

## 5. Fluidos

### 5.1. Navegando

Cuando oímos la palabra *fluido* imaginamos algo que potencialmente puede manar de un sitio a otro y que puede sortear obstáculos y estrechamientos. Aunque empleemos o leamos expresiones como fluido eléctrico, o incluso fluido calórico, el Bachillerato y el diccionario nos recuerdan que en primer lugar debemos pensar en líquidos y gases. Los fluidos mantienen una suerte de oposición frente a los sólidos, cuyas moléculas son tan gregarias que avanzan en grupos inalterables permitiendo sólo movimientos rígidos. Las moléculas de los fluidos se tienen menos apego unas a otras y, al menos idealmente, no ponen reparos a cambiar las distancias con sus vecinas buscando nuevas amistades.

Hay dos formas de describir el movimiento de las partículas de un fluido. Una es perseguir a cada partícula dando su ecuación de movimiento (descripción lagrangiana), y la otra es quedarnos quietos en un punto y medir la velocidad de la partícula que pasa por allí (descripción euleriana). Esta segunda forma se muestra más natural a la hora de escribir las ecuaciones básicas de la Mecánica de Fluidos. Matemáticamente corresponde a dar una función  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  que para cada valor de  $t$  nos diga cuál es la velocidad de la partícula que está en el punto  $\vec{x}$  perteneciente al dominio en el que vive el fluido. En definitiva, fijado  $t$ , la función  $\vec{v}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , el *campo de velocidades*.

La primera ecuación que veremos, es la llamada *ecuación de continuidad*, que expresa la conservación de la masa. Supongamos un fluido de densidad  $\rho$  (en principio no constante) ocupando una región  $V$  de  $\mathbb{R}^3$ . La masa correspondiente es  $\int_V \rho$ . Puede que parte de la masa del fluido escape de la región  $V$ , pero siempre debe hacerlo fluyendo a través de la frontera, que denotamos con  $\partial V$ . Por tanto, la variación de la masa dentro de  $V$  y el flujo a través de  $\partial V$  deben compensarse. En una ecuación:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0.$$

La segunda integral representa el flujo a través de la frontera porque si  $dA$  es un pequeño “cuadrado” en  $\partial V$ , en un tiempo  $dt$  el fluido pasará de  $dA$  a  $dA + \vec{v}dt$ . El paralelepípedo determinado por estos cuadrado tiene masa  $\rho \vec{v} \cdot \vec{N} |dA| dt$ . Por tanto la cantidad de masa que atraviesa la frontera por unidad de tiempo (el flujo) es la integral de superficie.

La otra ecuación que introduciremos no es más que la ecuación fundamental de la dinámica  $F = ma$ . Si  $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  es la ecuación de movimiento de una partícula de fluido, entonces debe cumplirse  $\vec{x}'(t) = \vec{v}(\vec{x}(t), t)$ . A las soluciones de esta ecuación diferencial se les llama *trayectorias*. Derivando una vez más, la aceleración será

$$\vec{a} = \vec{x}'' = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}.$$

Donde la última igualdad es simplemente notación (bastante lógica pensando que  $\nabla$  es el vector de derivadas parciales).

La fuerza que sufre la porción de fluido en la región  $V$  es, por tanto,  $\int_V \rho \vec{a}$ , entendiendo esta integral de volumen “vectorial”, coordenada a coordenada. En ausencia de fuerzas externas, esta fuerza provendrá de que la porción de fluido en  $V$  es empujada (presionada) por las partículas de fluido de las regiones adyacentes. Para simplificar, supongamos el fluido dividido en pequeños cubitos. La fuerza de unos sobre otros será perpendicular a la superficie de las caras (suponemos que no son “pegajosos”, que no hay rozamiento en los desplazamientos paralelos) y se dirige hacia el interior de cada cubito. Se llama presión  $p$  al módulo de esta fuerza de empuje por unidad de superficie. Las fuerzas debidas a la presión en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  que actúan sobre la superficie  $\partial V$  de un elemento de fluido, son pues  $-\int_{\partial V} (p, 0, 0) \cdot d\vec{S}$ ,  $-\int_{\partial V} (0, p, 0) \cdot d\vec{S}$  y  $-\int_{\partial V} (0, 0, p) \cdot d\vec{S}$ , respectivamente.

Puede haber también fuerzas externas al fluido. Por ejemplo la gravedad, que en la superficie terrestre se empeña en tirar de las cosas hacia abajo con aceleración  $g$ , dando lugar a una fuerza  $\int_V (0, 0, -\rho g)$ . Consideraremos sólo fuerzas conservativas, es decir, tales que la aceleración se puede escribir como  $-\nabla\phi$ , donde  $\phi$  es cierta función, llamada *potencial*, que sólo depende de la posición. Estas fuerzas externas contribuyen  $\vec{F}_{ext} = -\int_V \rho \nabla\phi$ . En el caso anterior  $\phi = gz$ .

El modelo consiste simplemente en añadir a la ecuación de continuidad el balance de fuerzas (ecuación dinámica).

#### Diccionario:

- Velocidad en cada punto e instante  $\rightarrow \vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ .
- La masa no desaparece  $\rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho + \int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ .
- $F = ma$  en una porción de fluido  $\rightarrow \vec{F} = \int_{\partial V} \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right)$ .
- Fuerzas de presión  $\rightarrow \vec{F}_1 = - \left( \int_{\partial V} (p, 0, 0) \cdot d\vec{S}, \int_{\partial V} (0, p, 0) \cdot d\vec{S}, \int_{\partial V} (0, 0, p) \cdot d\vec{S} \right)$
- Fuerzas externas  $\rightarrow \vec{F}_2 = - \int_{\partial V} \rho \nabla\phi$ .
- Equilibrio de fuerzas  $\rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

Para hacer las ecuaciones del modelo más manejables aplicamos el teorema de la

divergencia. La ecuación de continuidad produce

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0;$$

donde la última igualdad se sigue de que  $V$  es una región arbitraria. De la misma forma

$$\vec{F}_1 = - \left( \int_V \frac{\partial p}{\partial x}, \int_V \frac{\partial p}{\partial y}, \int_V \frac{\partial p}{\partial z} \right) = - \int_V \nabla p.$$

Y junto con  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  se sigue  $\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p - \rho \nabla \phi$ . Entonces, el equilibrio de fuerzas (conservación del momento lineal, si uno quiere quedar bien) y la ecuación de continuidad, se pueden resumir en las llamadas *ecuaciones de Euler*

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \rho^{-1} \nabla p + \nabla \phi = \vec{0} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{array} \right.$$

Como estas ecuaciones son bastante complicadas se consideran diferentes situaciones especiales. Así un *fluido incompresible homogéneo* es aquél cuya densidad  $\rho$  es una función constante. Limitarse a fluidos incompresibles homogéneos deja algunos fenómenos interesantes propios de los gases, pero se ajusta bien a los líquidos y al aire en las condiciones habituales. A partir de ahora nos ocuparemos sólo de este tipo de fluidos que, con cierta impropiedad, denominaremos simplemente *fluidos incompresibles*. Para ellos las ecuaciones de Euler se reducen a

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla(p/\rho + \phi) = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

Aquí las incógnitas son  $\vec{v}$  y  $p$ , ya que se supone que podemos conocer fácilmente la densidad del fluido y  $\phi$  viene dada por influencias externas. Si tenemos el fluido contenido en un recipiente estanco, o choca contra un obstáculo, es natural imponer la condición  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  en la frontera, con  $\vec{n}$  el vector normal, lo que significa que el fluido no la atraviesa, sino que sólo puede deslizarse a lo largo de ella. Querríamos partir de una velocidad inicial  $\vec{v}_0(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}, 0)$  y deducir la evolución del fluido. Evidentemente la presión sólo puede estar definida salvo una constante ( $\nabla(p + \text{cte}) = \nabla p$ , lo importante es su incremento; nótese la necesidad de la descompresión en el buceo) pero esperamos determinar la velocidad. Para

dar una idea de la dificultad matemática del modelo, hay que mencionar que no se sabe todavía si existen siempre soluciones bien definidas para todo tiempo, aunque se conoce la existencia y unicidad para tiempo pequeños, y la existencia y unicidad global en el caso bidimensional (fluidos que se mueven en capas planas) [Ma-Pu].

Siguiendo con los casos especiales, si el campo de velocidades  $\vec{v}$  no depende del tiempo, se dice que el fluido es *estacionario*. Esto no significa que se esté quieto, sino que la velocidad de las partículas que lo componen sólo depende del punto por el que pasan. En este caso, en la primera ecuación desaparece el término  $\partial\vec{v}/\partial t$ .

A la función  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$  se le llama *vorticidad*. Por el teorema de Stokes, si  $D$  es una superficie con frontera  $\partial D$ , la circulación de  $\vec{v}$  a lo largo de  $\partial D$  es  $\int_D \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ . De modo que la vorticidad mide de alguna forma “los remolinos” locales, la posibilidad de que un elemento de fluido no sólo avance y se deforme, sino que gire (véase [Va 1] §5.6, [Ch-Ma] §1.2). Si la vorticidad es nula, se dice que el fluido es *irrotacional*.

El primer resultado que veremos afirma que los remolinos no pueden salir de la nada, siempre que las partículas no desaparezcan o se creen espontáneamente.

**Proposición 5.1.** *Supongamos que se cumplen las ecuaciones (5.2) y las trayectorias están definidas para todo tiempo. Si la vorticidad  $\vec{\omega}$  se anula en  $t = 0$  entonces es idénticamente nula.*

DEM.: Partimos de la identidad del cálculo vectorial ([Gr-Ry] 10.31.3' con  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ ):

$$(5.3) \quad (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{F} = (\text{rot } \vec{F}) \times \vec{F} + \frac{1}{2}\nabla(\|\vec{F}\|^2),$$

cuya prueba se reduce a aburrirse un rato. Sustituyendo en la primera ecuación de (5.2)

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 + \phi + p/\rho\right) = 0.$$

Al tomar rotacionales se tiene (recuérdese que  $\text{rot } \nabla = 0$ )

$$(5.4) \quad \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}).$$

En este punto en [Fe-Le-Sa] §40-2 se termina la prueba diciendo “Si  $\vec{\omega} = \vec{0}$  en cualquier lugar y en cualquier instante  $t$ ,  $\partial\vec{\omega}/\partial t$  también es cero, así que  $\vec{\omega}$  es cero en cualquier lugar en  $t + \Delta t$ ”. Esto no parece riguroso en absoluto [Ch-Ma] y nosotros trabajaremos un poco más. Empleamos un nuevo monstruo del cálculo vectorial ([Gr-Ry] 10.31.7’):

$$\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + \vec{F} \text{div } \vec{G} - \vec{G} \text{div } \vec{F}.$$

Por la ecuación de continuidad y  $\text{div rot} = 0$ , (5.4) equivale a

$$(5.5) \quad \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v}.$$

Sea  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  la trayectoria que sigue una partícula inicialmente en  $\vec{x}_0$ , es decir, la solución de  $\vec{x}' = \vec{v}(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . Como habíamos visto al deducir las ecuaciones de Euler, el primer miembro de (5.5) es la derivada de la curva parametrizada  $\vec{\gamma}(t) = \vec{\omega}(\vec{x}(t), t)$ . Por

tanto, dada  $\vec{v}$ , (5.5) se escribe como una ecuación diferencial ordinaria  $\vec{\gamma}' = H(\vec{\gamma}, t)$ . De acuerdo con la teoría, esta ecuación tiene solución única, que en este caso es obviamente  $\vec{\gamma} = \vec{0}$ . Por tanto  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , ya que todo punto está en alguna trayectoria que partió de  $t = 0$ . ■

En diferentes aplicaciones prácticas (por ejemplo en Aeronáutica) es importante estudiar cómo actúa un fluido sobre un objeto inmerso en él que ocupa una región sólida  $V$ . Según el modelo, tal objeto debe sufrir una fuerza debida a la presión de los elementos de fluido adyacentes, dada por

$$\vec{E} = -\left( \int_{\partial V} (p, 0, 0) \cdot d\vec{S}, \int_{\partial V} (0, p, 0) \cdot d\vec{S}, \int_{\partial V} (0, 0, p) \cdot d\vec{S} \right).$$

Por razones obvias se llama *empuje* a esta fuerza.

Veamos dos resultados básicos concernientes a los fluidos estacionarios. El primero, bien conocido, nos dice cuál es el empuje si el fluido está completamente parado.

**Proposición 5.2 (Principio de Arquímedes).** *Si  $\vec{v}$  es idénticamente nula y  $\phi = gz$  (el potencial gravitatorio) entonces*

$$\vec{E} = (0, 0, g \int_V \rho).$$

Nota: como  $\int_V \rho$  es la masa de la región  $V$  si estuviera llena de fluido, lo que dice este resultado es que “todo cuerpo sumergido en un fluido (incluso no incompresible), sufre un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen de fluido que desaloja”.

DEM.: Como ya habíamos visto, por el teorema de la divergencia,  $\vec{E} = -\int_V \nabla p$ . Según la primera ecuación de (5.1), si  $\vec{v}$  es idénticamente nula  $\vec{E} = \int_V \rho \nabla \phi$ . Sustituyendo  $\phi = gz$  se tiene el resultado deseado. ■

**Proposición 5.3 (Teorema de Bernoulli).** *En un fluido (incompresible) estacionario, la cantidad  $\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\|^2 + p + \rho\phi$  permanece constante a lo largo de cada trayectoria.*

DEM.: Multiplicando la primera ecuación de (5.2) por  $\rho$  y aplicando (5.3), en el caso estacionario se obtiene

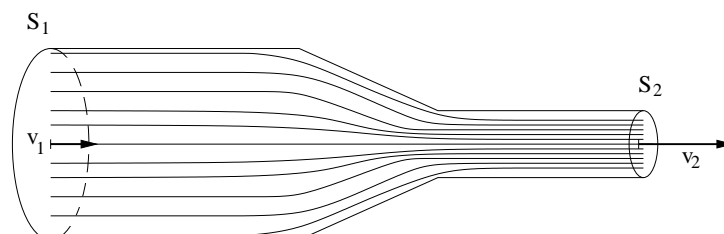
$$\rho\vec{\omega} \times \vec{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\|^2 + p + \rho\phi\right) = 0.$$

Multiplicando escalarmente por  $\vec{v}$ , se elimina la vorticidad,  $(\nabla\left(\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\|^2 + p + \rho\phi\right)) \cdot \vec{v} = 0$ . Y la regla de la cadena en la forma  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dt}$ , prueba que esta fórmula equivale a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}(\vec{x}(t))\|^2 + p(\vec{x}(t)) + \rho\phi(\vec{x}(t))\right) = 0,$$

como se quería demostrar. ■

Una de las muchas aplicaciones es el estudio de la caída de presión cuando una tubería cilíndrica de sección  $S_1$  se estrecha hasta una sección  $S_2$ . Suponemos, como es natural, que la velocidad es perpendicular a la sección antes y después del estrechamiento; pasando de tener módulo  $v_1$  a  $v_2$ .



Siguiendo el camino inverso al empleado para deducir la ecuación de continuidad

$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{v} = \int_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{S} = S_2 v_2 - S_1 v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1.$$

Como era de esperar, por el lado más estrecho el agua sale más rápido ([Ga] p. 374). Según el teorema de Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2.$$

Sustituyendo  $v_2$  se deduce

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{v_1^2}{2S_2^2} (S_1^2 - S_2^2).$$

Así pues, con  $v_1$  constante,  $S_2 \rightarrow 0 \Rightarrow p_1 - p_2 \rightarrow +\infty$ . Entonces, como reflejan los dibujos animados, si pisamos una manguera no explotará por el sitio por el que la hemos pisado, sino por alguno de sección mayor (allí donde hay más agua esperando).

## Ejercicios

**1)** Sin mirar la teoría: a) Explicar por qué el campo de velocidades de un fluido incompresible homogéneo debe tener divergencia nula. b) Si  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  es el campo de velocidades de un fluido y la aceleración se define como derivada temporal de la velocidad, ¿por qué la aceleración de las partículas del fluido no es la derivada de  $\vec{v}$  respecto a la última coordenada,  $t$ ?

**2)** Si  $\vec{v} = (x^2 + x + z, -2xy + t, az + e^{tx})$  es el campo de velocidades de un fluido incompresible, hallar  $a$  y calcular la aceleración que tiene la partícula que pasa por el origen en  $t = 0$ .

**3)** Un fluido compresible homogéneo es aquél cuya densidad  $\rho$  sólo depende de  $t$ . Esto es, tal que la densidad puede variar pero siempre por igual en todos los puntos. Demostrar que en este tipo de fluidos si la divergencia del campo de velocidades es positiva entonces  $\rho$  debe decrecer. ¿Qué significa esto físicamente?

**4)** Comprobar que el campo de velocidades  $\vec{v} = ((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2, 2xy/(x^2 + y^2)^2, 0)$  corresponde a un fluido incompresible estacionario, y demostrar que cada trayectoria  $(x(t), y(t), z(t))$  verifica  $y(t) = C(x^2(t) + y^2(t))$  para cierta constante  $C$ . (Esto último equivale a verificar que la derivada de  $y(t)/(x^2(t) + y^2(t))$  es nula).

**5)** Considérese un hexaedro regular (cubo) homogéneo de lado  $l = 10 \text{ cm}$  y densidad  $\rho = 0'9 \text{ gr/cm}^3$ . Suponiendo que permanece en equilibrio flotando en el agua en su posición habitual, calcular por dónde llegará la línea de flotación.

**6)** Repetir el problema anterior cuando el objeto que flota es un cono invertido que tiene altura  $10 \text{ cm}$ , diámetro de la base  $20 \text{ cm}$  y densidad  $0'5 \text{ gr/cm}^3$ .

**7)** ¿Dónde correría más deprisa un mismo río, aquí o en la Luna? (Supóngase nula en ambos casos la presión “atmosférica”).

**8)** Una tubería horizontal de sección circular tiene un estrechamiento, pasando su radio de  $2 \text{ cm}$  a  $1 \text{ cm}$ . Si el agua mana por la parte ancha a  $1 \text{ m/s}$  y la presión en la parte estrecha es  $200\,000 \text{ N/m}^2$ , hallar la presión en la parte ancha y la velocidad en la estrecha.

**9)** Suponiendo que la tubería del problema anterior tiene un metro de longitud, repetir el problema cuando la tubería está inclinada  $30^\circ$  con el lado estrecho hacia abajo. (Se supone que el caudal de agua se ajusta perfectamente a la tubería, sin estrecharse).

**10)** Probar que si el campo de velocidades de un fluido incompresible irrotacional y estacionario tiene dos coordenadas constantes, la tercera también lo debe ser.

**11)** Si una pelotita flota en el agua y la empujamos ligeramente hacia abajo, comenzará a oscilar. Estudiar si el movimiento es armónico simple (esto es, si la fuerza es proporcional a la distancia a la posición de equilibrio) cuando se supone  $\vec{v}$  nula.

## SECCIÓN 5.1

**Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos** (el precio de esta fotocopia)De la sección:

- Ondas en fluidos.

Generales:

- Las funciones de Bessel y sus aplicaciones.

**Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*Sería menester haber olvidado completamente la historia de la ciencia para no recordar que el deseo de conocer la naturaleza ha tenido la influencia más constante y más afortunada sobre el desarrollo de las matemáticas.*

*En primer lugar, el físico nos plantea problemas cuya solución espera de nosotros. Pero proponiéndolos nos ha pagado ampliamente por anticipado el servicio que podemos hacerle si llegamos a resolverlos [Po] p. 99.*



## 5.2. No creo en ti

Ahora nos fijaremos en los fluidos incompresibles que son estacionarios e irrotacionales, es decir, con  $\partial\vec{v}/\partial t = \vec{0}$  y  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ . Como ya hemos visto, la “irrotacionalidad” corresponde en cierto modo a la ausencia de remolinos. Creerse que esta situación representa la realidad física de los fenómenos que nos son familiares, depende de la fe de cada uno. Lo cierto es que para este tipo de fluidos se pueden obtener algunos resultados matemáticos y algunas explicaciones cualitativas.

Por (5.3), los fluidos irrotacionales deben cumplir  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla\|\vec{v}\|^2$ , y si además son estacionarios la primera de las ecuaciones de Euler (5.2) requiere  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla(p/\rho + \phi)$ . Por tanto, salvo constantes la presión es

$$p = -\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\|^2 - \rho\phi.$$

Éste es un caso particular del Teorema de Bernoulli en el que no sólo se tiene que la cantidad allí considerada es constante a lo largo de las trayectorias, sino en todos los puntos de fluido (que suponemos conexo). Según esto, la primera de las ecuaciones de Euler equivale a la determinación de la presión y por tanto sólo queda la ecuación de continuidad, a la que hay que añadir que el fluido es irrotacional y que no cambia con el tiempo (es estacionario).

La gran ventaja del nuevo modelo es que es lineal.

### Diccionario:

- Fluido estacionario e irrotacional  $\longrightarrow \vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ ,  $\text{div } \vec{v} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ .

Pasemos a ver ahora un curso de Variable Compleja en menos de diez líneas. Consideremos una función  $f$  que pasa números complejos a números complejos. Digamos que  $f$  es derivable en  $z_0$ , en el sentido de que existe el límite  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(z_0 + h) - f(z_0))/h$  con  $h$  complejo. A las funciones derivables complejas se les llama *funciones holomorfas*. Si separamos  $f(x + iy)$  en sus partes real e imaginaria, que suponemos  $C^1$ , y derivamos aplicando la regla de la cadena derivando con respecto a  $x$  e  $y$ ,

$$f(x + iy) = a(x, y) + ib(x, y) \Rightarrow f' = \frac{\partial a}{\partial x} + i\frac{\partial b}{\partial x}, \quad if' = \frac{\partial a}{\partial y} + i\frac{\partial b}{\partial y}.$$

Despejando  $f'$  e igualando, se deducen las llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

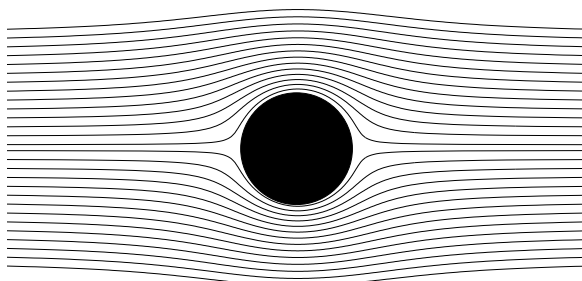
$$\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} = 0.$$

De forma que sin comerlo ni beberlo, hemos probado el siguiente resultado:

**Proposición 5.4.** Sea  $f(x + iy) = a(x, y) + ib(x, y)$  una función holomorfa, entonces  $\vec{v}(x, y, z) = (a(x, y), -b(x, y), 0) = (\operatorname{Re} \bar{f}, \operatorname{Im} \bar{f}, 0)$  satisface  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ .

Estos campos de velocidades corresponden a fluidos “bidimensionales” en el sentido de que la componente  $z$  no participa en el resultado y las partículas de fluido se desplazan en capas horizontales. El resultado anterior permite establecer una correspondencia biyectiva entre funciones holomorfas y fluidos estacionarios irrotacionales bidimensionales [Va 1].

Veamos un ejemplo interesante. Supongamos una corriente de aire que actúa sobre un cilindro de radio uno de manera que en un corte transversal vemos que el aire se mueve en la dirección positiva del eje  $X$  tropezando con el círculo unidad



Es razonable pensar que el aire lejos del círculo no se ve afectado por él, digamos  $\vec{v} \rightarrow (1, 0, 0)$  si  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ . Como habíamos visto, la condición de contorno natural es que el viento resbale en la frontera, de modo que  $\vec{v}$  es tangente a la circunferencia unidad en cada punto de ella. Si encontramos una función holomorfa en  $|z| > 1 - \epsilon$  con  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$  de forma que  $\overline{f(z)}$  defina un número complejo tangente a la circunferencia unidad para cada  $|z| = 1$ , tendremos “la solución”. Tal función es  $f(z) = 1 - z^{-2}$ . Nótese que  $|z| = 1 \Rightarrow \overline{f(z)} = 1 - \bar{z}^{-2} = 1 - z^2$  y con un dibujo se ve que  $1 - z^2$  y  $z$  son perpendiculares. Por tanto

$$\vec{v}(x, y, z) = (\operatorname{Re} \bar{f}, \operatorname{Im} \bar{f}, 0) = \left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, 0\right).$$

En cierto modo se puede probar que ésta es “la solución”, la única solución, siempre que supongamos que no hay circulación de aire alrededor del círculo (para el caso en que hay circulación, véase [Va 1]).

Que  $\overline{f(z(t))}$  sea tangente a la curva determinada por  $z(t)$  equivale a que  $f(z(t))z'(t)$  sea real (dibújense los números complejos). Escribiendo  $z(t) = g(w(t))$  se tiene que  $(f \circ g)(w(t))g(w(t))w'(t)$  es real, y por tanto  $\overline{(f \circ g)(w(t))g(w(t))}$  es tangente a la curva determinada por  $w(t) = g^{-1}(z(t))$ . Esto permite resolver el problema anterior para obstáculos cuya frontera es una curva diferente de la circunferencia unidad pero relacionada

con ella mediante una función holomorfa con inversa holomorfa. Según un conocido teorema de Riemann, todas las curvas regulares se pueden obtener de esta manera.

Recuérdese que las trayectorias asociadas al campo de velocidades son las soluciones del sistema autónomo  $d\vec{x}/dt = \vec{v}$ . También las funciones holomorfas nos ayudan a calcularlas.

**Proposición 5.5.** *Sea  $\vec{v} = (Re \bar{f}, Im \bar{f}, 0)$  y  $F$  una función holomorfa tal que  $F' = f$ , entonces las trayectorias cumplen  $Im F(x(t), y(t)) = cte$ .*

DEM.: Sea  $f = a + ib$  y  $F = A + iB$ . Derivando  $F = F(x + iy)$  con respecto a  $x$  e  $y$ , se tiene  $\partial B/\partial x = b$ ,  $\partial B/\partial y = a$ . Así pues

$$\left. \begin{array}{l} dx/dt = a \\ dy/dt = -b \end{array} \right\} \Rightarrow b \frac{dx}{dt} + a \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Por la regla de la cadena esto implica  $B = B(x(t), y(t)) = cte$ . ■

Consideremos como antes una corriente de aire con velocidad en el infinito  $\vec{v} = (1, 0, 0)$  que choca en el plano  $XY$  con un obstáculo, no necesariamente circular, representado por un dominio simplemente conexo (sin agujeros)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  con frontera regular. Como habíamos visto, las partículas de aire ejercen una fuerza sobre el obstáculo, el empuje, cuya proyección en el plano  $XY$  (sus dos primeras coordenadas) es

$$\vec{F} = \left( - \int_{\partial\Omega} (p, 0) \cdot \vec{dl}, - \int_{\partial\Omega} (0, p) \cdot \vec{dl} \right).$$

Si  $C \subset \mathbb{R}^2$  es una curva cerrada que rodea al objeto se llama *circulación* a la integral de la velocidad a lo largo de  $C$  recorrida en sentido positivo, que denotaremos con  $\Gamma$ . El siguiente resultado implica que  $\Gamma$  está íntimamente relacionado con la fuerza de empuje.

**Teorema 5.6 (Kutta-Zhukovskii).** *Bajo las hipótesis anteriores la fuerza de empuje es*

$$\vec{F} = (0, -\rho\Gamma).$$

DEM.: Escribiendo como antes  $f = a + ib$ , se tiene  $p = -\frac{1}{2}\rho(a^2 + b^2) + cte$ . Si  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  es una parametrización de  $\partial\Omega$ ,  $(dy, -dx)$  es el vector normal “infinitesimal”, y se tiene

$$\vec{F} = \left( \frac{\rho}{2} \int_{\partial\Omega} (a^2 + b^2) dy, -\frac{\rho}{2} \int_{\partial\Omega} (a^2 + b^2) dy \right).$$

En  $\partial\Omega$  se cumple  $-b/a = dy/dx$  porque la velocidad debe ser paralela al vector tangente. Por tanto

$$-2a^2 dy - 2abdx = -2b^2 dx - 2abdy = 0.$$

Añadiendo estas cantidades a las integrales anteriores

$$(5.6) \quad \vec{F} = \frac{\rho}{2} \left( \int_{\partial\Omega} (b^2 - a^2) dy - 2abdx, \int_{\partial\Omega} 2abdy + (b^2 - a^2) dx \right).$$

Si  $h(z) = i(a + ib)^2$ , entonces los campos que se integran en cada una de las coordenadas de (5.6) son  $(\operatorname{Re} \bar{h}, \operatorname{Im} \bar{h})$   $(\operatorname{Re} i\bar{h}, \operatorname{Im} i\bar{h})$ ; en particular son irrotacionales y, por el teorema de Stokes (o de Green), da igual integrar en  $\partial\Omega$ , que en una circunferencia  $C$  de radio  $R$  grande.

Un resultado de Variable Compleja (el desarrollo de Laurent) asegura que para  $|z| \geq R$  se tiene  $f(z) \sim a_0 + a_1/z$ , donde el símbolo “ $\sim$ ” indica que ambos miembros son iguales salvo añadir una cantidad menor en módulo que  $\text{cte}R^{-2}$ . La condición  $f(\infty) = 1$  implica  $a_0 = 1$ . Si  $a_1 = \alpha + i\beta$ , operando se tiene que si  $(x, y) \in C$

$$(5.7) \quad a \sim 1 + (\alpha x + \beta y)/R^2 \quad y \quad b \sim (\beta x - \alpha y)/R^2.$$

De aquí,

$$b^2 - a^2 \sim -a^2 \sim -1 - 2(\alpha x + \beta y)/R^2 \quad y \quad 2ab \sim 2(\beta x - \alpha y)/R^2.$$

Sustituyendo estas aproximaciones en (5.6) y tomando  $R \rightarrow \infty$ , el término de error desaparece, esto es,

$$\vec{F} = \frac{\rho}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} (I_1, I_2)$$

con  $I_1$  e  $I_2$  las integrales

$$\int_C \left( -1 - \frac{2}{R^2}(\alpha x + \beta y) \right) dy - \frac{2}{R^2}(\beta x - \alpha y) dx, \int_C \frac{2}{R^2}(\beta x - \alpha y) dy + \left( -1 - \frac{2}{R^2}(\alpha x + \beta y) \right) dx.$$

La parametrización  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$  conduce a  $I_1 = -4\pi\alpha$ ,  $I_2 = 4\pi\beta$ . Por tanto

$$(5.8) \quad \vec{F} = (-2\pi\alpha\rho, 2\pi\beta\rho).$$

Por la irrotacionalidad y la relación  $-b/a = dy/dx$  en la frontera, se siguen las igualdades siguientes:

$$\int_C bdx + ady = \int_{\partial\Omega} bdx + ady = 0.$$

Sustituyendo (5.7) en la primera integral y tomando  $R \rightarrow \infty$ , se sigue  $\alpha = 0$ . Así que

$a \sim 1 + \beta y/R^2$ ,  $b \sim \beta x/R^2$ . De esto y la definición de circulación,

$$\Gamma = \int_C a dx - b dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C (1 + \beta y/R^2) dx - \beta x/R^2 dy = -2\pi\beta.$$

Finalmente, sustituyendo en (5.8) se tiene el resultado. ■

Ahora podríamos emocionarnos y creer, como se puede leer en varios lugares, que ya sabemos por qué los aviones pueden volar: la fuerza de empuje es la sustentación que tira de ellos hacia arriba compensando la fuerza del peso. Pero lo cierto es que este resultado plantea más preguntas que respuestas [Hu-Ma]. Por ejemplo, que la primera coordenada de  $\vec{F}$  sea nula indica que no hay *fuerza de arrastre*, es decir, que al soplar un objeto no lo podemos mover. Esto no sólo es poco intuitivo sino una flagrante mentira. Nótese que por ejemplo en el caso anteriormente estudiado del círculo, la velocidad es igual en módulo por delante que por detrás, lo que de acuerdo con el Teorema de Bernoulli conlleva presiones iguales. Pero todos sabemos que cuando el aire o el agua inciden sobre un objeto se forma una estela en la parte trasera del objeto, allí las partículas de fluido pierden velocidad y se forman remolinos. No podremos explicar estos fenómenos adecuadamente sin tener en cuenta una característica importante que ha sido omitida en nuestro análisis: la viscosidad.

Aparte de la demoledora realidad, se puede dar un argumento teórico que muestra que no podemos aferrarnos demasiado al modelo. En el caso tridimensional, con un obstáculo  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  acotado y regular, se pueden utilizar técnicas de ecuaciones en derivadas parciales para probar que  $\vec{v}$  es constante salvo términos acotados por  $\text{cte } R^{-3}$ , con  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Un razonamiento parecido al empleado en la demostración del resultado anterior, demuestra matemáticamente que el empuje es nulo (en este caso no hay términos de orden  $R^{-1}$ ). Pero si la fuerza de empuje fuera nula, ningún avión tridimensional podría volar. Ésta es la paradoja de d’Alambert [Ma-Pu].



## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Indicar la relación entre las funciones holomorfas y los fluidos incompresibles irrotacionales estacionarios. b) Enunciar el Teorema de Kutta-Zhukovskii.

2) Según el principio de los vasos comunicantes, si un líquido está en equilibrio en un tubo abierto en forma de “U”, siempre el nivel de ambos coincide. Deducir esto del teorema de Bernoulli para fluidos irrotacionales empleando que la presión a ras de agua es la atmosférica. Los primeros barómetros de Torricelli eran esencialmente tubos de esta forma con un extremo tapado y no cumplía el principio de vasos comunicantes (la diferencia de alturas se relacionaba con la presión atmosférica). Tratar de explicar la paradoja.

3) Hallar el campo de velocidades correspondiente a la función holomorfa en el semiplano superior  $f(z) = (z - 1)^{-2}$ ; indicando también la forma de las trayectorias.

4) Comprobar que  $\vec{v} = (y/(x^2 + y^2), -x/(x^2 + y^2), 0)$  corresponde al campo de velocidades de un fluido irrotacional estacionario, y sin embargo sus trayectorias son circunferencias centradas en el origen y a lo largo de cualquiera de ellas  $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$ . ¿Cómo es posible que haya un remolino?

5) En el ejemplo mencionado en esta sección de un cilindro circular inmerso en un chorro de aire, hallar explícitamente las funciones  $x = f(y)$  cuyas gráficas dan la forma de las trayectorias en el primer cuadrante.

6) Si el cilindro circular inmerso en un chorro de aire con velocidad en el infinito  $(1, 0, 0)$  es de radio  $R$  en vez de 1, hallar el campo de velocidades.

7) Generalizar todavía más el problema anterior resolviéndolo cuando la velocidad en el infinito es  $(v_0, 0, 0)$  con  $v_0 > 0$ . Indicar geoméricamente cuál sería la solución si la velocidad en el infinito fuera  $(v_{01}, v_{02}, 0)$  con  $\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2} = v_0$ , y hallar la función holomorfa que le corresponde.

8) Un chorro de líquido cae desde el reposo y sin presión (sólo la atmosférica) desde una altura de 1 m. Calcular la velocidad de las partículas de fluido cuando llegan abajo. Explicar por qué la incompresibilidad implica que si el chorro no se disgrega en gotas, se debe ir estrechando.

9) Sea la función holomorfa en  $|z| > 1$  dada por  $f(z) = 1 - z^{-2} - iz^{-1}$ . Comprobar que el campo de velocidades correspondiente es tangente a la circunferencia unidad en cada punto de ella y su circulación es no nula alrededor de una curva que la rodee. Hallar el empuje que sufriría el cilindro circular correspondiente según el Teorema de Kutta-Zhukovskii, indicando si es hacia arriba (si se elevaría) o hacia abajo (si descendería).

10) Comprobar que las ecuaciones  $\text{div } \vec{v} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  para  $\vec{v} = (a(x, y), -b(x, y), 0)$  coinciden con las ecuaciones de Cauchy-Riemann para  $f(x + iy) = a(x, y) + ib(x, y)$ .

11) Demostrar que  $\text{div}$  y  $\text{rot}$  son operadores lineales, concluyendo que si  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son campos vectoriales que corresponden a fluidos irrotacionales y estacionarios, entonces  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$  también lo es.



## SECCIÓN 5.2

### Trabajos sugeridos a sólo 3 centavos (el precio de esta fotocopia)

#### De la sección:

- Aplicaciones de la Variable Compleja en Física.

#### Generales:

- Econometría.

### Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

*De este modo, en el estudio de las funciones de variables complejas, el analista, al lado de la imagen geométrica que es su instrumento habitual, encuentra muchas imágenes físicas que puede utilizar con el mismo éxito.*

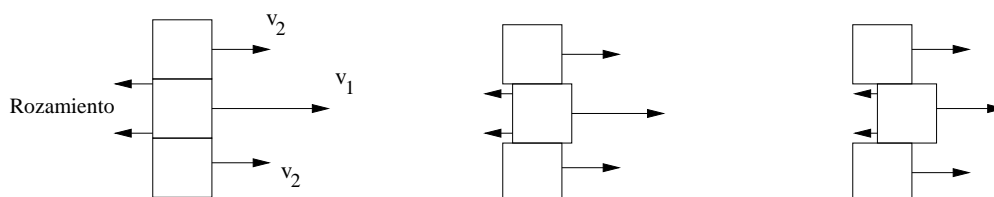
*Gracias a estas imágenes, puede ver de una ojeada lo que la deducción pura no le mostraría sino sucesivamente. Reúne así los elementos dispersos de la solución y, por una especie de intuición, adivina antes de poder demostrar. [Po] p. 102.*



### 5.3. Mares de hiel

Pensemos en el siguiente experimento que no es conveniente hacer ni siquiera en presencia de un adulto: Tomamos dos vasos idénticos, uno lleno de miel y otro de agua, y los volcamos repentinamente. Hay una gran diferencia en ambos casos. El agua cae enseguida mientras que a la miel le cuesta más salir del recipiente. La explicación no está en la densidad, de hecho la miel es algo más densa y al pesar más podríamos pensar que cae más rápidamente (aunque Galileo y nuestro profesor de Física se iban a echar las manos a la cabeza). Parece que la razón es que la miel se pega a las paredes del recipiente, y terminado el experimento hay que fregarlo bien. Pero esto no explica por qué la miel de la parte central también cae despacio. Hay una especie de rozamiento de la miel consigo misma que impide que partículas rápidas y lentas sean vecinas.

Según el modelo introducido para obtener las ecuaciones de Euler, suponiendo el fluido dividido en pequeños cubitos, sobre cada uno de ellos actúan unas fuerzas de presión perpendiculares a las caras. Ahora queremos introducir una fuerza de rozamiento que frene a un cubito si los adyacentes van mucho más despacio. Esto es como decir que los elementos de fluido son pegajosos, *viscosos*.



Es natural suponer que este rozamiento será proporcional a la tasa de variación de la velocidad, es decir, que será 100 veces más enérgico tratando de evitar una variación de  $7m/s$  con respecto a los elementos adyacentes, que una de  $0'07m/s$ . La fuerza de rozamiento actuará en la superficie de cada elemento de fluido ya que es ahí donde roza con otros elementos. Según lo dicho parece sensato considerar en nuestro balance de fuerzas, además de las de presión y las externas, otra dada por (véase en [Va 1] una deducción a partir de primeros principios)

$$\vec{F}_3 = \nu \int_{\partial V} \nabla \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

donde  $\nu$  es una constante positiva llamada *viscosidad*, que depende del apego que tengan las partículas del fluido a que su velocidad no desentone con las de las partículas de los alrededores. La notación empleada significa que el gradiente se aplica a cada coordenada y se integra el resultado. Lo que estamos diciendo es que el rozamiento es proporcional a la

suma (integral) de todas las variaciones de la velocidad. La constante de proporcionalidad es la viscosidad y ésta es más de mil veces mayor en la miel que en el agua, por eso su caída se ve en los instantes iniciales sensiblemente ralentizada.

El modelo de fluido correspondiente a las ecuaciones de Euler no contempla esta fuerza, lo cual da cuenta de algunas de sus consecuencias poco intuitivas e irreales. Parafraseando a J. von Neumann [**Fe-Le-Sa**], utilizar exclusivamente las ecuaciones de Euler equivale a estudiar el *agua seca*. La viscosidad está detrás de los fenómenos turbulentos que parecen continuamente en Aerodinámica e Hidrodinámica. Sin ella, en la mayoría de los casos sólo obtendremos explicaciones cualitativas

Diccionario:

- Fuerza debida a la viscosidad  $\rightarrow \vec{F}_3 = \nu \int_{\partial V} \nabla \vec{v} \cdot d\vec{S}$ .
- Equilibrio de fuerzas  $\rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ .

Ya sabíamos que  $\vec{F} = \int_V \rho (\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v})$ ,  $\vec{F}_1 = - \int_V \nabla p$  y  $\vec{F}_2 = - \int_V \rho \nabla \phi$ . Ahora, por el teorema de la divergencia

$$\vec{F}_3 = \nu \int_V \operatorname{div} \nabla \vec{v} = \nu \int_V \Delta \vec{v}.$$

El equilibrio de fuerzas  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  junto con la ecuación de continuidad lleva ahora a las *ecuaciones de Navier-Stokes* (para fluidos incompresibles)

$$(5.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \rho^{-1} \nabla p - \nu \Delta \vec{v} + \nabla \phi = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

En las ecuaciones de Euler la condición de frontera natural era que el fluido se deslizase por el obstáculo o la frontera, es decir, que no hubiera componente normal de la velocidad. Ahora, como suponemos que las partículas son “pegajosas”, en los puntos de contacto con un obstáculo o frontera inmóviles, se debe tener  $\vec{v} = \vec{0}$  (*condición de no deslizamiento*). Los y las que se afeiten pueden hacerse una idea de ello, notando que los pequeños vellos muchas veces se rebelan al intentar que el agua del grifo los arrastre.

Si el estudio matemático de las ecuaciones de Euler no está completado, en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes la situación es mucho más primaria. De hecho pertenece a los *Problemas del Milenio* del Clay Mathematics Institute, concediéndose un premio de

un millón de dólares para el que sea capaz de resolver en sentido afirmativo o negativo los problemas básicos de existencia y regularidad de soluciones. Además las ecuaciones de Navier-Stokes son especialmente refractarias a los métodos numéricos, ya que la fenomenología al uso sugiere que hay una fina “capa límite”, de la que hablaremos más adelante, donde el campo de velocidades es casi discontinuo (véase un ejemplo sencillo e ilustrativo en [Va 1] §14.2).

Para ver cómo funcionan las ecuaciones de Navier-Stokes en relación con las de Euler, pensemos en una situación idealizada (demasiado) del mar cuando sopla un viento uniforme paralelo a la costa. Supongamos que esto hace que todas las partículas de la superficie, representada por  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , tengan inicialmente velocidad  $(v_0, 0)$ , y queremos saber su evolución cuando el viento deja de soplar de pronto. La simetría del problema sugiere buscar una solución del tipo  $\vec{v}(x, y, t) = (u(y, t), 0)$ . Se puede comprobar que la única solución de esta forma de las ecuaciones de Euler (5.9) con  $\vec{v}$  y  $p$  acotadas y regulares, bajo la condición inicial  $\vec{v}(x, y, 0) = (v_0, 0)$  y  $\vec{v} \cdot \vec{n}(x, 0, t) = 0$ ; es la solución constante  $\vec{v}(x, y, t) = (v_0, 0)$ . Es decir, como no hay rozamiento las partículas siguen su curso sin molestarse unas a otras y sin perder velocidad. En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, la condición natural de no deslizamiento es que la costa sujete al mar, y el rozamiento se irá transmitiendo de manera que la velocidad pasa gradualmente de cero en la costa a  $v_0$  en el infinito de forma cada vez más suave. Por efecto del roce con la costa, en ausencia de viento, el mar tiende a pararse.

**Proposición 5.7.** *La única solución de la forma  $\vec{v}(x, y, t) = (u(y, t), 0)$  de las ecuaciones de Navier-Stokes (5.9) en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  con  $\phi = 0$  y con  $\vec{v}$  y  $p$  acotadas y regulares, verificando las condiciones de contorno*

$$\vec{v}(x, y, 0) = (v_0, 0), \quad \vec{v}(x, 0, t) = (0, 0), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \vec{v}(x, y, t) = (v_0, 0),$$

para  $y, t > 0$ ; es

$$\vec{v}(x, y, t) = \left( \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-v^2} dv, 0 \right).$$

DEM.: Desarrollando (5.9), se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Por la segunda ecuación,  $p$  sólo depende de  $x$  y  $t$ . Como  $\partial u / \partial t - \nu \partial^2 u / \partial y^2$  sólo depende

de  $y$  y  $t$ , la primera implica que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho f(t).$$

Integrando,  $p(x, t) = -\rho f(t)x + g(t)$ , y para que sea acotada, necesariamente  $f \equiv 0$ . De forma que  $u$  satisface una “ecuación del calor”

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(y, 0) = v_0, \quad u(0, t) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(y, t) = v_0,$$

con  $t, y > 0$ . Es fácil comprobar que la función del enunciado resuelve este problema (compárese con [Dy-Mc] p.109). La unicidad se sigue por un principio del máximo. ■

Nótese que cuando  $y \rightarrow \infty$ ,  $t > 0$ ,  $\vec{v}(x, y, t)$  tiende a  $(v_0, 0)$  con rapidez exponencial ( $\int_0^\infty e^{-v^2} dv = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ , [Gr-Ry] 3.323.2). Apenas hay diferencia con la solución de las ecuaciones de Euler si  $y/\sqrt{\nu t} > \text{cte}$ . Es decir, en tiempo  $t$ , el roce de la costa sólo habrá afectado sensiblemente a la capa  $0 < y \leq \text{cte}\sqrt{\nu t}$ .

La no linealidad de las ecuaciones (5.9) implica que hay que tener cuidado al tratar de hacer experimentos a escala: Un avión comercial de 50 metros de longitud a  $900 \text{ km/h}$  no volará igual que una reproducción de medio metro en un túnel de viento con aire a  $9 \text{ km/h}$ . El siguiente sencillo pero importante resultado, cuya prueba se reduce a un cálculo trivial, indica cuál es la ley de escala.

**Lema 5.8** (Reynolds 1883). *Si  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  satisface (5.9), entonces dadas constantes  $\alpha$  y  $\beta$ , el campo de velocidades  $\beta^{-1}\vec{v}(\alpha\vec{x}, \alpha t/\beta)$  también verifica (5.9) siempre que  $\nu$  se sustituya por  $\nu\alpha^{-1}\beta^{-1}$ , y  $\phi(\vec{x})$  y  $\rho^{-1}p(\vec{x}, t)$  por  $\beta^{-2}\phi(\alpha\vec{x})$  y  $\beta^{-2}\rho^{-1}p(\alpha\vec{x}, \alpha t/\beta)$ .*

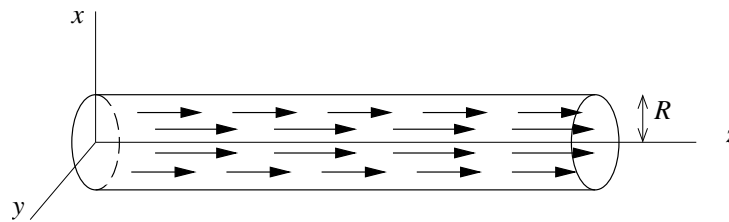
De esta forma, si queremos estudiar un objeto de longitud  $L$  inmerso en un fluido a velocidad  $V$ , podemos reducirlo todo a escala unitaria con  $\alpha = L$ ,  $\beta = V$  (nótese que  $\|\vec{x}\| \approx 1 \Rightarrow \|\alpha\vec{x}\| \approx L$  y  $\|\vec{v}\| \approx V \Rightarrow \|\beta^{-1}\vec{x}\| \approx 1$ ). A la cantidad adimensional  $Re = \nu^{-1}LV$ , se le llama *número de Reynolds*. Según la teoría de la capa límite de Prandtl (lo de “teoría” es en gran medida una aspiración), cuando el número de Reynolds es grande, entonces la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes se comporta como la de las ecuaciones de Euler fuera de una delgada capa de espesor aproximado  $Re^{-1/2}$ . Esta capa es responsable de la generación de turbulencia y vorticidad [Hu-Ma], [Va 1].

Para terminar, veamos qué nos dicen las ecuaciones de Navier-Stokes acerca del flujo estacionario de un fluido a través de una tubería. En el caso de las ecuaciones de Euler, vimos que las variaciones de presión estaban asociadas a estrechamientos de la tubería,

pero ahora será necesaria una variación de presión para que haya flujo en ausencia de fuerzas externas. La razón es el “rozamiento” de las paredes.

Digamos que la tubería se extiende a lo largo del eje  $Z$  y es el cilindro  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Suponemos el flujo estacionario y que la velocidad sigue la dirección de la tubería. Esto, la simetría del problema y la adherencia en las paredes, sugieren

$$(5.10) \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = (0, 0, u(\sqrt{x^2 + y^2})) \quad \text{con } u(R) = 0.$$



**Teorema 5.9 (Poiseuille 1840).** Las soluciones de la forma (5.10) de las ecuaciones de Navier-Stokes (5.9) con  $\phi = 0$ , tienen

$$u(r) = \frac{\gamma}{4\nu\rho}(R^2 - r^2)$$

donde  $\gamma > 0$  es una constante que indica la caída de presión por unidad de longitud, esto es,  $p = -\gamma z + \text{cte}$ .

DEM.: La ecuación de continuidad se cumple trivialmente, mientras que la primera ecuación implica, coordenada a coordenada,

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\rho^{-1}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta f \quad \text{con } f(x, y) = u(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

De aquí se deduce que  $p$  no depende de  $x$  ni de  $y$ . Como  $\Delta f$  es función de  $x$  e  $y$ , mientras que  $\rho^{-1}\partial p/\partial z$  lo es a lo más de  $z$ , se deduce que  $\partial p/\partial z$  es una constante, que llamaremos  $-\gamma$ . Como se afirma en el enunciado,  $p = -\gamma z$  salvo constantes. Por otra parte, tras unos cálculos, o inmediatamente usando la fórmula del laplaciano en polares ([Va 1] Apéndice II, [Gr-Ry] 10.612.5)

$$\Delta f(x, y) = r^{-1}(ru')'(r) \quad \text{con } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Al resolver la ecuación diferencial  $0 = \rho^{-1}\gamma + \nu r^{-1}(ru')'$  se obtiene la solución general

$$u(r) = -\frac{\gamma}{4\nu\rho}r^2 + A \log |r| + B.$$

Para que  $\vec{v}$  sea diferenciable en  $x = y = 0$ , el centro de la tubería, se debe tener  $A = 0$ , mientras que  $u(R) = 0$  implica  $B = \gamma R^2 / (4\nu\rho)$ . ■

Como es intuitivo, la velocidad es mayor en el centro de la tubería porque es la zona más alejada de los bordes, donde se produce el rozamiento. Fijada la velocidad central  $u(0)$ , si  $\nu$  o  $\rho$  crecen,  $\gamma$  también debe crecer. Es decir, necesitamos hacer más presión para desplazar por una tubería fluidos más viscosos y densos. Si  $R$  disminuye, el centro estará más cerca de los bordes, con lo cual no sólo disminuirá la sección, sino que aumentará el rozamiento, y con el mismo esfuerzo el flujo será menor. Concretamente, sea  $Q$  el flujo a través de cualquier sección transversal, esto es,  $Q = \int_D \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$  con  $D$  el disco  $\{x^2 + y^2 \leq R, z = \text{cte}\}$ . Entonces con la notación anterior, un cálculo prueba:

**Corolario 5.10 (Ley de la cuarta potencia).** *El flujo viene dado por*

$$Q = \frac{\pi\gamma}{8\nu} R^4.$$

Podemos pensar en términos médicos las consecuencias de la dependencia altamente no lineal en  $R$ . Si queremos conservar el flujo de sangre a través de una arteria que se ha estrechado a la mitad (*¿colesterol?*) el gradiente de presión  $\gamma$  debe multiplicarse por 16, lo que producirá una notable hipertensión [Mz]. El ejemplo no es históricamente anecdótico, ya que Poiseuille desarrolló sus investigaciones para entender el flujo de la sangre a través de los capilares.

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Indicar en qué consiste la condición de no deslizamiento y por qué es natural. b) Definir, al menos intuitivamente, la viscosidad.

2) Queremos hacer pruebas a escala para construir una avioneta de  $10\text{ m}$  de longitud que vaya a  $300\text{ km/h}$ . En nuestro túnel de viento podemos emplear un gas enrarecido cuya viscosidad es el 25% de la del aire, y hacer que se mueva hasta a  $150\text{ km/h}$ . Estimar la longitud del modelo a escala de la avioneta que podríamos usar.

3) Comprobar que el campo de velocidades  $(\int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-v^2} dv, 0, 0)$  realmente satisface las ecuaciones de Navier-Stokes con  $p = \phi = 0$ .

4) Buscar el análogo de la ley de Poiseuille para un fluido que fluye entre los planos  $z = 0$  y  $z = \delta$  de forma que la velocidad sea constante en cada plano intermedio paralelo a ellos, y que además sea siempre paralela al eje  $OX$ .

5) Si hacemos pasar un chorro a presión por una tubería cilíndrica y fotografiamos el momento en el que sale, hallar qué forma tendría teóricamente usando la ley de Poiseuille.

6) En ausencia de gravedad, un astronauta puede beberse su lata de refresco ( $330\text{ ml}$ ) en dos minutos aspirando por una pajita. Suponiendo aplicable la ley de la cuarta potencia, calcular cuánto tiempo tardaría si aspirarse con igual presión pero el radio de la pajita se redujera a la mitad.

7) En ausencia de viscosidad habíamos probado la fórmula  $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2(S_1^2 S_2^{-2} - 1)$  cuando una tubería se estrecha. Tratar de argumentar, al menos intuitivamente, por qué tipo de desigualdad (mayor o menor) habría que reemplazar la igualdad cuando hay viscosidad.

8) Estudiar en qué cambia la ley de Poiseuille si se supone que  $\phi$  es el potencial gravitatorio  $gz$  y  $\vec{v}$  sigue siendo de la forma  $(0, 0, u(\sqrt{x^2 + y^2}))$ . Estudiar también los cambios si el tubo se traslada a velocidad  $v_0$  por el eje  $OZ$ , de forma que la condición de no deslizamiento pase a ser  $u(R) = v_0$ .

9) Aparentemente, según la ley de la cuarta potencia, si  $\nu \rightarrow 0$  el flujo tiende a infinito. Esto es físicamente ilógico e incongruente con el hecho de que formalmente las ecuaciones de Euler se obtienen a partir de las de Navier-Stokes cuando  $\nu = 0$ . Explicar esta paradoja.

10) Comprobar que si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es radial, esto es,  $f(x, y) = u(r)$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; entonces  $\Delta f = r^{-1}(ru)'$ .

11) Probar que la vorticidad  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$  verifica  $\partial \vec{\omega} / \partial t = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) + \nu \Delta \vec{\omega}$ .

## SECCIÓN 5.3

**Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros** (el precio de esta fotocopia)De la sección:

- El movimiento de las olas.
- Resistencia del aire, ley de Stokes.
- Modelos de circulación de la sangre.

Generales:

- Geometría proyectiva y visión artificial.

**Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*¿Cómo es necesario tratar las ecuaciones de la física matemática? ¿Debemos simplemente deducir de ellas todas las ecuaciones y considerarlas como realidades intangibles? Lejos de ello; lo que deben enseñarnos, sobre todo, es lo que se puede y se debe cambiar en ellas. Así es como obtendremos de las mismas algo útil. [Po] p.98.*



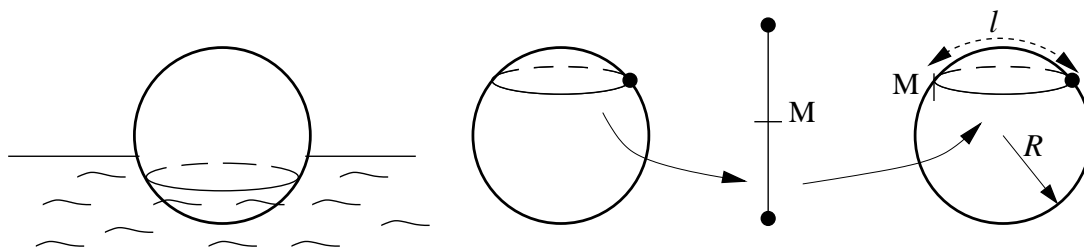
## ¡Eureka!

### Material:

- Una pelota pequeña.
- Un cazo con agua.
- Una regla.
- Un cordel.
- Un rotulador.
- Un peso de cocina.
- Un calibre o nonio (opcional).

Dejemos la pelota en el cazo de agua y marquemos la línea de flotación con el rotulador (para ello será conveniente sujetar la pelota con la mano sin hundirla y quizá marcar sólo algunos puntos que pueden unirse más fácilmente con ella fuera del agua).

En la circunferencia que conforma el paralelo determinado por la línea de flotación marquemos dos puntos diametralmente opuestos. Para ello podemos simplemente extender el cordel sobre ella, desenrollarlo, marcar el punto medio y volverlo a enrollar.



Entre estos dos puntos situemos el cordel lo más tenso posible de manera que describa un arco de meridiano que pase por la parte antes sumergida y midámoslo. Midamos también el radio de la pelota (con el nonio esto es trivial, también se puede utilizar el cordel y a partir de la longitud del meridiano hallar el radio). Los valores para la longitud de arco y el radio correspondientes a un experimento real\* fueron  $l = 8'9 \text{ cm}$  y  $R = 2'8 \text{ cm}$ .

---

\* *N. del A.* Empleé una pelota de goma, parecida a las que se les suelen dar a los perros, algo menor que una de tenis. Marcar la línea de flotación fue más dificultoso de lo previsto. Señalé algunos puntos y si al volver a poner la pelota en el cazo no quedaban a ras de agua los corregía. Después completé aproximadamente la circunferencia ayudándome de un papel puesto a modo de cucurucho.

Apliquemos ahora la fórmula

$$\frac{4\pi}{3}R^3\left(3 - 2\operatorname{sen}^2\frac{l}{4R}\right)\operatorname{sen}^4\frac{l}{4R}$$

con  $l$  y  $R$  en centímetros (que con los datos citados resulta 47'25). Podemos comprobar utilizando el peso de cocina que esto coincide con bastante precisión con el peso de la pelota en gramos (en nuestro caso  $\approx 45\text{ gr}$ ). Es decir, podemos saber cuánto pesa una bola ligera sin más que examinar cuánto flota.

Explicación: Para que la pelota esté en equilibrio, el empuje debe coincidir en módulo con el peso. Según el Principio de Arquímedes, esto equivale a

$$mg = g \int_V \rho.$$

En el sistema CGS (centímetros, gramos, segundos) la densidad del agua es  $\rho = 1$ , y consecuentemente la fórmula anterior implica que la masa coincide con el volumen. Lo único que hay que hacer es recordar los viejos tiempos de Cálculo II y Cálculo III, comprobando que la integral triple para hallar el volumen del segmento esférico que subtiende un arco de longitud  $l$ , da como resultado la fea fórmula en términos de  $l$  y  $R$  antes enunciada.

## Un soplo de aire

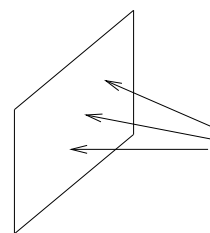
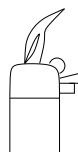
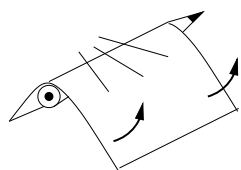
### Material:

- Una servilleta.
- Un lápiz.
- Una tarjeta de visita.
- Un mechero.

Veamos dos sencillas pero sorprendentes experiencias. Para la primera, sujetemos con los dedos la servilleta de papel paralelamente a una de sus aristas, y cerca de ella, a lo largo del lápiz; de manera que el resto de la servilleta caiga ligeramente con respecto a la horizontal por su propio peso.

Si soplamos perpendicularmente al lápiz en la dirección tangencial a la superficie de la servilleta, cabría esperar que ésta cayese todavía más por la fuerza del aire, sin embargo en contra de toda intuición la servilleta asciende levemente.

Para la segunda, pongamos la tarjeta de visita frente a nosotros, a unos 20 cm, y el mechero encendido detrás de ella. Cuando soplamos con fuerza contra la tarjeta, la llama del mechero se acerca hacia nosotros. Si variamos la posición del mechero, manteniéndolo siempre detrás de la tarjeta, seguiremos observando una desviación de la llama que contradice lo que cabría esperar.



Explicación: En ambos casos se puede dar una explicación cualitativa por medio del Teorema de Bernoulli. Recuérdese que, según éste, a lo largo de las trayectorias se debe cumplir

$$\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\| + p = \text{cte.}$$

Y bajo la hipótesis de irrotacionalidad, esta constante es independiente de la trayectoria.

En el primer experimento, una mayor velocidad del aire en la cara de arriba genera una depresión que eleva la servilleta. En el segundo experimento, el aire del soplido después de chocar con la tarjeta de visita se dispersa tangencialmente a ésta. La velocidad grande en comparación con las partículas vecinas de la parte de atrás, crea de nuevo una depresión que las aspira hacia adelante.

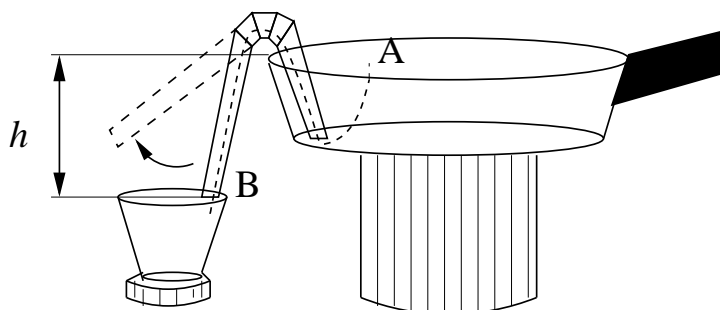
En realidad, como ya hemos mencionado, esta explicación es sólo cualitativa, porque los fenómenos son más complicados, y hay turbulencias que sólo se podrían entender teniendo en cuenta la viscosidad del aire.

## Rebosa el recipiente

### Material:

- Una sartén lo más amplia posible.
- Una pajita de refresco articulada o un tubo flexible de goma.
- Un reloj con segundero o cronómetro.
- Un vaso.

Llenemos la sartén con agua y pongámosla sobre algún soporte que la mantenga a cierta altura. Adosemos la pajita articulada o el tubo a la sartén de manera que un extremo esté sumergido hasta el fondo y el otro (el más largo) asome por fuera a modo de sifón. Para que no se mueva podemos solicitar la ayuda de alguien o utilizar una pinza que oprima muy poco. Aspirando por la pajita se consigue que el agua comience a salir y caiga en un vaso colocado justo a continuación y de capacidad despreciable en comparación con la de la sartén.

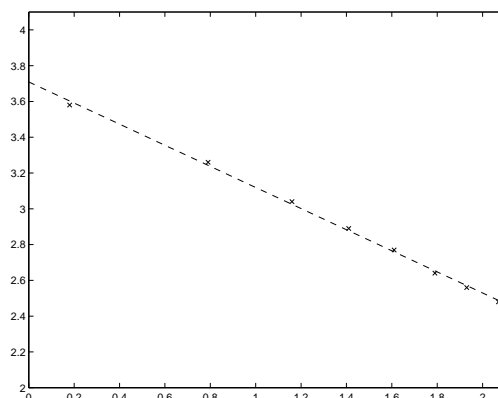


Inclinando la pajita o moviendo el tubo podemos hacer que varíe la diferencia de alturas,  $h$ , entre la superficie del agua de la sartén y el orificio de salida de la pajita. Si con ayuda del reloj (y quizá de una calculadora) hallamos el logaritmo del tiempo  $T$  que tarda en llenarse y rebosar en función del logaritmo de  $h$  para unos cuantos valores, resulta que al representar los puntos correspondientes, éstos se sitúan aproximadamente en una recta cuya pendiente está cercana a  $-1/2$ .

Por ejemplo, en un experimento real se obtuvo la tabla

$\log h \rightarrow$	2'07,	1'93,	1'79,	1'61,	1'41,	1'16,	0'79,	0'18
$\log T \rightarrow$	2'48,	2'56,	2'64,	2'77,	2'89,	3'04,	3'26,	3'58

que está aproximada por la recta  $y = -0'59x + 3'71$  con un error que típicamente es del orden de una centésima.



Explicación: De nuevo apelaremos al Teorema de Bernoulli, ésta vez en un caso que da lugar al llamado *Teorema de Torricelli*.

El agua que está más arriba va empujando a la de debajo, con lo cual es natural suponer que las trayectorias conectan un punto  $A$  situado en la superficie del agua de la sartén, con un punto  $B$  en el orificio de salida. Por la gran capacidad de la sartén podemos suponer que el nivel del agua no se modifica significativamente al llenarse el vaso y se tiene  $v_A = 0$ . Por otra parte, tanto en  $A$  como en  $B$  la presión que actúa es la atmosférica (el líquido no está “comprimido”),  $p_A = p_B = p_{\text{atm}}$ . Por el Teorema de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A + \rho g h_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_B + \rho g h_B \Rightarrow v_B^2/h = 2g.$$

Con lo cual el agua sale con la misma velocidad que alcanzaría un objeto soltado en caída libre desde altura  $h$  al transformar su energía potencial en cinética (*Teorema de Torricelli*, nótese que  $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$ ). Por otra parte, dicha velocidad es inversamente proporcional al tiempo que tarda en llenarse el vaso (aunque la relación entre velocidad y flujo no es tan fácil como pudiera pensarse porque inicialmente las velocidades no son todas perpendiculares a la sección de la pajita [**Fe-Le-Sa**]). Es decir,  $hT^2 = \text{cte}$ , y tomando logaritmos se obtiene que  $\log T$  depende linealmente de  $\log h$  con pendiente  $-1/2$ .

Nótese que experimentalmente, al relacionar  $\log h$  y  $\log T$  hemos obtenido una recta de pendiente  $-0'59$  en lugar del valor teórico  $-0'5$ , esto es, hay un error relativo de algo más del 15%. Es natural algún tipo de error sensible debido a que no consideramos la viscosidad, pero es extraño que la pendiente sea menos que la teórica, ya que la viscosidad debería ralentizar el flujo. El error se reduce a la mitad si descartamos la primera medida (¿error experimental?), pero que sea por defecto en vez de por exceso permanece entre los misterios de los experimentos caseros.