Métodos Estadísticos en Ingeniería   23/05/2007 Mod. A

1) a) (3 puntos) Se tiene una distribución binomial $B(1, \theta)$, ¿cuál es el estimador de máxima verosimilitud para θ? *Indicación*: $P(X = x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $x = 0,\ 1$.

b) (1 punto) En una población normal con $\sigma = 1$ se toma una muestra con $\bar{x} = 10$. ¿Para qué niveles de significación se debe aceptar $H_0 : \mu \leq 10$?

2) (3 puntos) Un peródico asegura que el partido A obtendrá el 20 % de los votos porque han hecho una encuesta a 100 personas y 20 votarán a A y el resto a otros partidos. ¿Qué rango de error se debe admitir si se quiere tener un nivel de confianza del 90 %?

3) (3 puntos) En cierto deporte se han hecho 5 categorías A, B, C, D y E. Examinados 100 jugadores hay 10 en la A, 30 en la B y 20 en cada una de las restantes. ¿Se puede afirmar con nivel de significación α =0.1 que la probabilidad de estar en cualquiera de las categorías es la misma?

Fórmulas: σ conocida $\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} \sim N(0,1)$, σ desconocida $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$

Métodos Estadísticos en Ingeniería 23/05/2007 Mod. B

1) a) (3 puntos) En cierto deporte se han hecho 5 categorías A, B, C, D y E. Examinados 100 jugadores hay 10 en la A, 30 en la B y 20 en cada una de las restantes. ¿Se puede afirmar con nivel de significación α =0.1 que la probabilidad de estar en cualquiera de las categorías es la misma?

b) (1 punto) En una población normal con $\sigma = 1$ se toma una muestra con $\bar{x} = 10$. ¿Para qué niveles de significación se debe aceptar $H_0 : \mu \leq 10$?

2) (3 puntos) Se tiene una distribución binomial $B(1, \theta)$, ¿cuál es el estimador de máxima verosimilitud para θ? *Indicación*: $P(X = x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $x = 0,\ 1$.

3) (3 puntos) Un peródico asegura que el partido A obtendrá el 20 % de los votos porque han hecho una encuesta a 100 personas y 20 votarán a A y el resto a otros partidos. ¿Qué rango de error se debe admitir si se quiere tener un nivel de confianza del 90 %?

Fórmulas: σ conocida $\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} \sim N(0,1)$, σ desconocida $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$

Soluciones

Nota: Las soluciones corresponden al modelo A. Los ejercicios 1a, 1b, 2 y 3 del modelo B corresponden respectivamente a los ejercicios 3, 1b, 1a y 2 en el modelo A.

1) a) $P(X = x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, entonces $L(\theta) = \prod_{i=1}^{N}(\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}) = \theta^s(1-\theta)^{N-s}$ con $s = \sum x_i$. Tomando logaritmos $\log L(\theta) = s\log\theta + (N-s)\log(1-\theta)$. Derivando e igualando a cero:

$$\frac{s}{\theta} - (N-s)\frac{1}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{N-s}{s} \Rightarrow \frac{1}{\theta} - 1 = \frac{N}{s} - 1 \Rightarrow \theta = \frac{s}{N}.$$

En este valor se alcanza necesariamente un máximo porque la derivada segunda es $-s/\theta^2 - (N-s)/(1-\theta)^2 < 0$, entonces $\widehat{\theta} = s/N = N^{-1}\sum x_i$.

b) $(10-10)/(1/\sqrt{N}) < z_2$ se cumple si $z_2 > 0$ y esto equivale a $P(Z < z_2) > 0{,}5$ (con $Z \sim N(0,1)$) por tanto $1-\alpha > 0{,}5$, esto es $\alpha < 0{,}5$.

2) El intervalo de confianza para la proporción de los que votarán a A es $|p - 0{,}2|/(\sigma/\sqrt{100}) < z_2$ con $\sigma = \sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})} = \sqrt{0{,}2\cdot 0{,}8} = 0{,}4$ y z_2 es tal que $P(Z < z_2) = 1 - 0{,}1/2 = 0{,}95$ que según la tabla implica $z_2 = 1{,}645$. Entonces el intervalo de confianza se escribe como $|p - 0{,}2| < 1{,}645 \cdot 0{,}4/10 = 0{,}0658$, dicho de otra forma el error es como mucho $\pm 6{,}58\,\%$ con este nivel de confianza.

3) Las frecuencias observadas son las que da el enunciado y las esperadas que sean todas iguales:

	A	B	C	D	E
Obs.	10	30	20	20	20

	A	B	C	D	E
esp.	20	20	20	20	20

Calculamos λ:

$$\lambda = \sum_i \frac{O_i^2}{e_i} - n = \frac{10^2}{20} + \frac{30^2}{20} + 20 + 20 + 20 - 100 = 10.$$

Por otro lado, según la tabla $\chi^2_{5-1;0,1} = 7{,}779$. Como $\lambda > \chi^2_{4;0,1}$, se rechaza la hipótesis.