de las del Corolario 5.1.2.

8) Comprobar que $A = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \operatorname{senh} r$, $B = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{senh} r$, $C = \cos\theta \operatorname{senh} r$, $D = \cosh r$ es una parametrización del hiperboloide $D^2 - A^2 - B^2 - C^2 = 1$. Demostrar que la métrica hiperbólica

$$dl^2 = -dD^2 + dA^2 + dB^2 + dC^2$$

induce la métrica del ejercicio anterior.

→**9)** Hallar las ecuaciones diferenciales que definen las líneas de universo radiales (con θ y φ constantes).

10) El corrimiento hacia el rojo en Cosmología se puede expresar mediante la fórmula $\omega/\omega_e = C(t_e)/C(t)$ donde ω_e y t_e son las frecuencias y el tiempo en que emite su luz una galaxia, y ω y t son los datos correspondientes que recibimos. Explicar por qué para galaxias no muy distantes esta fórmula es aproximadamente igual que la del efecto Doppler clásico que afirma que para la luz emitida por un objeto que se aleja con velocidad v, se cumple $\omega = (1 - v/c)\omega_e$.

11) Demostrar que considerando la métrica de Robertson-Walker con $k = -1$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, para cada t fijo el Universo tiene volumen infinito. Hallar el volumen en función de $C(t)$ en el caso $k = 1$ con θ y φ como antes y $r \in [0, 1)$. (*Indicación*: Recuérdese que el diferencial de volumen en una variedad es $d\Omega = \sqrt{|g|}\, dx^1 \dots dx^m$).

→**12)** Suponiendo $C(t) = t^{2/3}$, estudiar cuánto tarda aproximadamente un rayo de luz que parte en $t = 1$, en ir de una galaxia situada en $(r, \theta, \varphi) = (0, 0, 0)$ a otra situada en $(1/2, 0, 0)$. Discutir el resultado en términos de k.

→**13)** Según el modelo que introdujo inicialmente Einstein (más tarde cambió de opinión), la métrica global del Universo es

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

a) Calcular explícitamente la geodésica espacial que une $r = r_0$ con $r = r_1$ mientras que las otras variables permanecen constantes: $t = t_0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$. Estudiar cuánto mide dicha geodésica. (*Indicación*: Lo más rápido para calcularla es usar el Lema 2.2.4).

b) Repetir lo mismo para la métrica que se piensa correcta en la actualidad

$$ds^2 = -dt^2 + t^{4/3}\big(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\big).$$

c) A partir de los resultados anteriores explicar qué significa que el modelo de Einstein representa un universo estacionario y el modelo actual un universo en expansión.

→**14)** Consideremos la métrica introducida por Einstein del ejercicio anterior.

a) Demostrar que $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ si alguno de sus índices es nulo. (*Indicación*: Lo más sencillo es usar directamente la fórmula que define los símbolos de Christoffel).

b) Comprobar que $R^{00} = 0$.

c) Partiendo del tensor de energía momento $T^{\mu\nu} = (\rho + p)\delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0} + pg^{\mu\nu}$, comprobar que $T^{00} - \frac{1}{2}Tg^{00} = \frac{1}{2}(\rho + 3p)$ y explicar por qué el modelo de Einstein no es coherente con las ecuaciones de campo.

Historias en titulares:

La bola

Un monje polaco, Nicolás Copérnico, tiene una nueva visión del movimiento de los planetas. También ha hecho algunas predicciones astrológicas y en cosmología sugiere un modelo casi pitagórico, concretamente ha escrito: "En primer lugar debemos observar que el universo es esférico. Esto es o bien porque esa figura es la más perfecta, por no ser articulada sino entera y completa por sí misma; o porque es la de mayor capacidad y por consiguiente la mejor adaptada para contener y preservar todas las cosas".

1543

Figura y Genio

El físico y matemático A.A. Friedmann ha encontrado soluciones homogéneas e isótropas de las ecuaciones de campo que corresponden a universos en expansión. Antes de publicarlas, Friedmann le envió una copia a Einstein quien no replicó, pero cuando aparecieron impresas el año pasado en el *Zeitschrift für Physik*, Einstein se apresuró a escribir una nota al editor criticándolas y señalando un error. Ahora, ante la insistencia de un colega, acaba de escribir otra nota en la que se retracta de su objeción.

1923

A Fondo

El satélite COBE (acróstico para *COsmic Background Explorer*) enviado por la NASA, ha detectado unas pequeñas anisotropías en la radiación de fondo que corresponden a variaciones de temperatura del orden de las cien millonésimas de grado. Se sospecha que estas insignificantes variaciones tienen relación con la formación de las galaxias. Éste es el mayor avance en el estudio de la radiación de fondo desde que A.A. Penzias y R.W. Wilson la detectasen.

1992

¿Qué hay que saberse?:

Muy poco, simplemente hay que creerse la métrica asignada al Universo y su significado.

• Suponiendo que hay un "tiempo global" y que el Universo espacialmente es igual en todos los puntos y en todas las direcciones, se llega a la métrica de Robertson-Walker

$$-dt^2 + C^2(t)\Big(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\Big)$$

donde $k \in \{-1, 0, 1\}$ indica el signo de la curvatura escalar y $C(t)$ cómo evolucionan las distancias con el tiempo.

• Una función $C(t)$ creciente se traduce en un Universo en expansión en el que se puede percibir un corrimiento hacia el rojo de la luz que llega de fuentes lejanas.

¿Para qué sirve?:

Para nada. En la siguiente sección veremos algunos cálculos sorprendentes con el modelo aquí estudiado pero, por ahora, la supuesta métrica del Universo y su tensor de energía-momento son una declaración de principios basada en observaciones astronómicas y en nuestros prejuicios. Sin embargo es indudable que el tema es *útil* en un sentido amplio, porque plantea preguntas intrigantes y despierta mucho interés, incluso entre el gran público. Prueba de ello es la considerable proporción asignada a la Cosmología y, en particular, a los modelos de Universo en los libros y revistas de divulgación científica.

5.2. El modelo estándar del Universo

Con las hipótesis de la sección anterior, el estudio de la dinámica del Universo se reduce a resolver las ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu},$$

que emplearemos en la forma no simétrica

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}), \tag{5.2}$$

donde la métrica es la de Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + C^2(t)\big(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\big) \tag{5.3}$$

y el tensor energía-momento es, en su forma covariante[uff],

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\delta^0_\mu \delta^0_\nu + p g_{\mu\nu}. \tag{5.4}$$

En principio para resolver (5.2) debemos hallar $R_{\mu\nu}$ llevando a cabo unos cálculos tan largos y tediosos como en el caso de la solución de Schwarzschild, sin embargo con un poco de ingenio y aprovechando lo hecho en el capítulo anterior podemos reducir enormemente el trabajo.

Prácticamente los únicos símbolos de Christoffel que necesitaremos son aquellos que involucran la variable tiempo, que son especialmente sencillos.

Lema 5.2.1 : *Con la métrica* (5.3) *se cumple*

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha=\beta=0 \\ \\ \dfrac{C'}{C} g_{\alpha\beta} & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \Gamma^\beta_{0\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta=0 \\ \\ \dfrac{C'}{C} \delta^\beta_\alpha & \text{en otro caso} \end{cases}$$

<u>Dem.</u>: Como $g_{\mu\nu}$ es diagonal, $g^{\mu\nu}$ también lo es y por tanto

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{0\lambda}(g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}) = \frac{1}{2} g^{00}(g_{\alpha 0,\beta} + g_{0\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,0}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,0}.$$

La última igualdad se justifica porque al ser $g_{\mu 0}$ constante (0 ó -1) sus derivadas parciales se anulan. Es elemental comprobar que $\frac{1}{2} g_{\alpha\beta,0}$ coincide con la fórmula del enunciado.

[uff] Recuérdese que $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\mu\beta} T^{\alpha\beta}$.

Por el mismo argumento

$$\Gamma^{\beta}_{0\alpha} = \frac{1}{2}g^{\lambda\beta}(g_{\alpha\lambda,0} + g_{\lambda 0,\alpha} - g_{\alpha 0,\lambda}) = \frac{1}{2}g^{\lambda\beta}g_{\alpha\lambda,0}.$$

De nuevo es fácil comprobar (nótese que sólo hay que considerar $\lambda = \alpha = \beta$) que el valor de esta expresión coincide con el enunciado. ■

A continuación calcularemos el valor de los dos primeros elementos diagonales de $R_{\mu\nu}$, los cuales serán suficientes para extraer toda la información contenida en las ecuaciones de campo (5.2).

Lema 5.2.2: *Si $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci para la métrica* (5.3) *entonces*

$$R_{00} = -3\frac{C''}{C} \qquad y \qquad R_{11} = \frac{CC'' + 2(C')^2 + 2k}{1 - kr^2}.$$

<u>DEM.</u>: Según la definición del tensor de Ricci y el lema anterior

$$R_{00} = \Gamma^{\alpha}_{00,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{0\alpha,0} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{00} - \Gamma^{\alpha}_{0\lambda}\Gamma^{\lambda}_{0\alpha} = 0 - 3\big(\frac{C'}{C}\big)' + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}\cdot 0 - 3\big(\frac{C'}{C}\big)^2 = -3\frac{C''}{C}.$$

Para la métrica de la Proposición 5.1.1, como vimos en su demostración, $R_{11} = B'/rB$ donde $B(r) = (1 - Rr^2/6)^{-1}$, esto es, $R_{11} = \frac{R}{3}(1 - Rr^2/6)^{-1}$. Llamemos $\widetilde{R}_{11}$ a la componente correspondiente del tensor de Ricci para la métrica del Corolario 5.1.2. Recuérdese que ésta métrica se deducía de la de la Proposición 5.1.1 tras el cambio $r \mapsto Cr$ con $C = \sqrt{6k/R}$ si $k = \operatorname{sgn} R \neq 0$ y $C > 0$ arbitrario si $k = 0$. La tensorialidad implica

$$\widetilde{R}_{11} = \frac{\partial(Cr)}{\partial r}\frac{\partial(Cr)}{\partial r} \cdot \frac{R}{3}(1 - RC^2r^2/6)^{-1} = \frac{2k}{1 - kr^2}. \tag{5.5}$$

La métrica del Corolario 5.1.2 difiere de (5.3) únicamente en que no contiene la coordenada tiempo. Teniendo en cuenta que $g^{0\lambda} = 0$ si $\lambda \neq 0$, se tiene que R_{11} para (5.3), coincide con $\widetilde{R}_{11}$ después de añadir los símbolos de Christoffel que involucran la coordenada tiempo. Esto es,

$$\begin{aligned} R_{11} =& \Gamma^{\alpha}_{11,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{1\alpha,1} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{11} - \Gamma^{\alpha}_{1\lambda}\Gamma^{\lambda}_{1\alpha} \qquad \text{(por definición)} \\ =& \widetilde{R}_{11} + \Gamma^{0}_{11,0} - \Gamma^{0}_{10,1} + \big(\Gamma^{0}_{0\lambda}\Gamma^{\lambda}_{11} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0}\Gamma^{0}_{11}\big) - \big(\Gamma^{0}_{1\lambda}\Gamma^{\lambda}_{10} + \Gamma^{\alpha}_{10}\Gamma^{0}_{1\alpha}\big) \end{aligned}$$

(nótese que en los paréntesis Γ^0_{00} y Γ^0_{10} aparecen dos veces pero esto es indiferente porque ambos se anulan). El lema anterior y la última igualdad implican

$$R_{11} - \widetilde{R}_{11} = \Gamma^0_{11,0} + \Gamma^\alpha_{\alpha 0}\Gamma^0_{11} - 2\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{10} = \frac{(CC')'}{1-kr^2} + \frac{3C'}{C}\frac{CC'}{1-kr^2} - 2\frac{CC'}{1-kr^2}\frac{C'}{C},$$

que operando y sustituyendo en (5.5), permite obtener el valor deseado de R_{11}. ■

Tras estos cálculos podemos deducir de las ecuaciones de campo un par de ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas.

Teorema 5.2.3 : *Las ecuaciones de campo* (5.2) *con la métrica* (5.3) *y el tensor energía-momento* (5.4), *implican que ρ y p sólo dependen de t, cumpliéndose las ecuaciones*

$$(C')^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho C^2 \qquad y \qquad \rho' + (\rho + p)\frac{3C'}{C} = 0.$$

Nota: A la primera ecuación se la llama ecuación de Friedmann. La segunda es una ley de conservación que refleja el hecho de que $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$.

DEM.: De (5.4) se deduce

$$T^\lambda_\mu = (\rho + p)\delta^0_\mu\delta^0_\nu g^{\nu\lambda} + p\delta^\lambda_\mu$$

y por tanto

$$T = T^\lambda_\lambda = 3p - \rho.$$

También se tiene

$$T_{00} = \rho + p + pg_{00} = \rho, \qquad T_{11} = pg_{11} = \frac{C^2 p}{1-kr^2}.$$

Así pues el lema anterior permite escribir (5.2) para $\mu = \nu = 0$ como

$$-\frac{3C''}{C} = 4\pi G(\rho + 3p) \tag{5.6}$$

y para $\mu = \nu = 1$ como

$$CC'' + 2(C')^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)C^2. \tag{5.7}$$

Multiplicando (5.6) por $C^2/3$ y sumando (5.7) se obtiene la ecuación de Friedmann, la cual implica que ρ sólo depende de t y por (5.6), lo mismo ocurre con p (la independencia de ρ y p de la posición se puede considerar una consecuencia de la homogeneidad). Derivando la ecuación de Friedmann y dividiendo por $2CC'/3$, se sigue

$$\frac{3C''}{C} = 4\pi G(\rho' \frac{C}{C'} + 2\rho),$$

que sumada con (5.6) produce la segunda ecuación del enunciado. ■

Nótese que sólo tienen sentido las soluciones positivas de las ecuaciones del teorema anterior y que (5.6) implica que C es cóncava, por tanto C no puede prolongarse para todo tiempo (porque no existen funciones positivas y cóncavas definidas en todo $\mathbb{R}$). Esto se traduce en que, con este modelo, el Universo no es eterno. Concretamente debe existir un valor límite del tiempo en el que C tiende a cero y por tanto el Universo está infinitamente contraído. Simplemente para normalizar llamaremos a ese instante $t = 0$, es decir, impondremos $C(0) = 0$. Como $H_0 > 0$, en la actualidad C está creciendo y podemos situar el instante $t = 0$ en el pasado. Así pues, con esta notación, el tiempo actual es la edad del Universo.

Como ya hemos comentado, nuestras hipótesis sugieren que $p = 0$ (no hay presión debida a radiación libre: el Universo está dominado por masas sin movimiento propio), por consiguiente la segunda ecuación del teorema anterior se puede escribir como $(\rho C^3)' = 0$, es decir, ρC^3 es constante a lo largo del tiempo[clp]. Escribiremos

$$\lambda_0 = \frac{4\pi G}{3}\rho_0 C_0^3$$

donde ρ_0 y C_0 son los valores de ρ y C en un instante dado, digamos en la actualidad (en principio λ_0 no es medible astronómicamente de forma directa, aunque más adelante veremos cómo aproximar indirectamente su valor).

Una vez que hemos escrito "las ecuaciones del Universo" podemos pasar al sencillo ejercicio de resolverlas.

Proposición 5.2.4: *Si $p = 0$ las soluciones con $C(0) = 0$ de las ecuaciones del teorema anterior son (las dos últimas están definidas en forma paramétrica):*

a) Si $k = 0$

$$C = (9\lambda_0 t^2/2)^{1/3}.$$

[clp] Desde una burda perspectiva clásica, si C es como el radio y ρ es la densidad, ρC^3 es proporcional a la masa total, y $(\rho C^3)'=0$ sólo indica que ésta permanece constante.

b) *Si* $k=1$

$$\begin{cases} C = & \lambda_0(1-\cos v) \\ t = & \lambda_0(v-\operatorname{sen} v). \end{cases}$$

c) *Si* $k=-1$

$$\begin{cases} C = & \lambda_0(\cosh v-1) \\ t = & \lambda_0(\operatorname{senh} v-v). \end{cases}$$

<u>Dem.</u>: Después de usar que ρC^3 es constante, la ecuación de Friedmann es muy simple, concretamente se obtiene

$$(C')^2+k=\frac{2\lambda_0}{C}. \tag{5.8}$$

a) Si $k=0$

$$C^{1/2}C'=(2\lambda_0)^{1/2} \ \Rightarrow\ \frac{2}{3}C^{3/2}=(2\lambda_0)^{1/2}t.$$

b) Si $k=1$

$$C'\sqrt{\frac{C}{2\lambda_0-C}}=1 \ \Rightarrow\ \int_0^C \sqrt{\frac{u}{2\lambda_0-u}}du=t.$$

Hay varias formas de calcular la integral, pero lo más directo es el ingenioso cambio de variable $u=\lambda_0(1-\cos v)$

$$\int\sqrt{\frac{u}{2\lambda_0-u}}du \underset{u=\lambda_0(1-\cos v)}{\longrightarrow} \int\lambda_0\sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}}\operatorname{sen} v dv=\int\lambda_0\sqrt{\frac{(1-\cos v)^2}{1-\cos^2 v}}\operatorname{sen} v dv$$

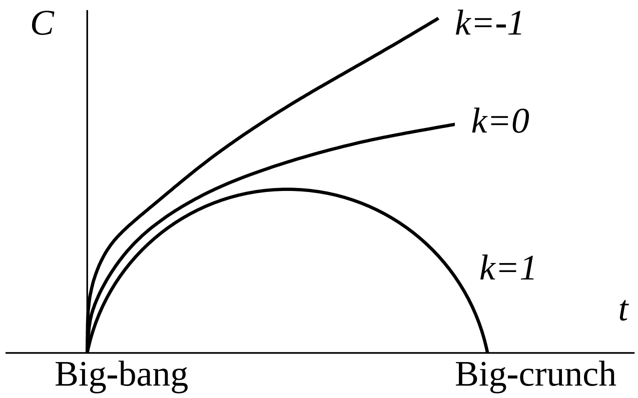
obteniéndose $t=\lambda_0(v-\operatorname{sen} v)$ y al deshacer el cambio, $C=\lambda_0(1-\cos v)$.

c) Si $k=-1$

$$C'\sqrt{\frac{C}{2\lambda_0+C}}=1 \ \Rightarrow\ \int_0^C \sqrt{\frac{u}{2\lambda_0+u}}du=t.$$

Ahora el cambio de variable ingenioso es $u = \lambda_0(\cosh v - 1)$ y la integral se trata como antes usando que $\cosh^2 v - 1 = \operatorname{senh}^2 v$. ■

El gráfico de estas soluciones es bastante ilustrativo. En el caso $k = 0$ tras la singularidad inicial en $t = 0$, llamada *big-bang* (gran explosión), C crece indefinidamente y como $C'(t) \to 0$ esto corresponde a una expansión eterna pero cada vez más lenta. Si $k = 1$, C crece desde la singularidad inicial hasta un valor máximo y después decrece tendiendo a cero cuando $t \to 2\pi\lambda_0$, a esta segunda singularidad situada en el futuro se le llama *big-crunch* (gran colapso). Finalmente, para $k = -1$ se tiene de nuevo un Universo en expansión indefinida pero en este caso $C'(t)$ tiende a estabilizarse a un valor no nulo y positivo (de hecho $C' \to 1$).



Recordemos que H_0 y q_0 son constantes susceptibles de mediciones astronómicas (quizá no muy fiables) definidas como

$$H_0 = \frac{C'(t_0)}{C_0}, \qquad q_0 = -\frac{C_0 C''(t_0)}{(C'(t_0))^2}$$

donde t_0 es el tiempo actual (la edad del Universo). El valor de λ_0 y el de C en la actualidad, que llamaremos como antes C_0, se pueden expresar en función de estas constantes.

Lema 5.2.5 : *Con las definiciones anteriores se cumple*

$$a) \quad \lambda_0 = q_0 H_0^2 C_0^3, \qquad\qquad b) \quad \frac{k}{C_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2.$$

<u>DEM.</u>: Derivando en (5.8) y despejando λ_0

$$\lambda_0 = -C''C^2 = -\frac{CC''}{(C')^2} \cdot \left(\frac{C'}{C}\right)^2 \cdot C^3$$

que al sustituir $t = t_0$ prueba a).

Combinando a) y (5.8)

$$\left(\frac{C'}{C}\right)^2 + \frac{k}{C_0^2} = 2q_0 H_0^2 \frac{C_0^3}{C^3}$$

y, de nuevo, basta sustituir $t = t_0$ para obtener b). ■

Veamos ahora una de las aplicaciones más sorprendentes de este modelo: la estimación de la edad del Universo.

Supongamos primero $k = 0$ (esta hipótesis ha cobrado fuerza en la actualidad) entonces según el lema anterior debe ser $q_0 = 1/2$ y $\lambda_0 = H_0^2 C_0^3/2$. Sustituyendo en la solución correspondiente a $k = 0$ con $t = t_0$,

$$C_0 = (9\lambda_0 t_0^2/2)^{1/3} \Rightarrow C_0^3 = \frac{9}{4} H_0^2 C_0^3 t_0^2 \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3H_0}.$$

Así que con el valor admitido en la actualidad de H_0, hoy estamos en el segundo $2/(3H_0) = 2'67 \cdot 10^{17}$ de vida del Universo, o en unidades más manejables, $t_0 = 8'45 \cdot 10^9$ años.

Si utilizamos el valor de q_0 que hemos mencionado antes, $q_0 = 0'025$, se tiene que $k = -1$, $C_0 = 4'1 \cdot 10^{17}$ y $\lambda_0 = 1'08 \cdot 10^{16}$. Sustituyendo como antes $t = t_0$ en la correspondiente solución se tiene

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \lambda_0(\cosh v - 1) \\ t_0 &= \lambda_0(\operatorname{senh} v - v) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} v &= 4'356 \\ t_0 &= 3'74 \cdot 10^{17} \end{aligned}\right.$$

esto es, $t_0 = 1'18 \cdot 10^{10}$ años que es del mismo orden de magnitud que antes.

Hay que dejar claro que incluso si creemos fielmente todas nuestras hipótesis debemos dotar al modelo de ciertas modificaciones para que represente bien toda la historia pasada del Universo. Así en los instantes posteriores al *big-bang* el Universo estaría tan contraído que la materia no podría existir en el sentido habitual y se puede hacer mucha Física Cuántica y de partículas para teorizar sobre esta situación (véase **[We]** Cap. 15). Hay quien dice que se conoce bien lo que ocurrió a partir de 10^{-36} segundos después del *big-bang*[clp]. Sin llegar a esos extremos parece lógico pensar, como mencionamos en la sección anterior, que la radiación tuvo gran importancia, más que la masa, en un Universo joven

[clp] Es un ejercicio de fe creer que una sencilla EDO de variables separables regule el Universo pero creer que los modelos reflejan la realidad hasta 10^{-36} segundos raya la insensatez o la tontería. Más bien habría que decir que se dispone de modelos que no se estropean fatalmente antes de dicho tiempo.

en formación. Se puede probar que la radiación ejerce una presión que corresponde a escribir $p = \rho/3$ (la luz de una linterna ejerce una pequeñísima presión sobre el muro al que alumbra, recuérdese el efecto Compton). Si sustituimos esto en las ecuaciones, las soluciones no cambian cualitativamente pero sí hay que ajustar las constantes en esos primeros momentos del Universo.

Hay varios hechos experimentales que apoyan los modelos aquí planteados una vez perfeccionados con los difíciles análisis de la situación en los comienzos del Universo [**We**]. Por ejemplo, el corrimiento hacia el rojo está bien contrastado, no hay contradicción entre la edad de los minerales terrestres o extraterrestres conocidos (de meteoritos y otros planetas) y la edad estimada del Universo, y la profusión de elementos ligeros (hidrógeno, helio y litio) está de acuerdo con las condiciones supuestas en los primeros minutos tras el *big-bang*. Por otra parte, todavía hay cosas que no se entienden bien, por ejemplo la Física de los momentos inmediatamente posteriores al *big-bang*, los mecanismos que han hecho que las galaxias se hayan formado "tan rápido" o por qué la densidad de materia medida astronómicamente y la predicha por los modelos son tan dispares (se llama *materia oscura* a la masa que falta).

Desde 1998 además hay otro problema del que preocuparse y es que, si no hay error en las mediciones (realizadas a través del corrimiento hacia el rojo de objetos muy distantes), el Universo parece sufrir cierta aceleración extra que no admite explicación con los modelos habituales. Es como si existieran "masas negativas" que causaran una repulsión gravitatoria. Una solución de urgencia, que ya fue practicada por Einstein, es modificar las ecuaciones de campo introduciendo la llamada *constante cosmológica* que añade un parámetro más a las ecuaciones del Teorema 5.2.3 y nos permite ajustarlas para conseguir una mayor coincidencia con las mediciones astronómicas. Actualmente no existen razones teóricas de peso que expliquen satisfactoriamente la existencia de tal constante cosmológica, con lo cual no es descartable que si se confirman las mediciones, la Teoría General de la Relatividad no tenga la última palabra en Cosmología, pero todavía es demasiado prematuro ir más allá de las opiniones.

Es interesante describir en términos actuales la manera de Einstein de introducir la constante cosmológica (en realidad su modelo era mucho más simple que los estudiados aquí [**Ei2**] p. 124-128). Como hemos visto en la demostración del Teorema 5.2.3, las ecuaciones de campo en la forma $R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$, para $\mu = \nu = 0$ y $\mu = \nu = 1$ conducen a

$$(5.9) \qquad -\frac{3C''}{C} = 4\pi G(\rho + 3p) \qquad \text{y} \qquad CC'' + 2(C')^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)C^2.$$

Einstein creía en 1917, de acuerdo con las observaciones de la época, que el Universo era estático, con lo cual $C = $cte, pero esto implicaría por la primera de las ecuaciones (5.9) que

$$\rho = -3p,$$

lo cual es absurdo porque la densidad no puede ser negativa. Lo que subyace aquí es el viejo problema ya atisbado por Newton ([**Mi-Th-Wh**] p. 755-766) de que si la gravedad es una fuerza atractiva no puede ser que los cuerpos celestes estén esencialmente inmóviles. Lo que hizo Einstein fue decir que las ecuaciones de campo eran sólo una primera aproximación y que las "verdaderas" ecuaciones de campo son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu},$$

o en forma no simétrica

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T g_{\mu\nu}) + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

donde Λ es lo que llamó constante cosmológica. Con ella las ecuaciones (5.9) se transforman en

$$(5.10)\quad -\frac{3C''}{C} = 4\pi G(\rho + 3p) - \Lambda \qquad \text{y} \qquad CC'' + 2(C')^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)C^2 + \Lambda C^2$$

y $C = $cte es una solución posible. Einstein supuso que Λ era muy pequeña para que no interfiriese significativamente con los efectos estudiados en el capítulo anterior ni con la aproximación newtoniana (véase [**Sc**] §8.6 Ex. 18). Cuando se descubrió el corrimiento hacia el rojo y por tanto la expansión del Universo, Einstein volvió a las ecuaciones de campo originales y dijo que la introducción de Λ había sido la mayor "metedura de pata" de su vida. Nótese que de (5.10) se deduce que cualquier $\Lambda > 0$ provoca que C'' sea mayor que en las ecuaciones originales, por ello se puede emplear la constante cosmológica para acelerar el Universo a nuestra voluntad (que es lo que parece necesitarse en la actualidad) en vez de para detenerlo, como hizo Einstein.

Sin intención de provocar el desánimo, veremos para terminar que incluso sin saber nada de relatividad general, únicamente con la mecánica newtoniana, podríamos haber encontrado modelos similares a los estudiados en esta sección.

Según las observaciones astronómicas, cada punto del Universo se está alejando de nosotros en línea recta, entonces podemos describir la trayectoria de la galaxia que está en el punto (x, y, z) como

$$(5.11)\qquad \big(x(t), y(t), z(t)\big) = C(t)\,\vec{c}$$

donde $\vec{c}$ es un vector constante para cada galaxia, digamos unitario de modo que $C(t)$ indique la distancia al origen (en el que suponemos estar). Derivando se tiene que su velocidad se puede expresar como

$$\vec{v}(t) = \frac{C'(t)}{C(t)}(x, y, z). \tag{5.12}$$

Suponiendo que la masa ni se crea ni se destruye, las galaxias que estén dentro de la bola de radio $C(t_1)$, en el tiempo t_2 estarán en la bola de radio $C(t_2)$. Así pues la masa total $\rho(t)\frac{4\pi}{3}C^3(t)$ debe ser constante a lo largo del tiempo (ρ es la densidad, la masa por unidad de volumen, que por la hipótesis cosmológica no depende de la posición).

Si $\vec{E}$ es la intensidad del campo gravitatorio del Universo, entonces para cada partícula de masa m, por la definición de intensidad de campo,

$$m\vec{E} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Cancelando las masas y aplicando (5.12)

$$\vec{E} = \frac{C''C - (C')^2}{C^2}(x, y, z) + \frac{C'}{C}\vec{v} = \frac{C''}{C}(x, y, z).$$

La ecuación de Poisson, $\operatorname{div}\vec{E} = -4\pi G\rho$, implica

$$3C'' + 4\pi G\rho C = 0.$$

Multiplicando por $2C^2/3$ y usando que ρC^3 es constante se sigue

$$2C''C^2 + K_1 = 0.$$

Finalmente, multiplicando por $C'C^{-2}$ e integrando se obtiene fácilmente

$$(C')^2 + K_2 = K_1/C.$$

Tras un cambio de unidades (la suposición de que $||\vec{c}|| = 1$ en (5.11) fue arbitraria), esta ecuación es similar a la de Friedmann una vez sustituido $\rho C^3 = \text{cte}$, que es la segunda ecuación del Teorema 5.2.3 para $p = 0$.

En definitiva, Newton podría haber hecho modelos cosmológicos similares a los actuales si hubiera conocido la expansión del Universo. Pero también es verdad que debemos usar mucha Física "moderna", y en particular la Teoría General de la Relatividad, si queremos dar explicaciones coherentes y precisas de muchos temas en Cosmología.

Problemas 5.2

$\rightarrow$**1)** Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si sólo supiéramos de C que es una función cóncava, ¿se podría concluir que existió un *big-bang* en el pasado?

ii) Un habitante del futuro lejano, ¿medirá una constante de Hubble mayor o menor que la actual?

iii) ¿Podría un habitante del futuro lejano medir en su tiempo una constante de Hubble negativa?

iv) ¿No puede haber cambiado significativamente el valor de la constante de Hubble desde que la introdujo Hubble hasta ahora?

v) ¿Es necesariamente cierto que en alguno de los instantes inmediatamente posteriores al *big-bang* el Universo era de volumen finito?

vi) ¿Puede ser infinito el parámetro de deceleración en un instante con alguno de los modelos de Universo?

2) En la demostración del Teorema 5.2.3 hemos dividido entre C', así que en principio podría ser incorrecta si para algún valor de t se cumple $C'(t) = 0$. Probar que en este caso las ecuaciones se siguen cumpliendo.

$\rightarrow$**3)** Supóngase fijado el valor de λ_0 y considérense las soluciones C_-, $C_=$ y C_+ correspondientes a $k = -1, 0, +1$ respectivamente. Probar que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{C_-(t)}{t^{2/3}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{C_=(t)}{t^{2/3}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{C_+(t)}{t^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{9\lambda_0}{2}}.$$

$\rightarrow$**4)** Probar que, con la terminología del problema anterior

$$C_+(t) < C_=(t) < C_-(t)$$

para $t > 0$ y hasta el *big-crunch*. (*Indicación*: Usando que todas las soluciones satisfacen $(C')^2 + k = 2\lambda_0/C$, probar que el mínimo valor, si existe, alcanzado por $C_- - C_=$ y $C_= - C_+$ en $t > 0$ debe ser positivo).

5) Estudiar si la solución correspondiente al caso $k = 1$ es simétrica.

6) Estudiar si la gráfica de $C(t)$ tiene asíntotas horizontales u oblicuas para alguno de los modelos de Universo.

7) A la constante $\rho_c = 3H_0^2(8\pi G)^{-1}$ se le llama densidad crítica. Demostrar que si $\rho_0 > \rho_c$ entonces $k = 1$, es decir, el Universo está condenado a un *big-crunch* mientras que si $\rho_0 < \rho_c$ entonces $k = -1$, esto es, se expandirá eternamente.

8) Con la notación del ejercicio anterior, dando por válidos los valores $H_0 = 2'5 \cdot 10^{-18}$ y $q_0 = 0'025$, calcular ρ_0 y ρ_c. (Nota: La densidad ρ_0 medida astronómicamente es mucho menor este número, lo que se suele explicar diciendo que hay mucha *materia oscura* que no podemos detectar).

9) En el caso $k = 1$, hallar en qué instante el Universo deja de expandirse y comienza a contraerse.

→**10)** Estudiar qué ecuación se deduce de las ecuaciones de campo para $\mu = \nu = 2$.

→**11)** Demostrar que la edad del Universo es siempre menor que H_0^{-1} incluso sin suponer $p = 0$. (*Indicación*: Utilizar que en una función cóncava la tangente siempre queda por encima).

→**12)** Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de $C(t)/C(t_0)$ alrededor de $t = t_0$ (la actualidad) escribiendo los coeficientes en términos de H_0 y q_0. Calcular también el de grado 1 de $C'(t)/C(t)$.

13) Calcular $T^{\mu 0}_{;\mu}$ para el tensor energía-momento

$$T^{\mu\nu} = \rho\, \delta_0^\mu \delta_0^\nu$$

donde $\rho = \rho(t)$ y la métrica es la de Robertson-Walker. (*Indicación*: Lo más breve es usar la identidad $\sqrt{-g}\, V^\mu_{;\mu} = (\sqrt{-g}\, V^\mu)_{,\mu}$ mencionada en el tercer capítulo).

→**14)** Supóngase un Universo con $k = 1$, $q_0 = 1$ y $H_0 = 10^{-18} s^{-1}$. Hallar qué edad tiene y cuántos años faltan para el *big-crunch*.

15) Demostrar que si $k = 1$ entonces $q_0 > 1/2$ y la edad del Universo es

$$t_0 = H_0^{-1} q_0 (2q_0 - 1)^{-3/2} \big(\arccos(q_0^{-1} - 1) - q_0^{-1}(2q_0 - 1)^{1/2}\big).$$

16) Repetir el ejercicio anterior para $k = -1$ obteniendo $q_0 < 1/2$ y

$$t_0 = H_0^{-1} \big((1 - 2q_0)^{-1} - q_0(1 - 2q_0)^{-3/2} \operatorname{arc\,cosh}(q_0^{-1} - 1)\big).$$

17) Estudiar el comportamiento de estas dos últimas fórmulas para la edad del Universo cuando $q_0 \to 1/2^+$ y $q_0 \to 1/2^-$ respectivamente.

→**18)** Considérese el modelo con $k = 0$.

a) Probar que un rayo de luz que salió del "origen" en un instante posterior al *big-bang* sólo puede haber llegado a $r < 2(C_0 H_0)^{-1}$.

b) Explicar por qué el apartado anterior implica que un observador sólo puede *ver* las galaxias con $r < r_0 = 2(C_0 H_0)^{-1}$ y calcular a qué distancia corresponde esta cantidad en años luz si H_0^{-1} se mide en años. (*Indicación*: La distancia actual desde $r = 0$ a $r = r_0$ es la longitud de la geodésica espacial con $t = t_0$ que une estos puntos).

19) Hallar los modelos del Universo correspondientes al caso $p = \rho/3$.

→**20)** Demostrar que las ecuaciones de campo con constante cosmológica

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}$$

equivalen a

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}) + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

21) Probar el análogo del Teorema 5.2.3 si existe una constante cosmológica $\Lambda \neq 0$.

***22)** Demostrar que en el modelo con $k = 0$ es posible que cualquier observador caminando por cierta geodésica vuelva al punto (espacial) de partida. Explicar por qué esto no contradice que la curvatura escalar sea nula.

Historias en titulares:

El escéptico

El premio Nobel de Física J.J. Thomson ha hecho unas declaraciones que parecen reflejar cierta inseguridad en la Cosmología: "Tenemos el espacio de Einstein, el de de Sitter, universos que se expanden, universos que se contraen, universos vibrantes, universos misteriosos. De hecho, el matemático puro puede crear universos simplemente escribiendo una ecuación, e incluso si es un individualista puede tener un universo de su propiedad".

Tras 1933

La Hoja del Misterio

El astrónomo y astrólogo J. Kepler (bien conocido por sus acertadas predicciones de grandes fríos e invasiones turcas en 1595) ha publicado una nueva edición anotada de su *Mysterium Cosmographicum.* En su último capítulo habla del principio del Universo. Partiendo de que Dios no instituyó el movimiento al azar sino desde una gran conjunción estelar, ha apoyado la tesis de que la Creación tuvo lugar el 24 de Julio por la tarde del año juliano 3993 antes de nuestra era.

1621

Vanitas Vanitatum

Ante la rechifla que causa actualmente la anticuada cronología bíblica (a la que dedicó muchos esfuerzos el gran Newton) pretendiendo calcular el año e incluso el día y la hora de la Creación; J. Bernstein (físico y divulgador de la Ciencia) se pregunta qué dirán nuestros descendientes acerca de la tesis actual de que todo el helio del Universo esencialmente se produjo tres minutos después del llamado *big-bang.*

1992

¿Qué hay que saberse?:

Los tres modelos de Universo. Para ser más concretos:

• Al sustituir la métrica de Robertson-Walker y el tensor de energía-momento correspondiente a un fluido perfecto (con $p = 0$) en las ecuaciones de campo, se obtienen tres modelos de Universo dependiendo del signo de la curvatura: El caso $k = -1$ corresponde a una expansión rápida, el caso $k = 0$ a otra más lenta y, por último, $k = 1$ a una expansión seguida de una contracción. En todos estos modelos se parte de un estado inicial infinitamente contraído llamado *big-bang.*

• Con algunas mediciones astronómicas se pueden ajustar las constantes en los modelos de Universo y aproximar el tiempo que ha transcurrido desde el *big-bang.*

¿Para qué sirve?:

Si creemos que nuestros modelos se ajustan a la realidad, los contenidos de esta sección sirven para calcular cuál es la edad y *forma* del Universo. Estas cuestiones han intrigado al ser humano desde los comienzos de la Historia, y poder dar una respuesta con base científica es grandioso, pero quien entienda bien este capítulo verá que todo lo que hemos hecho es decir: "Según todos los indicios el Universo se expande, demos marcha atrás con los datos actuales y calculemos cuándo estaba todo junto". Ni siquiera es decisivo el uso de la relatividad general para realizar este proyecto.

Una vez más, manipulamos ecuaciones, añadimos hipótesis, combinamos teorías, y un número surge al final. Mil millones de años, diez mil millones de años... da igual, no sirve para nada salvo para satisfacer el orgullo humano. Podemos creer que todos los secretos de los confines del Universo están al alcance del superhombre científico del siglo XXI y sin embargo somos impotentes ante la miseria y el hambre a nuestro alrededor.

5.3. El teorema de la singularidad de Hawking

Si el Universo actual está en expansión, hace un instante era más denso y como la fuerza gravitatoria es atractiva, esto parece conducir a un colapso inevitable yendo suficientemente atrás en el tiempo. En la sección anterior habíamos visto que éste era el caso en los modelos homogéneos e isótropos allí estudiados, pero parece que estas propiedades no deberían desempeñar un papel fundamental.

Pensemos, por ejemplo, en un universo espacialmente unidimensional, "curvilandia", con forma de curva cerrada simple que suponemos inmersa en $\mathbb{R}^2$ y convexa. Si curvilandia está en expansión, hace un instante era una curva más pequeña de manera que los vectores que unen cada observador con su posición anterior apuntan hacia adentro. Parece claro que antes o después la historia (línea de universo) pasada de un habitante de curvilandia debe acabar porque ya no queda sitio por donde seguir.

La generalización de esta "tontería" es el llamado *teorema de la singularidad* debido a S.W. Hawking [**Ha**] cuyo enunciado daremos aquí (en realidad hay varios teoremas que pueden denominarse de la misma forma, [**Ha-El**] Ch. 8). El resultado es complejo y por ello no incluiremos en esta sección, que es singular en varios sentidos, su demostración ni ejercicios relacionados con el tema. El lector interesado puede encontrar una prueba con muchas explicaciones en [**Na**] (véase también [**ON**] y [**Ha-El**] para versiones técnicamente más difíciles pero más completas). La dificultad del teorema de la singularidad de Hawking no sólo radica en que la Geometría y Topología de variedades es compleja (incluso probar nuestro resultado para curvilandia nos llevaría a consideraciones topológicas no triviales), sino que además hay que interpretar las hipótesis impuestas sobre las variedades a las que se aplica el teorema y asegurarse de que se ajustan a cualquier espacio-tiempo razonable.

Nos centraremos en este último punto modificando y simplificando a veces las definiciones originales, en la línea de [**Na**], y dejando aparte los detalles técnicos. Seguiremos una aproximación gradual, desde las hipótesis más débiles hasta la que realmente necesitamos.

Si deseamos establecer un teorema que hable de una singularidad en el pasado, más vale que existan un pasado y un futuro en sentido global. Aunque parezca mentira esta propiedad no es automática, y puede ser fácil comprenderlo para el que recuerde el teorema de la bola de pelo en Topología. En un caso particular, si en todos los puntos de la Tierra ponemos una flecha señalando hacia el este, entonces no podemos hacerlo con continuidad en los polos y, por tanto, no hay una dirección este global. Análogamente, si queremos que existan pasado y futuro en un espacio-tiempo, debemos exigir que haya algún campo de vectores unitarios temporales (flechas que indiquen la dirección del futuro), en ese caso diremos que el espacio-tiempo es <u>temporalmente orientable</u>.

Incluso suponiendo la propiedad anterior, pueden existir (hay un ejemplo muy conocido debido al lógico K. Gödel [**Ha-El**] §5.7) líneas de universo temporales cerradas. Esto se traduce en que esperando un “rato” volvemos al mismo espacio y al mismo tiempo, esto es, nuestro futuro a la larga llega a ser nuestro pasado y viceversa. Puede que este eterno retorno agradase a F. Nietzsche y que sea la base de varias películas, pero en Física acaba con la causalidad (es la *paradoja del abuelo*: si estando en el pasado asesino a mi abuelo o a mi abuela antes de que conciban a mi madre, ¿cómo he nacido yo?). Por ello se pide la condición cronológica de que no existan geodésicas (ni siquiera a trozos) temporales cerradas. Una condición tan leve ya permite enunciar un débil teorema de singularidad que podemos demostrar casi completamente salvo por un detalle técnico.

Proposición 5.3.1 : *Si M es un espacio-tiempo (temporalmente orientable) verificando la condición cronológica, entonces no puede ser compacto.*

DEM.: Dado $p \in M$, sea $\mathcal{U}_p$ el abierto formado por todos los puntos que se pueden alcanzar en el futuro partiendo de p, esto es,

$$\mathcal{U}_p = \{q \in M \ : \ \exists\gamma \text{ geodésica (a trozos) temporal futura con } \gamma(0) = p,\ \gamma(a) = q,\ a > 0\}.$$

No es obvio que $\mathcal{U}_p$ sea abierto, una prueba puede encontrarse en **[ON]** p. 403. Suponiendo esto, se tiene que $\bigcup_{p\in M}\mathcal{U}_p$ es un recubrimiento abierto de M (todo punto es futuro de algún otro). Si M fuera compacto existiría un subrecubrimiento finito $\mathcal{U}_{p_1} \cup \mathcal{U}_{p_2} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{p_n}$. Además podemos suponer $\mathcal{U}_{p_1} \not\subset \mathcal{U}_{p_i}$. En definitiva, se concluye que $p_1 \in \mathcal{U}_{p_1}$ y consecuentemente existe una geodésica (a trozos) temporal cerrada. ■

Todavía se pueden encontrar casos patológicos (**[Ha-El]** p. 193,197) en los que la condición cronológica se cumple pero se viola con una perturbación infinitesimal de una geodésica o de la métrica. Esto es poco deseable porque la causalidad en Física no debería depender de variaciones infinitesimales. Por ello se exige la condición de causalidad estable. La definición concreta es complicada pero se prueba (Prop. 6.4.9 **[Ha-El]**) que equivale a que exista una función $T : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que su vector gradiente, $\nabla T = g^{\alpha\beta}T_{,\beta}\partial_\alpha$, sea temporal (esto es, que exista un *tiempo global*). Por la orientabilidad temporal se puede suponer que ∇T es futuro. Cada hipersuperficie $S = T^{-1}(t_0)$ del espacio-tiempo M es como una fotografía instantánea del universo en el tiempo t_0 y su campo de vectores normales unitarios futuros es[uff]

$$\vec{N} = \frac{\nabla T}{\sqrt{|G(\nabla T, \nabla T)|}} \qquad \text{con} \qquad \nabla T = g^{\alpha\beta}T_{,\beta}\partial_\alpha.$$

Por fin podemos establecer la hipótesis causal que realmente necesitamos: queremos

[uff] Recuérdese que en $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual, ∇f es perpendicular a cada “superficie” de nivel porque $f(\vec{\alpha}(t))$=cte $\Rightarrow$ $\nabla f\cdot\alpha'$=0. En general, las componentes del gradiente deben ser $g^{\alpha\beta}T_{,\beta}$ en vez de $T_{,\alpha}$ para que ∇T sea un vector (un tensor una vez contravariante). Obviamente ambas cantidades coinciden usando la métrica usual.

que el estado del Universo en cierto instante condicione el correspondiente a cualquier otro, es decir, que haya una conexión causal entre las diferentes "instantáneas" del Universo. Matemáticamente pedimos que cualquier geodésica (a trozos) nula o temporal atraviese exactamente una vez a una hipersuperficie S como antes. En ese caso se dice que S es una hipersuperficie de Cauchy (y que el espacio-tiempo es globalmente hiperbólico).

Tras estos largos prolegómenos, podemos enunciar el Teorema de la singularidad de Hawking.

Teorema 5.3.2 : *Sea M un espacio-tiempo que tiene una hipersuperficie de Cauchy S con campo de vectores normales unitarios $\vec{N}$. Supongamos que*

i) $R_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta \geq 0$ para todo vector temporal $\vec{V}$.

ii) Existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda \leq N^\alpha_{;\alpha}$.

Entonces las geodésicas que parten de S con vector inicial $-\vec{N}$, tienen longitud menor que $3/\lambda$.

Observaciones: La segunda condición dice que los vectores normales tienen *divergencia* positiva y esto es como imponer que $-\vec{N}$ apunte hacia adentro, y por tanto mirando hacia el pasado el Universo se contrae (recuérdese el ejemplo de curvilandia). La primera indica, en cierto sentido, una curvatura positiva en el tiempo y es una forma fuerte de imponer que la fuerza gravedad sea atractiva asegurando que $T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}$ es (semi-)definida positiva en los vectores temporales (nótese que cuando $T_{\alpha\beta} = \rho\delta^0_\alpha\delta^0_\beta$ esta condición implica que $\rho \geq 0$, es decir, que no hay "masas negativas"). La conclusión del teorema afirma que las líneas de universo consideradas desaparecen cuando se viaja hacia atrás por ellas al cabo de un tiempo propio finito. En este sentido el espacio-tiempo M es singular, porque no podemos continuar indefinidamente la historia pasada de las correspondientes partículas.

Como apunte final, solamente indicar que no hay que dar a los teoremas, aunque sean muy buenos, mayor importancia de la que tienen. El resultado anterior es un teorema geométrico acerca de ciertas variedades (recuérdese que un espacio-tiempo es una variedad 4−dimensional con un tipo especial de métrica) que habla de geodésicas, derivadas covariantes, el tensor de Ricci, etc. En cierto sentido es una extensión a algunas variedades semiriemannianas de una implicación del Teorema de Hopf-Rinow [**ON**] p. 138. La interpretación Física es quizá más importante que el propio contenido matemático, pero no hay que sacar el resultado de contexto. Simplemente, como todos los teoremas, dice algo así como "si te crees esto debes creerte también aquello", no implica que el Universo tenga que satisfacer sus hipótesis (aunque sean naturales) porque éste ni siquiera está obligado a satisfacer la Teoría General de la Relatividad. De hecho el propio Hawking postula que el Universo es compacto, lo cual no sólo no se ajusta al teorema anterior sino que, como hemos visto, se aleja de hipótesis muy básicas de causalidad. El "truco" está en que la Gravedad Cuántica trabaja con hipótesis distintas. Quizá a fin de cuentas preguntarse si el Universo es compacto o no, tenga tan poco sentido como saber si los jueves son amarillos y todo lo que podemos hacer es crear modelos que respondan a esta pregunta a partir de ciertas premisas equivocadas.

Referencias

[**Al-Fi**] M. Alonso, E.J. Finn. "Física" Vol II. Addison-Wesley Iberoamericana 1987.

[**As**] I. Asimov. "Introducción a la Ciencia". Plaza & Janes 1973.

[**Be**] P.G. Bergmann. "Introduction to the Theory of Relativity". Dover Publications 1976.

[**Ca**] M.P. do Carmo. "Geometría Diferencial de Curvas y Superficies". Alianza Universidad Textos 1992.

[**Dy-Mc**] H. Dym, H.P. McKean. "Fourier Series and Integrals". Academic Press 1972.

[**Ei1**] A. Einstein. "Zur Elektrodynamik bewegter Körper". *Annalen der Physik* **17** (1905) (Hay una traducción al inglés en [**Ei-Lo-Mi-We**])

[**Ei2**] A. Einstein. "El significado de la relatividad". Espasa Calpe 1971.

[**Ei3**] A. Einstein. "On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses". *Ann. of Math.* **40** (1939), 922-936.

[**Ei-Lo-Mi-We**] A. Einstein, H.A. Lorentz, H. Minkowski, H. Weyl. "The principle of relativity". Dover 1952.

[**Fe-Le-Sa**] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands. "Feynman Física" V. II. Fondo educativo interamericano 1972.

[**Fo-Ni**] J. Foster, J.D. Nightingale. "A short course in General Relativity". 2nd Edition. Springer 1995.

[**Gi**] J. Girbau. "Geometria Diferencial i Relativitat". Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona 1993.

[**Ha**] S.W. Hawking. "The ocurrence of singularities in cosmology". *Proc. Royal Soc. London* A **294** (1966), 511-521.

[**Ha-El**] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. "The Large Scale Structure of Space-Time". Cambridge University Press 1973.

[**Hu-To**] L.P. Hughston, K.P. Tod. "An introduction to General Relativity". London Mathematical Society Student Texts 5. Cambridge University Press 1990.

[**La**] C. Lanczos. "The Variational Principles of Mechanics". Mathematical Expositions 4. University of Toronto Press 1970.

[**La-Li**] L. Landau, E. Lifshitz. "Curso abreviado de Física Teórica: Mecánica y Electrodinámica". Segunda edición. Ed. Mir 1979.

[**Li-Pr-Pr-Te**] A.P. Lightman, W.H. Press, R.H. Price, S.A. Teukolsky. "Problem Book on Relativity and Gravitation". Princeton University Press 1975.

[**Lo**] H.A. Lorentz. "Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity Less than that of Light". *Proceedings of the Royal Academy of Amsterdam* **6** (1904). (Hay una traducción al inglés en [**Ei-Lo-Mi-We**]).

[**Ma**] J.C. Maxwell. "A Trataise on Electricity and Magnetism". V. I, II. Oxford Classic Series. Clarendon Press 1998.

[**Mi-Th-Wh**] G.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. "Gravitation". W.H. Freeman and Company. San Francisco 1973.

[**Na**] G.L. Naber. "Spacetime and singularities". London Mathematical Society Student Texts, 11. Cambridge University Press 1988.

[**ON**] B. O'Neill. "Semi-riemannian Geometry (With Applications to Relativity)". Academic Press 1983.

[**Pa**] A. Pais. "El Señor es sutil…La ciencia y la vida de Albert Einstein". Ariel 1984.

[**Po**] A.V. Pogorelov. "Geometría Diferencial". Ed. Mir 1984.

[**Sa**] J.M. Sánchez Ron. "El origen y desarrollo de la relatividad". Alianza Universidad. Alianza Editorial 1983.

[**Sc**] B.F. Schutz. "A first course in general relativity". Cambridge University Press 1990.

[**Sm-Te**] J. Smoller, B. Temple. "Cosmology with a shock-wave". *Commun. Math. Phys.* **210** (2000), 275-308.

[**Sp**] O. Spiridonov. "Constantes Físicas Universales". Física al alcance de todos. Ed. Mir 1986.

[**Spi1**] M. Spivak. "A comprehensive Introduction to Differential Geometry". Vol I. Publish or Perish 1975.

[**Spi2**] M. Spivak. "A comprehensive Introduction to Differential Geometry". Vol II. Publish or Perish 1979.

[**To**] P. Tourrenc "Relativity and Gravitation". Cambridge University Press 1997.

[**Tr**] F. di Trocchio. "Las mentiras de la ciencia". CT2500. Alianza Editorial 1999.

[**Wa**] R.M. Wald. "General Relativity". The University of Chicago Press 1984.

[**We**] S. Weinberg. "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity". John Wiley & Sons 1972.

[**Za**] E. Zahar. "Einstein's revolution". Open Court Publishing Company 1989.