Geometría IV

Departamento de Matemáticas. Curso 2006/07

1) Considerando $\mathbb{R}^3$ como variedad, escribir la uno forma $x\,dx+y\,dy+z\,dz$ en coordenadas esféricas.

2) En un ejemplo de la sección se definió un campo de vectores sobre $S^1-\{(-1,0)\}$. Extenderlo a un campo de vectores C^∞ en S^1 comprobando que lo es empleando alguna carta compatible.

3) Se dice que un tensor de tipo $(0,2)$ es *simétrico* si $T_{ij}=T_{ji}$ donde T_{ij} son sus componentes.

a) Demostrar que este concepto de simetría está bien definido, es decir, que no depende de la carta empleada para calcular las componentes.

b) Comprobar que sin embargo no se puede extender a tensores de tipo $(1,1)$, concretamente, construir un ejemplo para el que $T^i_j=T^j_i$ se cumpla usando una carta pero no otra.

$_*$c) ¿Qué matrices simétricas lo siguen siendo en cualquier otra base?

4) Dar un ejemplo concreto en $\mathbb{R}^2$ con la carta trivial que muestre que las derivadas parciales de las componentes de un campo de vectores no tienen carácter tensorial: no se transforman como las componentes de un tensor de tipo $(1,1)$.

5) Según habíamos visto, el cambio a polares lleva la métrica usual de $\mathbb{R}^2$, $dx\otimes dx+dy\otimes dy$, a $dr\otimes dr+r^2d\theta\otimes d\theta$. Hallar ahora un cambio de coordenadas (de carta) en $\mathbb{R}^2$ que pase la *métrica de Minkowski* en $\mathbb{R}^2$, $dx\otimes dx-dy\otimes dy$, a $dr\otimes dr-r^2d\theta\otimes d\theta$. *Indicación:* Los dos problemas son similares salvo el “cambio” $y\mapsto y\sqrt{-1}$, $\theta\mapsto\theta\sqrt{-1}$.

6) Sea M una variedad bidimensional. Un campo de uno formas en M se expresa en cada carta $(\mathcal{U},\phi=(x^1,x^2))$ como $T=T_1dx^1+T_2dx^2$. Sea $\mathcal{D}$ el operador que asigna a T el tensor de tipo $(0,2)$ en M dado por

$$\Big(\frac{\partial T_2}{\partial x^1}-\frac{\partial T_1}{\partial x^2}\Big)dx^1\otimes dx^2+\Big(\frac{\partial T_1}{\partial x^2}-\frac{\partial T_2}{\partial x^1}\Big)dx^2\otimes dx^1.$$

Demostrar que $\mathcal{D}$ está bien definido, es decir, que no depende de la carta escogida.