Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si una métrica es definida positiva, ¿lo es la métrica inducida en cualquier subvariedad?

ii) ¿Cómo se podría deducir de un ejemplo de esta sección que los símbolos de Christoffel no son tensores?

iii) ¿Por qué en dimensión 4 hay como mucho 40 símbolos de Christoffel distintos? ¿Cuántos hay en dimensión 5?

iv) ¿Por qué $r = t$, $\theta = t$ no es una geodésica en $\mathbb{R}^2$ usando coordenadas polares?

2) Hallar la métrica inducida en el hiperboloide $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ usando la carta (definida en cierto abierto) $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

3) Probar que la métrica usual en esféricas es $G = d\theta \otimes d\theta + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$.

4) Sea G la métrica inducida en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ usando la carta proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Demostrar que la base natural del espacio tangente $\{\partial_1, \partial_2\}$ no es en general ortogonal, esto es, $G(\partial_1, \partial_2) \neq 0$. Repetir el problema para la carta dada por los ángulos en esféricas. (Nota: De resultados posteriores se podrá deducir que es imposible hallar una carta en la que $\{\partial_1, \partial_2\}$ sea ortonormal en un abierto).

5) Hallar alguna carta del cilindro de radio 3 de manera que $\{\partial_1, \partial_2\}$ sea ortonormal con la métrica inducida.

6) Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensión n y sea X un campo normal unitario, esto es, un campo de vectores en $\mathbb{R}^{n+1}$ que en cada punto $p \in M$ es ortogonal a los vectores de $T_p(M)$ (interpretados como vectores de R^{n+1} como en cursos anteriores).

a) Probar que $\omega(\cdot, \dots, \cdot) = \det(X, \cdot, \dots, \cdot)$ es un elemento de volumen.

b) Deducir que

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$$

es un elemento de volumen en S^n.

7) Dar una fórmula general para el elemento de volumen de una superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ (con la métrica usual). Demostrar con ello la bien conocida fórmula $2\pi \int f \sqrt{1 + (f')^2}$.

8) Demostrar que

$$r = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^{-1} \qquad \text{con} \quad \theta = \arctan \frac{t}{\sqrt{2} - t}$$

define una geodésica en $\mathbb{R}^2$ con la métrica en polares $dr^2 + r^2 d\theta^2$. *Indicación*: No es necesario siquiera escribir la ecuación de las geodésicas.

9) Calcular las geodésicas con θ constante usando la métrica $dr^2 - r^2 d\theta^2$.

10) Comprobar que

$$x(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad y(t) = \frac{2t}{t^2+1}, \qquad z(t) = 0 \qquad t \in \mathbb{R}$$

define el ecuador de S^2 (salvo un punto). Comprobar que sin embargo no satisface la ecuación de las geodésicas y explicar la aparente contradicción.

11) Calcular los símbolos de Christoffel para la métrica $dr^2 + 4\,\mathrm{senh}^2\, r\; d\theta^2$ y hallar alguna de las geodésicas.

12) Calcular los símbolos de Christoffel para $\mathbb{R}^3$ usando coordenadas esféricas (r, θ, φ). *Indicación*: Como $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ son ortogonales, de antemano sabemos que en la métrica no aparecerán los términos cruzados $drd\theta$, $drd\varphi$, $d\theta d\varphi$, lo cual simplifica los cálculos iniciales.

13) Calcular los símbolos de Christoffel y las geodésicas de $\mathbb{R}^2$ con la métrica $du^2 + 4vdudv + 8v^2dv^2$.

14) Calcular los símbolos de Christoffel y alguna geodésica del semiplano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con la métrica de Poincaré $y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2$.

15) Considérese la banda $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < 1\}$ con la métrica definida por

$$ds^2 = \frac{4}{(1-x^2)^2}dx^2 + xydxdy + (1 + x^2 + y^2)dy^2.$$

Utilizar que la energía es constante para calcular las geodésicas horizontales de M sin necesidad de hallar los símbolos de Christoffel.