Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
i) Si $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, ¿cuánto vale $f^*(dx \wedge dy)$?
ii) Si $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow L$, ¿cuándo tiene sentido $g^* \circ f^*$?
iii) ¿Es cierto que $d\big(f^*\omega \wedge d(f^*\eta)\big) = d\big(d(f^*\omega) \wedge f^*\eta\big)$ para $\omega, \eta \in \Omega^2(M)$?
iv) Si ω es una forma de volumen, ¿tiene $\omega(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ el mismo signo para cualquier base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de $T_p(M)$?

2) Comprobar la relación $f^*d\omega = d(f^*\omega)$ cuando f es el cambio de polares a rectangulares $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$ y $\omega = y\ dx + xy\ dy$.

3) En S^1 consideramos las cartas $(S^1 - \{(0,1)\}, \phi_1)$ y $(S^1 - \{(0,-1)\}, \phi_2)$ dadas por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur, respectivamente. Probar que ambas cartas no tienen la misma orientación. Efectuar alguna modificación leve de alguna de ellas para que sí conformen un atlas orientado.

4) Sea C la curva cerrada en $\mathbb{R}^2$ que viene parametrizada en coordenadas polares como $r = f(\theta)$ donde f es 2π-periódica y $\theta \in [0, 2\pi]$ (se supone la orientación compatible con esta parametrización). Calcular $\int_C i^*\omega$ donde $\omega = (-y\ dx + x\ dy)/(x^2 + y^2)$.

5) Sea $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie e $i : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión, entonces la fórmula para $\int_S i^*\omega$ coincide con la estudiada en cursos anteriores para integrar el campo vectorial $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$ sobre S, $\int_S \vec{F}$.

6) Sea S una subvariedad de dimensión 2 inmersa en $\mathbb{R}^4$. Supongamos que viene parametrizada por $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4)$. ¿Cuál es la fórmula para integrar sobre S?

7) Sea g un giro en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que si C es una curva inmersa en $\mathbb{R}^3$ y $g(C)$ es su imagen por el giro, $\int_C \vec{F} = \int_{g(C)} g \circ \vec{F} \circ g^{-1}$.

8) Sea $\mathcal{U} \subset S^2$, donde S^2 es la superficie esférica unidad en $\mathbb{R}^3$. Explicar por qué $A(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} i^*\omega$ con $\omega = x\ dy \wedge dz + y\ dz \wedge dx + z\ dx \wedge dy$ es una definición natural para el área de $\mathcal{U}$. Calcular $A(S^2)$. *Indicación*: Utilícese la fórmula para calcular integrales de superficie en $\mathbb{R}^3$.

9) Considérese la $n-1$-forma en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

donde el circunflejo indica que el término dx^i se omite. En analogía con el problema anterior se define el área de $\mathcal{U} \subset S^{n-1}$ como $A(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} i^*\omega$. Sea también la n-forma auxiliar en $\mathbb{R}^n$

$$\eta = e^{-\|\vec{x}\|^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \qquad \text{donde} \qquad \|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}.$$

a) Sea $f : \mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $f(t, x) = tx$. Comprobar que $f^*\eta = t^{n-1} e^{-t^2} dt \wedge (i^*\omega)$.

b) Probar que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = \int_{\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}} \eta = \pi^{n/2}$. *Indicación*: Buscar en un libro el valor de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

c) Deducir que $A(S^{n-1}) = \pi^{n/2} / \int_0^\infty t^n e^{-t^2} dt$ y de aquí $A(S^{n+1}) = 2\pi A(S^{n-1})/n$.

d) Demostrar por inducción que

$$A(S^{n-1}) = \begin{cases} n\pi^{n/2}/(n/2)! & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n(2\pi)^{(n-1)/2}/(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot n) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

10) Sea M orientable y $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ dos atlas orientados. Dado $p \in M$ se define $f(p) = 1$ si existen cartas $(\mathcal{U}_i(p), \phi_i) \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, con $\det\big(J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(p)\big) > 0$ y $f(p) = -1$ en otro caso.

a) Probar que f es C^∞ (basta ver que es continua).

b) Probar que M admite más de dos orientaciones si y sólo si f no es constante en M para alguna elección de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$.

c) Deducir que una variedad conexa sólo admite dos orientaciones. *Indicación*: $f^{-1}(\{\pm 1\})$ deben ser abiertos si f es continua.