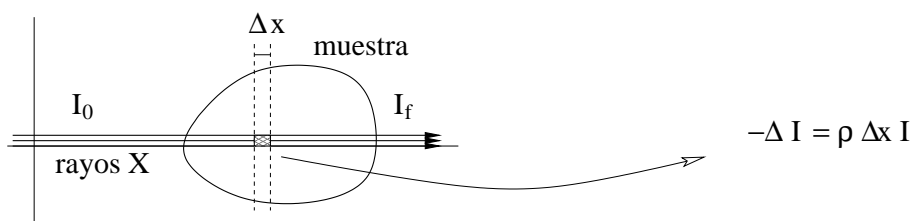


## 3. Tomografía

### 3.1. Sala de espera, fase primera

Desde los años setenta se han desarrollado diversos métodos [Na] para poder *rajar* a la gente de forma virtual (desafortunadamente los métodos reales son más antiguos), lo cual es de gran utilidad en la práctica médica. El método más espectacular quizá sea la Resonancia Magnética Nuclear. Su complejidad, aunque no extrema, la saca fuera del contenido del curso. A cambio veremos en esta sección, parcialmente plagiada de [Ch], un sencillo método llamado de *reconstrucción algebraica*, y en la sección posterior otro más eficiente y más próximo al empleado habitualmente cuando se realiza una TAC (tomografía axial computerizada). En este tipo de tomografías se emplea la atenuación que sufren los rayos X al atravesar los tejidos, lo que nos lleva a introducir un pequeño *modelín* previo, el cual es una versión simplificada de la llamada *ecuación del transporte* [Ra-Ka].

Ya sabemos que ni la persona más robusta puede detener los rayos X (que si se enfadan incluso pueden convertirle en un superhéroe o algo peor), pero las luces y sombras de las radiografías prueban que hasta el más alfeñique es capaz de atenuarlos un poco. Parece claro que cuando una muestra es atravesada por un fino haz de rayos X de intensidad  $I$ , la disminución de dicha intensidad depende de la densidad  $\rho$  de la muestra (el plomo es más opaco a los rayos X que el aire) y de su grosor (un muro de dos metros atenúa menos que otro de cinco). Si dividimos la zona atravesada por los rayos en pequeñas rodajas transversales de tamaño infinitesimal, en las que la densidad sea prácticamente constante, es natural suponer que la proporción en que disminuye la intensidad es directamente proporcional a ambas cantidades, digamos con constante de proporcionalidad uno mediante una elección adecuada de las unidades.



Pasando al límite en la anchura de las rodajas:

$$-dI = \rho I dx \Rightarrow I' = -\rho I \Rightarrow -(\log I)' = \rho.$$

De modo que si  $I_0$  es la intensidad inicial (antes de entrar en la muestra) e  $I_f$  la final (después de salir), integrando se tiene

$$\log I_0 - \log I_f = \int \rho.$$

Evidentemente, si los rayos siguen una recta  $L$ , en vez del eje  $OX$ , la integral anterior es la integral de línea a lo largo de  $L$ .

En definitiva, lo que debemos tener en mente es que midiendo intensidades iniciales y finales podemos saber las integrales de la densidad a lo largo de las líneas rectas que siguen los rayos.

Los algoritmos de reconstrucción algebraica comienzan considerando una versión discretizada (digitalizada) de la sección que se quiere examinar. Con tal fin, introducimos una malla cuadrada de  $M \times M$  cuadraditos (*pixels*). Si la malla es suficientemente fina, la densidad es aproximadamente constante en cada cuadradito. Así que se puede considerar que hay una matriz de densidades  $M \times M$  donde el elemento  $\rho_{ij}$  es la densidad en el cuadradito  $c_{ij}$ . Por otra parte, la atenuación de un rayo a lo largo de una recta  $L$  permite conocer  $\int_L \rho$  que, en esta versión digitalizada, se aproxima por una suma de Riemann, y de hecho coincide con ella suponiendo  $\rho$  es realmente constante en cada  $c_{ij}$ ,

$$(3.1) \quad \log(I_0/I_f) = \int_L \rho = \sum \rho_{ij} |c_{ij} \cap L|$$

Diccionario:

- Sección cuadrada digitalizada  $\longrightarrow$  malla formada por cuadrados  $c_{ij}$ .
- Densidad del pixel  $ij$  constante  $\longrightarrow \rho|_{c_{ij}} = \rho_{ij}$ .
- $\log(I_0/I_f) = \int \rho \longrightarrow \log(I_0/I_f) = \sum \rho_{ij} |c_{ij} \cap L|$ .

Aparentemente el problema ya está resuelto: queremos calcular el valor de las incógnitas  $x_1 = \rho_{11}, x_2 = \rho_{12}, x_3 = \rho_{13}, \dots, x_{M^2} = \rho_{MM}$  y, según (3.1), para cada rayo tenemos una ecuación lineal en estas incógnitas; basta tomar un número suficiente de rayos y resolver el sistema lineal correspondiente.

	rayo 1	rayo 2	
$\rho_{11}$	$\rho_{12}$	$\rho_{13}$	$\rho_{14}$
$\rho_{21}$	$\rho_{22}$	$\rho_{23}$	$\rho_{24}$
$\rho_{31}$	$\rho_{32}$	$\rho_{33}$	$\rho_{34}$
$\rho_{41}$	$\rho_{42}$	$\rho_{43}$	$\rho_{44}$

$$\log \frac{I_0^1}{I_f^1} = h(\rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{31} + \rho_{41})$$

$$\log \frac{I_0^2}{I_f^2} = h\sqrt{2}(\rho_{41} + \rho_{32} + \rho_{23} + \rho_{14})$$

... etc ...

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} = b_1 \\ x_{13} + x_{10} + x_7 + x_4 = b_2 \\ \dots \text{ etc } \dots \end{cases}$$

Puede que esto resuelva el problema desde el punto de vista teórico, pero la aplicación práctica requiere ir más allá. Supongamos por ejemplo que deseamos tener una resolución

comparable a la de un monitor y para ello imaginamos una malla de  $1000 \times 1000$  *pixels* que contiene la sección del cuerpo humano que vamos a examinar (en [Ka-SI] se apunta  $256 \times 256$  *pixels* como una resolución posible en la práctica, y por la imágenes allí mostradas  $128 \times 128$  pudiera ser a veces deficiente). Entonces habrá  $10^6$  incógnitas  $\rho_{ij}$  que calcular. El sistema lineal correspondiente tendrá una matriz de  $10^6 \times 10^6 = 10^{12}$  elementos lo cual podría causar algunos problemas de memoria en ordenadores convencionales si los tenemos que almacenar todos (necesitaríamos algo comparable a un *Terabyte* de memoria libre). Las estimaciones generales del número de operaciones para resolver un sistema lineal por eliminación de Gauss es del orden del cubo del número de variables, en nuestro caso  $10^{18}$ . A una velocidad de  $1\text{ GHz}$  esto llevaría del orden de 30 años (lo que no ayudaría mucho a reducir las listas de espera de la Seguridad Social).

Necesitamos, por tanto, un método maravilloso que requiera incomparablemente menos operaciones que el de Gauss. Quizá tal método no exista en general (si no se le ocurrió a Gauss...) pero aquí estamos considerando sistemas muy especiales y hay esperanzas sobre todo si nos contentamos con soluciones aproximadas. Nótese que típicamente un rayo atraviesa  $M$  *pixels*, con lo cual en cada ecuación sólo aparecen  $M$  incógnitas de las  $M^2$  que hay en total. Es decir, la matriz de coeficientes es muy dispersa, está llena de ceros.

Vamos a mostrar un método iterativo creado por S. Kaczmarz en 1937 que no altera la dispersión de la matriz, de hecho no modifica la matriz de coeficientes, lo que redundaría en que las operaciones sólo se hacen con los “pocos” coeficientes no nulos. La idea subyacente es la generalización a dimensiones mayores de un hecho muy sencillo: Podemos aproximar el punto donde se cortan dos rectas en  $\mathbb{R}^2$  partiendo de un punto cualquiera y proyectando alternativamente en cada una de las rectas.



**Teorema 3.1.** Sea un sistema compatible determinado de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas:

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{x} = b_1, \quad \vec{f}_2 \cdot \vec{x} = b_2, \quad \vec{f}_3 \cdot \vec{x} = b_3, \quad \dots \quad \vec{f}_N \cdot \vec{x} = b_N$$

con  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  el vector de incógnitas. Introduciendo las aplicaciones afines  $L_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  definidas como

$$L_i(\vec{x}) = P_i(\vec{x}) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \quad \text{con} \quad P_i(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{f}_i \cdot \vec{x}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2},$$

se tiene que, para cualquier  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ , el algoritmo iterativo

$$\vec{x}_{n+1} = (L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

genera una sucesión que converge a la solución del sistema.

Nota: En nuestro caso cada  $\vec{f}_i$  sólo tiene  $M$  coordenadas no nulas y  $N = M^2$ ; así pues evaluar cada  $L_i$  requiere del orden de  $M$  operaciones y cada iteración completa algo comparable a  $M^3$ . Si  $M = 1000$ , mil millones de operaciones es algo asequible para un ordenador bien aprovechado. La rapidez de convergencia depende, en analogía con el caso bidimensional, de los ángulos entre los hiperplanos [**Sm-So-Wa**].

DEM.: Un poco de Álgebra Lineal prueba que  $P_i(\vec{v})$  es la proyección de  $\vec{v}$  sobre el hiperplano  $\vec{f}_i \cdot \vec{x} = 0$  (y  $L_i$  lo es sobre  $\vec{f}_i \cdot \vec{x} = b_i$ , [**Gr**] p.143). Por tanto  $\|P_1(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$  excepto si  $\vec{f}_1 \cdot \vec{v} = 0$  (si  $\vec{v}$  pertenece al hiperplano), en cuyo caso  $P_1(\vec{v}) = \vec{v}$ . De la misma forma,  $\|(P_2 \circ P_1)(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$  excepto si  $\vec{f}_1 \cdot \vec{v} = \vec{f}_2 \cdot \vec{v} = 0$ . Como el sistema es compatible determinado, la única solución de  $\vec{f}_1 \cdot \vec{v} = \vec{f}_2 \cdot \vec{v} = \dots = \vec{f}_N \cdot \vec{v} = 0$  es la trivial, con lo cual, repitiendo el argumento anterior, se concluye que  $\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_1)(\vec{v})\| \leq C\|\vec{v}\|$  para alguna constante  $C < 1$ . (Nótese que por la compacidad de la bola unidad, se tiene que  $\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_1)(\vec{v}/\|\vec{v}\|)\|$  alcanza un máximo, menor que 1, en  $\mathbb{R}^N - \{\vec{0}\}$ ).

Consideremos el operador  $Q = L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_1$ , entonces  $Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una función contractiva ya que

$$\|Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})\| = \|(L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_1)(\vec{x} - \vec{y})\| = \|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_1)(\vec{x} - \vec{y})\| \leq C\|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

El teorema de la aplicación contractiva (Cálculo Numérico I, Topología, Cálculo III) asegura que tiene un solo punto fijo que puede obtenerse como límite del algoritmo iterativo que se indica en el enunciado. Este punto fijo es la solución del sistema lineal, ya que es evidente que los  $L_i$  dejan invariante a dicha solución. ■

Epílogo: En la práctica, por razones de estabilidad, se utilizan más rayos que los  $N = M^2$  necesarios. De manera que se obtiene un sistema con más ecuaciones que incógnitas y que en general (por el más mínimo error de redondeo, experimental o del modelo) no es compatible determinado pero está “cerca” de serlo. Incluso en este caso, se aplica el algoritmo del teorema anterior, entendiendo los  $\vec{x}_n$  como soluciones aproximadas (por grande que sea  $n$ ). En [**Ka-Sl**] §7 pueden consultarse algunas variantes del método y ejemplo prácticos de los resultados obtenidos con  $M = 128$ .

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Explicar el modelo de atenuación de los rayos X. b) Indicar la ecuación lineal para las densidades que corresponde a un rayo determinado por una recta  $L$ .

2) En el caso unidimensional estacionario, la ecuación del transporte dice que si un chorro de partículas se mueve a lo largo del eje  $X$  y la densidad de probabilidad de que una de ellas sea absorbida en el punto  $x$  es  $\sigma(x)$ , entonces se debe cumplir  $\phi'(x) = -\sigma(x)\phi$  donde  $\phi$  es la densidad de partículas del chorro. Explicar el significado de esta ecuación.

3) Si tuviéramos un sistema  $N \times N$  compatible indeterminado, ¿tiene sentido llevar a cabo la reconstrucción algebraica? Al menos intuitivamente, tratar de decidir si en este caso la sucesión  $\vec{x}_n$  converge.

4) Dado el sistema  $2x + y = 3$ ,  $x - 3y = -2$ ; partiendo de  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  calcular  $\vec{x}_1$  con el algoritmo de esta sección y comparar su valor con la solución real.

5) Verificar que  $x + 2y = 3$ ,  $2x - y = 1$ ,  $x - y = 0'01$ , es un sistema incompatible. Demostrar que  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \dots$  es una sucesión constante y comprobar que da una solución aproximada.

6) Supongamos una malla  $3 \times 3$  y que consideramos los tres rayos horizontales y los tres verticales que pasan por los centros de los cuadrados, y los tres oblicuos paralelos a  $y = x$  que pasan por los centros de todos los cuadrados excepto por los de las esquinas inferior derecha y superior izquierda. Comprobar que la reconstrucción algebraica no se puede llevar a cabo porque el determinante del sistema es nulo.

7) Demostrar que si  $A$  es una matriz  $N \times N$  con todos sus autovalores (reales y complejos) de módulo menor que 1, entonces para todo  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$  se cumple  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \vec{x} = \vec{0}$ .

8) El método iterativo de Jacobi para resolver el sistema compatible determinado  $A\vec{y} = \vec{b}$  viene dado por  $\vec{y}_{n+1} = (I - D^{-1}A)\vec{y}_n + D^{-1}\vec{b}$  donde  $D$  es la matriz diagonal cuyos elementos son los de la diagonal principal de  $A$ , que se suponen no nulos. Probar que converge a la solución del sistema para cualquier  $\vec{y}_0$  si los autovalores de  $I - D^{-1}A$  tienen módulo menor que 1.

9) Explicar por qué, en caso de que converja, el método anterior es muy útil para sistemas cuyas matrices son muy dispersas (pocos elementos no nulos). Demostrar que si  $\det(A) \neq 0$  siempre es posible reordenar las ecuaciones y las incógnitas de manera que los elementos de la diagonal sean no nulos.

10) Demostrar que en el caso de sistemas  $2 \times 2$  la constante  $C$  de contractividad de la aplicación  $Q$  en la prueba del teorema de esta sección es  $C = \cos \theta$  donde  $\theta$  es el ángulo entre las rectas que conforman el sistema.

11) Demostrar que si las filas  $\vec{f}_1 \vec{f}_2 \dots \vec{f}_N$  de un sistema  $N \times N$  son ortogonales (y no nulas), entonces  $\vec{x}_n$  es la solución exacta cualquiera que sea  $\vec{x}_0$  y  $n \geq 1$ .

## SECCIÓN 3.1

### Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros (el precio de esta fotocopia)

#### De la sección:

- Sistemas lineales con matrices dispersas. Métodos y aplicaciones.

#### Generales:

- Propagación de enfermedades y epidemias.
- Lógica difusa y sistemas expertos.

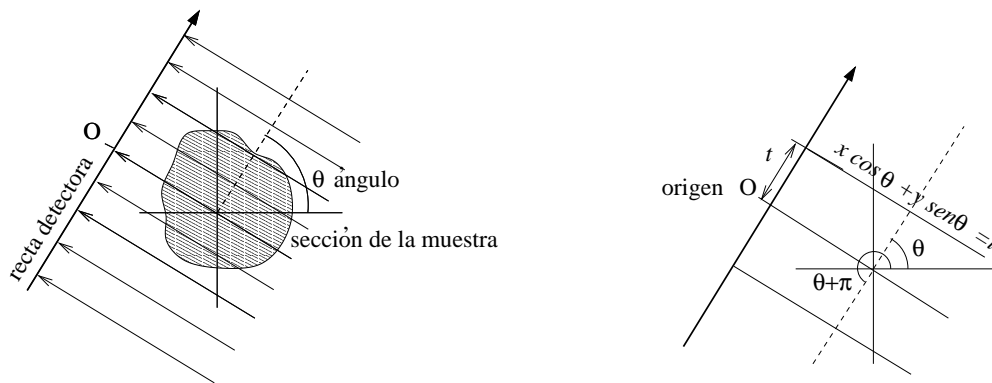
### Y por el mismo precio, las palabras del sabio:

*Habituados a contemplar lo infinitamente grande, nos hemos vuelto aptos para comprender lo infinitamente pequeño. Gracias a la educación que ha recibido, nuestra imaginación, como el ojo del águila que el Sol no deslumbra, puede mirar cara a cara a la verdad. [Po] p. 109.*

### 3.2. Segundo asalto

La reconstrucción algebraica vista en la sección anterior, a pesar de su sencillez, no es del todo satisfactoria en la práctica salvo en situaciones especiales [Ka-Sl] por su lentitud e imprecisión. Parte de esta imprecisión se debe a que desde el principio se discretiza (se digitaliza) mediante una malla que sólo simula bien los cambios continuos en la densidad cuando el sistema lineal asociado tiene dimensiones gigantescas. Para evitar esta situación, vamos a partir directamente de un modelo continuo, sin modificar la idea original de representar con una función  $\rho = \rho(x, y)$  la densidad (el tono de gris) en el punto  $(x, y)$  de la sección considerada. Por cierto, aunque no requiramos que  $\rho$  sea continua, el método de esta sección será más eficiente cuanto más regular sea  $\rho$ .

Supongamos que atravesamos la muestra con un haz paralelo de rayos X que se proyectan ortogonalmente sobre una recta exterior que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $OX$ .



Esta recta se puede identificar con la recta real  $\mathbb{R}$  y situar el origen en el punto de intersección con el rayo que pasa por  $(0, 0)$ . Un simple dibujo muestra que el rayo  $s_{\theta,t}$  que pasa por el punto  $t$  de esta recta tiene ecuación  $s_{\theta,t} \equiv x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta - t = 0$ . Como vimos en la sección anterior, la atenuación que ha experimentado el rayo cuando llega a  $t$  dependerá de la cantidad de masa que haya atravesado, es decir, de la integral de línea:

$$P_{\theta}(t) = \int_{s_{\theta,t}} \rho.$$

Notando que  $s_{\theta,t}$  y  $s_{\theta+\pi,-t}$  son rectas idénticas o simplemente imaginando la muestra rodeada de rectas detectoras con orientación compatible, se tiene  $P_{\theta}(t) = P_{\theta+\pi}(-t)$ .

El operador que asigna a una función escalar su integral de línea sobre cada recta es esencialmente lo que se llama *transformada de Radon* o, por razones obvias, *transformada de rayos X*. Para cada  $\theta$ , la función  $P_{\theta}(t)$  indica la “sombra” de la muestra, que es translúcida a los rayos X, sobre una pared que forma ángulo  $\theta$  con la horizontal. En 1917 J. Radon halló una fórmula [Sm-So-Wa] que permite recuperar la función original  $\rho$  a partir de todas sus sombras  $P_{\theta}(t)$ , lo cual tiene algunas consecuencias en las Matemáticas puras (por ejemplo permite deducir una fórmula de D’Alambert para la ecuación de ondas

en  $\mathbb{R}^3$  [**Dy-Mc**]). Pero hubo que esperar unos 60 años para que se convirtiera en un tema fundamental de las Matemáticas *aplicadas*.

Diccionario:

- Densidad de la sección de la muestra  $\longrightarrow \rho = \rho(x, y)$ .
- Haz de rayos perpendiculares al ángulo  $\theta \longrightarrow s_{\theta,t} \equiv x \cos \theta + y \sin \theta = t, t \in \mathbb{R}$ .
- $\log(I_0/I_f)$  para el rayo  $s_{\theta,t}$  del haz  $\longrightarrow P_\theta(t) = \int_{s_{\theta,t}} \rho$  .
- Simetría del haz  $\longrightarrow s_{\theta,t} = s_{\theta+\pi,-t}, P_\theta(t) = P_{\theta+\pi}(-t)$ .

El problema matemático al que nos enfrentamos es hallar una función conociendo sus integrales de línea en todas las direcciones. Con la notación anterior, lo que buscamos es una fórmula, como la de Radon, que permita recuperar  $\rho$  a partir de las funciones  $P_\theta(t)$ . Hay varias fórmulas equivalentes con este propósito [**Ra-Ka**] §2.2. Aquí veremos una que esencialmente es lo que se bautiza en la literatura tomográfica como *Fourier Slice Theorem* (teorema de las rebanadas de Fourier). Seguramente para muchos analistas de Fourier el nombre es desmesurado (hay una demostración de dos líneas en [**Ra-Ka**] si uno se atreve con las deltas de Dirac) porque refleja un hecho muy sencillo que ilustramos a continuación:

Si  $\theta = 0$  entonces  $P_\theta(t)$  no es más que la integral sobre la recta vertical  $x = t$ ,  $P_0(t) = \int \rho(t, u) du$ . Por la definición de la transformada de Fourier

$$\widehat{\rho}(\xi_1, 0) = \int \int \rho(t, u) e(-\xi_1 t - 0 u) dt du = \widehat{P}_0(\xi_1).$$

Por tanto la transformada de Fourier (bidimensional) de  $\rho$  evaluada en el eje  $X$  se puede hallar integrando  $\rho$  en la recta vertical  $s_{0,t}$  y después calculando la transformada de Fourier (unidimensional) de la función resultante. En Matemáticas y en Física las cosas no suelen cambiar mucho por girar la cabeza, de modo que  $\widehat{\rho}$  evaluada en una recta de ángulo  $\theta$  que pase por el origen debería coincidir siempre con  $\widehat{P}_\theta$ . Tomando transformadas inversas se puede despejar  $\rho$ .

**Teorema 3.2.** *Sea  $P_\theta(t)$  la integral de línea de  $\rho$  sobre la recta  $x \cos \theta + y \sin \theta = t$ , entonces para  $\rho$  suficientemente regular se tiene*

$$\rho(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |r| \widehat{P}_\theta(r) e(xr \cos \theta + yr \sin \theta) dr d\theta.$$



Nota: Lo de “suficientemente regular” es simplemente un requerimiento técnico para aplicar la fórmula de inversión. Con funciones de soporte compacto acotadas e integrables ya se tienen igualdades en casi todo punto, de modo que al menos desde el punto de vista teórico, no vamos a dejar de ver un tumor o cualquier cosa que tenga grosor porque  $\rho$  no sea  $C^\infty$ . Pero sí es cierto que en la práctica la falta de regularidad combinada con los métodos aproximados que se emplean, crea unas sombras inexistentes. El análogo de este fenómeno en las series de Fourier es el conocido fenómeno de Gibbs [Dy-Mc].

DEM.: Por la simetría  $\widehat{P}_\theta(r) = \widehat{P}_{\theta+\pi}(-r)$ , que se deduce de la análoga para  $P_\theta$ , la fórmula del teorema se puede escribir como

$$(3.2) \quad \rho(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \widehat{P}_\theta(r) e(xr \cos \theta + yr \sin \theta) dr d\theta.$$

De la fórmula de inversión,  $\rho(x, y) = \int \int \widehat{\rho}(\xi_1, \xi_2) e(x\xi_1 + y\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$ , cambiando a coordenadas polares  $\xi_1 = r \cos \theta$ ,  $\xi_2 = r \sin \theta$ , se tiene

$$\rho(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \widehat{\rho}(r \cos \theta, r \sin \theta) e(xr \cos \theta + yr \sin \theta) dr d\theta.$$

Comparando con (3.2), basta probar que  $\widehat{P}_\theta(r) = \widehat{\rho}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Para ello considérese el giro de ángulo  $-\theta$  alrededor del origen,  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Según la Geometría I, en coordenadas cartesianas  $T$  es la función vectorial

$$T : (x, y) \mapsto (T_1(x, y), T_2(x, y)) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Es fácil ver (con un simple dibujo o en su defecto con un poco de Álgebra Lineal) que  $T$  transforma la recta  $s_{\theta,t}$  definida como antes, en la recta vertical  $x = t$  (con  $y = u$  arbitraria). De modo que cambiando la variable

$$P_\theta(t) = \int_{s_{\theta,t}} \rho = \int_{T s_{\theta,t}} \rho \circ T^{-1} = \int_{-\infty}^\infty (\rho \circ T^{-1})(t, u) du.$$

Por definición

$$\widehat{P}_\theta(r) = \int_{-\infty}^\infty \left( \int_{-\infty}^\infty (\rho \circ T^{-1})(t, u) du \right) e(-tr) dt = \int_{\mathbb{R}^2} (\rho \circ T^{-1})(t, u) e(-tr) dt du.$$

Y tras el cambio de variable  $(t, u) = (T_1(x, y), T_2(x, y))$  la última integral se transforma en  $\widehat{\rho}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ; lo que según habíamos visto, concluye la prueba. ■

Epílogo: Una vez conseguida una fórmula exacta que resuelve el problema, el matemático se puede ir a casa a hacer el cubo de Rubik, pero mientras se aleja el ingeniero protesta: “¿y ahora cómo meto yo esta fórmula en el ordenador?”; su trabajo todavía no ha terminado. El método natural para tratar numéricamente expresiones que involucren integrales o series de Fourier es la *transformada de Fourier rápida* [Ge], [Ta], más conocida por sus siglas en inglés FFT. Este método, combinado con el desarrollo de las computadoras, ha revolucionado muchos métodos numéricos en ingeniería desde su introducción en los años 60. Curiosamente, según parece Gauss ya lo conocía en una forma equivalente más de 150 años antes de su invención oficial [He-Jo-Bu].

Para no desviarnos demasiado, aquí mencionaremos algo un poco más directo, que es una versión simplificada y clarificada de §3.3.3 [Ka-SI]. Escribiendo

$$\rho(x, y) = \int_0^\pi F(\theta, x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta) d\theta \quad \text{con } F(\theta, u) = \int_{-\infty}^\infty |r| \widehat{P}_\theta(r) e(ru) dr,$$

todo el problema se reduce a saber aproximar  $F(\theta, u)$ , porque una vez hecho eso, podríamos pasarle al ingeniero nuestros apuntes de Cálculo Numérico I con un montón de métodos para aproximar integrales sobre el intervalo finito  $[0, \pi]$  (regla del trapecio, de Simpson, cuadratura de Gauss...). Por otra parte, seguro que sus apuntes son más gordos y completos que los nuestros.

Desarrollando por Fourier en  $[-1/2, 1/2]$  la función  $f(x) = |x|$ , [Gr-Ry] 1.444.6,

$$|x| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e(nx), \quad \text{con } a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_n = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2}.$$

Sustituyendo  $x = rh$ , se tiene  $|r| = h^{-1} \sum a_n e(nhr)$  para  $r \in I = [-1/2h, 1/2h]$ . Si  $h$  es pequeño,  $I$  se parece a  $(-\infty, \infty)$  y se cumple

$$F(\theta, u) \approx \int_I |r| \widehat{P}_\theta(r) e(ru) dr = h^{-1} \sum a_n \int_I \widehat{P}_\theta(r) e((u + nh)r) dr.$$

La última integral extendida a  $\mathbb{R}$  es la transformada inversa de  $\widehat{P}_\theta(r)$ , por tanto

$$F(\theta, u) \approx h^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n P_\theta(u + nh).$$

A esta fórmula no se le pueden poner pegas: no hay ni transformadas de Fourier ni cosas raras, simplemente una suma que de hecho es finita porque  $P_\theta$  es de soporte compacto (la proyección ortogonal de un compacto es un compacto).

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Indicar por qué  $P_\theta(t) = P_{\theta+\pi}(-t)$ . b) Demostrar la relación  $\widehat{\rho}(\xi, 0) = \widehat{P}_0(\xi)$

2) En la práctica, los detectores no son rectas, sino una circunferencia que rodea a la muestra. Halla la función que proyecta una circunferencia, digamos  $S^1$ , desde su centro sobre una recta tangente, digamos  $y = 1$ .

3) ¿Puede tener  $P_\theta(t)$  una discontinuidad de salto, para algún  $\theta$ ? En caso afirmativo dar un ejemplo y en caso negativo una demostración.

4) Se dice que una función  $f = f(\vec{x})$  es *radial*, si sólo depende del “radio”  $r = \|\vec{x}\|$ , esto es, si  $f(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)$  para alguna  $g$ . Explicar por qué si se sabe que la densidad es una función radial, entonces basta una proyección para reconstruirla.

5) Probar que si  $\rho$  es radial entonces  $\rho(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\pi |r| \widehat{P}_0(r) e(r \cos \theta \sqrt{x^2 + y^2}) d\theta dr$ . (La integral interior, de la forma  $\int_0^\pi e(\lambda \cos \theta) d\theta$ , es una de las llamadas *funciones de Bessel*, muy comunes en Física y Matemáticas).

6) Calcular  $P_\theta(t)$  para una muestra que esté confinada dentro de la circunferencia unidad y tal que  $1 - \rho$  sea en cada punto el cuadrado de la distancia al origen.

7) Hallar  $P_0(t)$  y  $\widehat{P}_0(t)$  para la muestra de densidad uno comprendida entre los cuadrados  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  y  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

8) Sea la muestra de densidad uno comprendida entre los cuadrados  $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \times [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$  y  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . Calcular  $\widehat{P}_{\pi/4}(t)$ .

9) Comprobar que el desarrollo de Fourier de la función 1–periódica que coincide con  $f(x) = |x|$  en  $[-1/2, 1/2]$  es el que se indica en esta sección, esto es, que los coeficientes de Fourier son  $a_0 = 1/4$  y  $a_n = ((-1)^n - 1)/(2\pi^2 n^2)$  para  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .

10) Demostrar que si  $A$  es una matriz no singular, la transformada de Fourier de  $f(A^t \vec{x})$  es  $\widehat{f}(A^{-1} \vec{\xi})/\det(A)$ . Tratar de deducir del caso en que  $A$  represente un giro, que la transformada de Fourier de una función radial es también radial. (Recuérdese que las matriz de un giro es ortogonal y por tanto  $A \cdot A^t = I$ ).

11) Probar rigurosamente  $\rho(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^\pi P_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta + nh) d\theta$  para cualquier  $\rho \in C_0^3(\mathbb{R}^2)$ . (Comenzar demostrando, integrando por partes, que  $|r|^3 \widehat{P}_\theta(r)$  está acotada).

## SECCIÓN 3.2

**Trabajos sugeridos a sólo 3 centauros** (el precio de esta fotocopia)De la sección:

- Principios de Resonancia Magnética Nuclear.

Generales:

- Uso de la Estadística en ensayos clínicos y diseño de experimentos.
- El cubo de Rubik y otros rompecabezas similares.

**Y por el mismo precio, las palabras del sabio:**

*Los hombres más desdeñosos de la teoría, sin duda encuentran en ella un alimento cotidiano. Si se les privara de ese alimento, el progreso se detendría y pronto nos estancaríamos en la inmovilidad de China. [Pó] p. 93.*

## Su luz puede valer

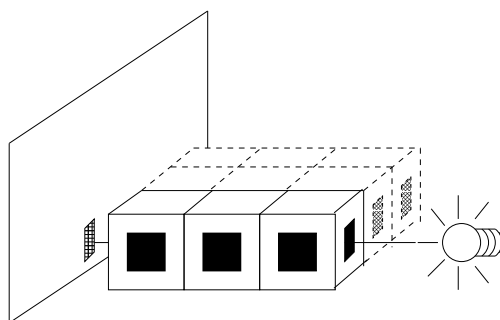
### Material:

- Cartulina.
- Plástico semitransparente (por ejemplo de una bolsa).
- Una linterna.
- Una calculadora.

Como es una verdad universal que ni la carne de burro ni la nuestra se transparentan, no podemos cambiar los rayos X por rayos de luz visible en las aplicaciones médicas (o veterinarias). Lo que vamos a hacer aquí es sustituir los tejidos por unos burdos cubitos translúcidos con los que podamos ilustrar la reconstrucción algebraica.

El experimento en sí es bastante tonto (el próximo es mucho mejor) y quizá sólo sirva para reciclar una briznita de [Ch], de donde está tomado.

Con la cartulina fabricaremos nueve cubos y en sus caras laterales abriremos “ventanas” para que pueda pasar la luz, las cuales cubriremos en algunos de ellos con el plástico semitransparente\*. Al poner tres cubos seguidos y enfocarlos con la luz de la linterna, se pueden detectar en una pantalla (una hoja de papel) cuatro posibles intensidades dependiendo de si ninguno, uno, dos o los tres cubos tienen plástico en sus ventanas.

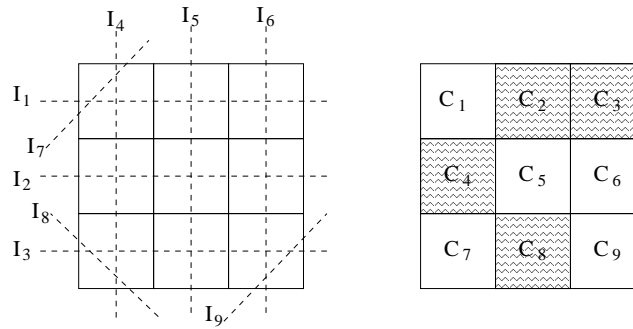


Convencionalmente designaremos estas intensidades por  $I = 1, 1/2, 1/3, 1/4$  respectivamente. Para llevar a cabo el experimento, es importante familiarizarse con ellas de manera que podamos distinguirlas a simple vista. En otro caso, debemos cambiar el tipo de plástico.

---

\* *N. del A.* Construí los cubos de 4 cm de arista y las ventanas de 2x2. Como plástico semitransparente utilicé el de una bolsa blanca de las que dan en los supermercados. Tiene el inconveniente de que difunde la luz porque no queda totalmente lisa, pero en cuanto a transparencia es muy aceptable. Quizá el papel de celofán de colores también sea adecuado.

Dispongamos los cubos formando un cuadrado (si queremos darle emoción y aguantar las burlas, podemos pedirle a alguien que lo haga por nosotros y que tape el resultado con un folio por encima). Dirigiendo la linterna en las tres direcciones horizontales, en las tres verticales y en las oblicuas correspondientes a tres de las cuatro esquinas, tendremos una relación entre el número de cubos semitransparentes en las secciones consideradas y las intensidades registradas.



Supongamos que numeramos los cubos como en la figura y asignamos al cubo  $i$ -ésimo el valor  $C_i = 0$  si está hueco y  $C_i = 1$  si es semitransparente. Entonces se tienen las relaciones

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & C_1 + C_2 + C_3 = I_1^{-1} - 1 & C_1 + C_4 + C_7 = I_4^{-1} - 1 \\
 & C_4 + C_5 + C_6 = I_2^{-1} - 1 & C_2 + C_5 + C_8 = I_5^{-1} - 1 \\
 & C_7 + C_8 + C_9 = I_3^{-1} - 1 & C_3 + C_6 + C_9 = I_6^{-1} - 1 \\
 & C_1 = I_7^{-1} - 1, \quad C_7 = I_8^{-1} - 1, \quad C_9 = I_9^{-1} - 1
 \end{aligned}$$

En el caso de la figura, habríamos obtenido el vector de intensidades

$$\vec{I} = (I_1, \dots, I_9) = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1 \right).$$

Lo que da lugar a un sistema de nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Se puede comprobar que (si no usamos que  $C_i \in \{0, 1\}$ ) dicho sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado. Añadiendo una nueva relación: la intensidad  $I_{10} = 1/2$  que pasa por la esquina  $C_3$ , obtenemos finalmente un sistema determinado. Evidentemente si en vez de nueve celdillas tuviéramos miles, esto sería muy costoso de comprobar, y en la práctica simplemente añadiríamos más ecuaciones de las necesarias, pensando que habría que tener muy mala suerte para que todavía el rango de la matriz no fuera el adecuado.

El sistema se resuelve directamente previo pago de hacer unas cuentas, y la solución es  $\vec{C} = (C_1, \dots, C_9) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ . Pero como queremos ilustrar la reconstrucción

algebraica, usaremos el algoritmo correspondiente

$$\vec{x}_{n+1} = (L_{10} \circ L_9 \circ \dots \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

partiendo de  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ . Donde  $L_i$  son las proyecciones en los hiperplanos que definen las ecuaciones de (3.3) y la añadida después (de hecho podríamos reemplazar una de las ecuaciones por ella). Con una calculadora y un poco de paciencia, se pueden hacer una o dos iteraciones. Con un pequeño programilla se puede ir más allá. Por ejemplo, algunos de los  $\vec{x}_n$  obtenidos de esta forma son:

$$\vec{x}_5 = (0, 0'8595, 1, 0'7278, 0'3468, -0'0746, 0, 0'7937, 0)$$

$$\vec{x}_{10} = (0, 0'9081, 1, 0'8908, 0'1925, -0'0832, 0, 0'8994, 0)$$

$$\vec{x}_{15} = (0, 0'9472, 1, 0'9449, 0'1068, -0'0517, 0, 0'9460, 0)$$

$$\vec{x}_{20} = (0, 0'9704, 1, 0'9701, 0'0593, -0'0294, 0, 0'9703, 0)$$

$$\vec{x}_{25} = (0, 0'9836, 1, 0'9835, 0'0329, -0'0164, 0, 0'9835, 0)$$

Nótese que la aproximación de  $\vec{x}_n$  a la solución hace posible adivinar enseguida dónde están los cubos semitransparentes ( $C_i = 1$ ) y los huecos ( $C_i = 0$ ). En el límite  $\vec{x}_n \rightarrow \vec{C}$ .



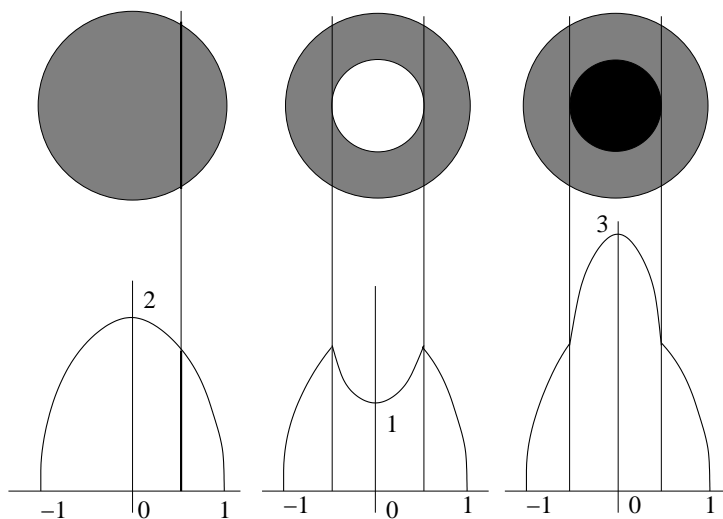


## Pinta el tubo

### Material:

- Una calculadora programable o un ordenador con un programa de cálculo.
- Un programa para dibujar gráficas (opcional).

Tampoco es plan que vayamos por las tiendas pidiendo una máquina de rayos X para comprobar si verdaderamente podemos recuperar con el método indicado  $\rho$  a partir de las radiografías  $P_\theta$ . Por eso vamos a considerar secciones muy particulares, con simetría radial, de las que nosotros mismos podemos hallar la sombra *a mano*. Para fijar el contexto en el que trabajamos, imaginemos que tenemos unos tubos con simetría radial acotados por  $S^1 \times \mathbb{R}$  y queremos saber, sin romperlos, si son macizos, si tienen una parte hueca, o si tienen un alma (zona central) de mayor densidad. Consideremos justamente tres tubos que respondan a estas características: Uno macizo de radio 1 y densidad 1, otro igual que el anterior pero con la zona central  $0 \leq r \leq 1/2$  hueca, y un tercero con esta zona central rellena de un material de densidad 2. Por la simetría radial, la función “sombra”  $S(t) = P_\theta(t)$  no dependerá del ángulo  $\theta$  y podemos calcularla fácilmente.



$$S_1(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}, \quad S_2(x) = S_1(x) - \frac{1}{2}S_1(2x), \quad S_3(x) = S_1(x) + \frac{1}{2}S_1(2x)$$

Esto es lo que podríamos haber deducido si hubiéramos podido hacer el experimento con rayos X. Lo ideal, pero utópico, es que convenciéramos a un amigo (al menos hasta antes de pedírselo) para que se inventara una estructura interna de un tubo, siempre con simetría radial y sección dentro del círculo unidad, e hiciera los cálculos mostrándonos la ecuación de la función sombra  $S = S(x)$ . El experimento consistirá en que haciendo trabajar a la calculadora o al ordenador, podremos adivinar la estructura del tubo a partir de la función  $S$ .

Exactamente, lo que tenemos que hacer es fijar una *precisión*  $h$  pequeña (aunque si lo es demasiado nos aburriríamos antes de que se terminen los cálculos y quizá se acumulen los errores de redondeo) y hacer un programilla que para cada coordenada radial  $R$  calcule

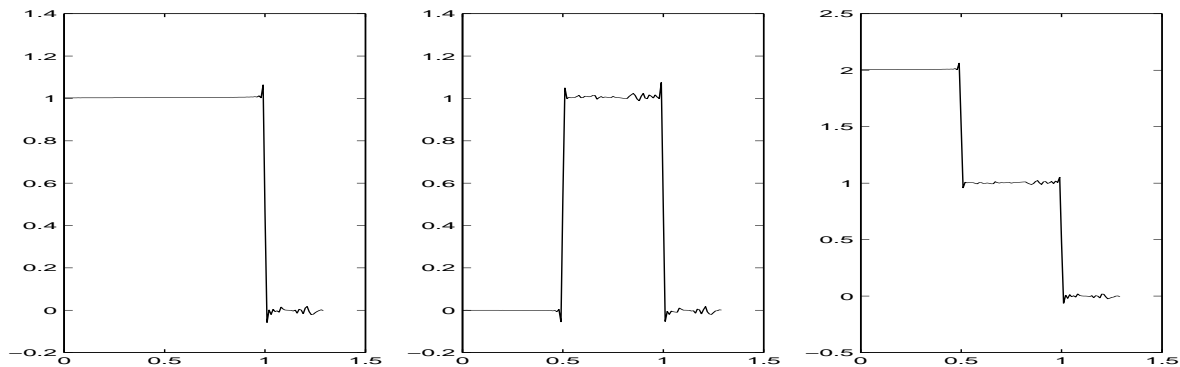
$$D(R) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\theta_j} \left( \frac{\pi^2}{8} S(R \cos \theta_j) - \sum_{1 \leq k < h-1} \frac{1}{(2k+1)^2} S(R \cos \theta_j + (2k+1)h) \right)$$

donde los  $\theta_j$  recorren  $[0, \pi]$  de  $h$  en  $h$ , esto es,  $\theta_0 = 0, \theta_1 = h, \theta_2 = 2h$ , etc. Prácticamente en cualquier lenguaje que usemos, programar esta fórmula no requerirá más que un par de bucles, y un tercero para que nos muestre una lista de  $D(R)$  para diferentes valores de  $R$ .

La exactitud que se logra al aproximar la densidad en  $\|\vec{x}\| = R$  por  $D(R)$  es difícil de creer. Por ejemplo, tomando  $h = 0'01^*$ , se obtuvieron los siguientes resultados (se indican entre paréntesis los valores exactos):

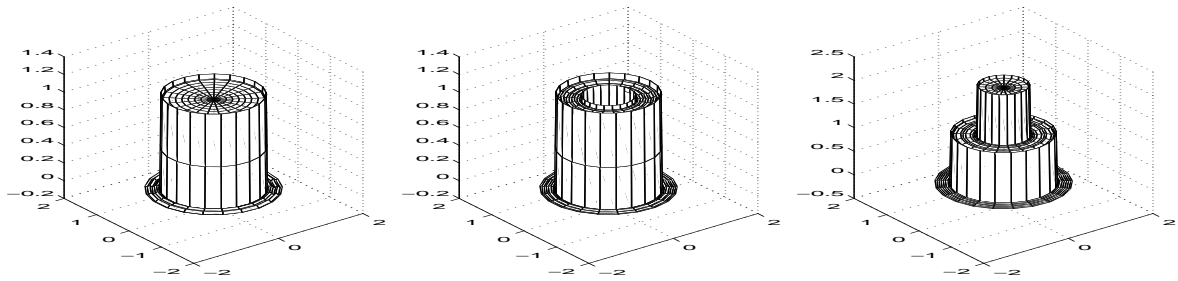
	<b>Tubo 1</b>	<b>Tubo 2</b>	<b>Tubo 3</b>
$R = 0$	1'0025 ( $\rho = 1$ )	0'0003 ( $\rho = 0$ )	2'0048 ( $\rho = 2$ )
$R = 0'25$	1'0032 ( $\rho = 1$ )	-0'0005 ( $\rho = 0$ )	2'0070 ( $\rho = 2$ )
$R = 0'75$	1'0049 ( $\rho = 1$ )	1'0057 ( $\rho = 1$ )	1'0041 ( $\rho = 1$ )

Ya puestos, podemos representar la gráfica de  $D(R)$  en cada caso. Como era de esperar, los errores mayores se producen cerca de las discontinuidades de la densidad.



\* N. del A. Utilicé un sencillo programa FORTRAN trabajando en precisión simple.

Y si nos apetece radializar estas gráficas podemos obtener superficies en  $\mathbb{R}^3$ , que no dan más información, pero quedan bonitas.



El problema de reconstruir conjuntos tridimensionales con simetría esférica a partir de fotografías (o radiografías) tiene una posible aplicación práctica en el estudio de la densidad de las galaxias globulares a partir de las imágenes obtenidas con un telescopio [Gr] p. 164.

Explicación: El algoritmo que hemos usado no tiene ningún misterio. Según lo visto en la última sección,

$$\rho(x, 0) = \int_0^\pi F(x \cos \theta) \quad \text{con} \quad F(u) \approx h^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n S(u + nh)$$

con  $a_n = 0$  para los pares, excepto  $a_0 = 1/4$ , y  $a_n = -1/\pi^2 n^2$  para los impares. Por la regla del trapecio (Cálculo Numérico I)

$$\rho(R, 0) \approx h \sum_{\theta_j} F(R \cos \theta_j),$$

y por las simetrías  $a_n = a_{-n}$  y  $S(u) = S(-u)$ , se tiene

$$F(u) \approx h^{-1} \left( \frac{1}{4} S(u) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n S(u + nh) \right),$$

que sustituyendo  $n = 2k + 1$ ,  $a_{2k+1} = -1/(\pi(2k + 1))^2$ , y empleando que  $\text{sop } S \subset [-1, 1]$ , lleva a la fórmula para  $D(R)$  que aproxima a  $\rho(R, 0)$ .