

Capítulo 3

Geometría riemanniana

3.1. Métricas y geodésicas

En la geometría estudiada hasta ahora en este curso ha habido muy poco de *-metría*: nos ha preocupado sobre todo la invariancia por difeomorfismos y en este sentido hemos estado más cerca de la topología diferencial que de los problemas básicos de geometría elemental en los que se miden ángulos y longitudes o se calculan áreas y volúmenes. Al menos en subvariedades de \mathbb{R}^n y con las ideas de cursos anteriores, sólo necesitamos una manera de medir ángulos y longitudes de los vectores del espacio tangente porque a distancias microscópicas de un punto no hay gran diferencia entre la subvariedad y su espacio tangente en dicho punto. En suma, lo que se necesita es un producto escalar que opere en el espacio tangente en cada punto. Un producto escalar es algo bilineal y simétrico que asigna a cada par de vectores un número real, es decir, un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$. Si pedimos una condición de no degeneración, tenemos los conceptos de tensor métrico y métrica introducidos en el primer capítulo.

Definición: Una *variedad semiriemanniana* es una variedad dotada de una métrica.

Recuérdese que la condición de no degeneración que se pedía a una métrica G es que su matriz de componentes (g_{ij}) fuera no singular. Esto no impide que ocurran cosas raras como $G(\partial_1, \partial_1) = 0$ ó $G(\partial_1, \partial_1) < 0$. Tal comportamiento estafalario (*¿*vectores con longitudes nulas o imaginarias?) es conveniente en relatividad pero extraño a nuestras ideas geométricas, por ello es natural dar una denominación específica a las variedades con *métricas definidas positivas*, es decir, con matriz (g_{ij}) definida positiva en todo punto.

Definición: Una *variedad riemanniana* es una variedad semiriemanniana cuya métrica es definida positiva.

Una variedad semiriemanniana (o en particular riemanniana) es un par (M, G) con M una variedad y G una métrica, pero es habitual decir que M es una variedad semi-

riemanniana si la métrica se sobreentiende o no deseamos darla ninguna denominación particular.

Ejemplo: En \mathbb{R}^n con la carta trivial la métrica que corresponde al producto escalar usual es $g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ (se ha usado el convenio de sumación) con $g_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 en otro caso. ésta es la *métrica usual* y la más empleada, pero hay una infinidad de formas de convertir \mathbb{R}^n en una variedad semiriemanniana.

La forma clásica de expresar una métrica, a veces denostada por los matemáticos, reemplaza productos tensoriales por productos habituales en un sentido formal. Así la métrica usual en \mathbb{R}^2 se escribiría $dx^2 + dy^2$ y la métrica $dx \otimes dx + dx \otimes dy + dy \otimes dx + 10dy \otimes dy$ sería $dx^2 + 2dxdy + 10dy^2$.

Definición: Si (M, G) es una variedad semiriemanniana y $f : N \rightarrow M$ es una inmersión¹, se llama *métrica inducida* por f en N a $f^*G(\vec{v}, \vec{w}) = G(df(\vec{v}), df(\vec{w}))$. Si no se indica lo contrario, se sobreentiende que f es la inclusión.

Observación: La notación f^*G está motivada porque formalmente equivale a efectuar el *pullback* de cada uno de los “factores” que forman G . Es un ejercicio comprobar que f^*G realmente define una métrica en N .

Notación: Llamaremos también *métrica usual* a la inducida por la usual en subvariedades de \mathbb{R}^n . Repasando los apuntes de Geometría II comprobamos que no es más que la generalización de la *primera forma fundamental*.

Ejemplo: Hallemos la métrica usual en el paraboloides $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$. Sin preocuparnos de en qué abierto se puede definir, lo más natural es dar la relación entre las variables a través de la carta en coordenadas polares (cilíndricas)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \\ dz = 2r dr \end{cases}$$

Por consiguiente, si G es métrica usual, la métrica inducida (en esta carta) es $i^*G = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \otimes (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \otimes (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) + 4r^2 dr \otimes dr$. Simplificando

$$i^*G = (4r^2 + 1)dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta.$$

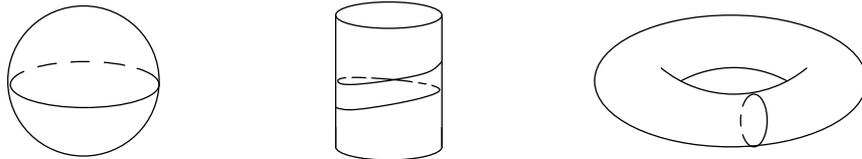
El mismo resultado se obtiene en notación clásica simplemente operando $(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 + 4r^2 dr^2$ y se pongan como se pongan los matemáticos más puristas, esto es más sencillo.

¹Recuérdese de cursos anteriores que una inmersión $f : N \rightarrow M$ es una función tal que df es inyectiva. La inclusión es un caso especial de inmersión.

Una métrica sirve para hallar longitudes de vectores del espacio tangente, pero ¿cómo mediríamos la distancia entre puntos de una variedad riemanniana? Esta pregunta lleva al concepto de geodésica que nosotros introduciremos aquí con una orientación mecánica.

Supongamos que para calcular la distancia de p a q lanzamos desde p con velocidad 1 una partícula sobre la que no actúa ninguna fuerza y medimos el tiempo que tarda en llegar a q . Desde el principio atisbamos problemas topológicos, por ejemplo, si p y q no están en la misma componente conexa, la partícula nunca llega. Todavía peor, en $\mathbb{R}^2 - \{(1, 1)\}$ si desde $p = (0, 0)$ apuntamos a $q = (2, 2)$ la trayectoria recta que seguiría la partícula tropieza con un agujero. Un boquete de grandes dimensiones proyectaría todavía una sombra mayor de puntos inalcanzables.

Olvidemos por ahora estas dificultades y supongamos que operamos localmente, en entornos pequeños, donde estos problemas de ocultamiento no aparecen. Nuestro interés pasa a ser entonces cómo se mueve una partícula ligada a una variedad sobre la que no actúan fuerzas externas. Con poco que recordemos el curso de Física, sabremos que $\vec{F} = m\vec{a}$. En ausencia de fuerzas, $\vec{F} = \vec{0}$, la aceleración \vec{a} que es la derivada segunda de la ecuación de movimiento es nula y la trayectoria² es una recta parametrizada linealmente por el tiempo. Pero esto sólo funciona en \mathbb{R}^3 , si tuviéramos una partícula ligada a una esfera, digamos una canica atrapada entre dos peceras, nuestra intuición nos dice que (descartando la gravedad) al darle un impulso desde un punto inicial debe seguir círculos máximos con velocidad angular constante, y es fácil dar una explicación en términos de fuerzas centrífugas (véase §2.2 en [Ch]). En un cilindro la trayectoria sería en general una hélice (ésta pasa a ser una recta cuando lo desenrollamos sobre el plano) y en otras superficies, como el toro, tenemos cierta intuición acerca de algunas de las trayectorias aunque no sabemos cómo describirlas todas.



¿Cómo hallamos estas ecuaciones de movimiento? ¿Es posible hacerlo de manera invariante sin estar obligados a usar un sistema especial de coordenadas? Con relación a esta última pregunta, nótese que la ecuación $\vec{F} = \vec{0}$ deja de tener validez en coordenadas polares, las rectas cartesianas en general no corresponden a funciones lineales de radios y ángulos; por ejemplo, la recta horizontal $y = 1$ es $r = 1/\sin\theta$ cuando usamos polares. Si nos obligamos a usar coordenadas cartesianas en este caso, ¿qué sistema de coordenadas

²La ecuación de movimiento es la fórmula para el espacio en función del tiempo y la trayectoria es el dibujo de la curva que sale al sustituir los valores de t . Así, $c_1(t) = (\cos t, \sin t)$ y $c_2(t) = (\sin t^2, \cos t^2)$ serían dos ecuaciones de movimiento distintas con la misma trayectoria porque la misma circunferencia se recorre con velocidades bien distintas.

emplearíamos en el toro o la esfera? No hay ninguno con todos los privilegios. Debemos formular la mecánica de manera invariante, y eso empieza a oler a tensor.

Una partícula en \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$ ó 3) sobre la que no actúan fuerzas tiene una energía cinética

$$E = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2.$$

Tomemos prestada la notación de los físicos heredada de Newton consistente en señalar una derivada con un punto sobre la función (y dos derivadas con dos puntos). Si para simplificar suponemos que la masa es $m = 2$ (siempre se puede hacer cambiando de unidades), se tiene

$$E = G(\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}})$$

con G la métrica usual. Si ahora empleásemos una carta arbitraria $(\mathcal{U}, \phi = (q^1, \dots, q^n))$ y describimos la trayectoria de la partícula con $\vec{q} = \vec{q}(t)$, la fórmula es todavía válida pero las componentes de la métrica G cambian de carta

$$E = G(\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}) = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

La notación q^j también está tomada de la Física donde se dice que éstas son las *coordenadas generalizadas* de la partícula. Por ejemplo, como la métrica usual en \mathbb{R}^2 , $dx \otimes dx + dy \otimes dy$, se escribe en polares como $dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$, entonces la energía en polares es $E = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Quizá el lector reconozca esta fórmula de la dinámica de rotación.

Resulta que la Naturaleza es muy ahorrativa³ y, al menos localmente, trata de economizar la energía y las partículas aquí consideradas se mueven entre puntos cercanos de forma que la suma (integral) de todas las energías en su trayectoria sea mínima. Esto conduce a un problema matemático muy importante y posiblemente nuevo para el lector: en lugar de buscar un valor de la variable que haga mínima una función, se busca una función que haga mínima una integral, esto es lo que se llama un problema de *cálculo de variaciones*⁴. Hallaremos la trayectoria de nuestras partículas resolviendo este problema con las coordenadas que nos apetezcan, o mejor, con las que más convenientes sean. Nótese que la minimización es intrínsecamente independiente de las coordenadas (por ejemplo, los valores máximos y mínimos que alcanza $f(x)$ son los mismos que los que alcanzan $f(x^3)$ o $f(3x - \sin x)$).

³Se atribuye a Euler la frase: “Dado que el tejido del Universo es de la mayor perfección y la obra del más sabio Creador, nada en absoluto tiene lugar en el Universo sin que una regla de máximo o mínimo aparezca”.

⁴El origen de esta área se remonta al siglo XVII con el problema de la *braquistocrona* que consiste en el diseño de la forma del tobogán que une dos puntos por el que se puede bajar más rápido (véase el problema 23 en [Ch] §2.2).

Proposición 3.1.1 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$ sea $\mathcal{C} = \{F = (q^1, \dots, q^n) : q^j \in C^2([a, b]), F(a) = \vec{c}, F(b) = \vec{d}\}$. Supongamos que $\int_a^b \mathcal{L}$ con $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, F(t), \dot{F}(t))$ alcanza un máximo o un mínimo en \mathcal{C} para cierta F , entonces F es solución de las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange:*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Observación: Esta notación clásica puede resultar desconcertante y requiere alguna explicación: la parcial con respecto a \dot{q}^k significa la parcial con respecto al k -ésimo lugar donde se sustituye $\dot{F}(t)$ y la derivada total $\frac{d}{dt}$ supone implícitamente que consideramos todas las variables como funciones de t . Nada más instructivo que dar un vistazo a los ejemplos.

Demostración: Si la integral alcanza un extremo en \mathcal{C} para $F = F_0(t)$ entonces para cualquier otra función $\alpha = \alpha(t)$ como F pero con $\alpha(a) = \alpha(b) = \vec{0}$ se cumple que la función real

$$f(\epsilon) = \int_a^b \mathcal{L}(t, F_0(t) + \epsilon \alpha(t), \dot{F}_0(t) + \epsilon \dot{\alpha}(t)) dt$$

alcanza un extremo en $\epsilon = 0$. Nuestros conocimientos de Cálculo I llevan a $f'(0) = 0$. Derivando bajo el signo integral y con una integración por partes

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \alpha^j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{\alpha}^j \right) = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right) \alpha^j$$

donde α^j son las componentes de α . como éstas son arbitrarias, la única posibilidad para que la integral sea siempre nula es que se cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange. \square

Ejemplo: Sea G la métrica usual en \mathbb{R}^2 y \mathcal{L} la energía cinética $\mathcal{L} = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$. En coordenadas cartesianas $\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ (se ha escrito ($q^1 = x, q^2 = y$)). Los cálculos para las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 2\ddot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

y lo mismo con y . Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

que se resuelven como $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(a_0, b_0)$. Esto concuerda con nuestra idea de que en ausencia de fuerzas las trayectorias son rectilíneas (principio de inercia)). En coordenadas polares, como habíamos visto, $\mathcal{L} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} & \Rightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} & \Rightarrow r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Estas ecuaciones tan complicadas todavía representan las mismas trayectorias rectilíneas. Por ejemplo, podemos comprobar que $r(t) = 1/\sin \theta(t)$ con $\cot \theta(t) = t$, correspondiente a la recta horizontal antes mencionada, es solución.

En Cálculo I, los máximos y mínimos locales estaban asociados a puntos críticos, pero puede haber puntos críticos que no correspondan necesariamente a extremos. De la misma forma el resultado anterior no asegura que obtengamos máximos o mínimos al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange. Con la libertad que nos da teorizar, podemos cambiar los postulados y hacer del método lagrangiano un principio físico fundamental. Por la teoría de ecuaciones diferenciales tendremos una solución para cada punto inicial y cada vector de derivadas; físicamente es todo lo necesario: que la posición y velocidad inicial determinen la ecuación de movimiento de una partícula.

Es posible escribir una fórmula general para las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen en el caso en que \mathcal{L} proviene de una métrica. Los ejemplos nos mostrarán que esta fórmula no es demasiado útil en ejemplos concretos, sin embargo es conveniente disponer de ella en teoría.

Aprovechamos para introducir un nuevo convenio:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^k} \text{ se abrevia como } f_{,k}}$$

que se superpone con la notación anterior $\partial_k f$. éstas y otras convenciones a menudo redundantes son las que dan al cálculo tensorial un aspecto tan taquigráfico y misterioso, es la “debacle de los índices” según [Sp1t2].

Definición: Sea (g_{ij}) la matriz formada de componentes de una métrica G y sea (g^{ij}) su matriz inversa. Se llaman *símbolos de Christoffel* a

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}).$$

Los g^{ij} son las componentes de un tensor dos veces contravariante. Esto es, existe un tensor tal que sus componentes en cualquier carta conforman la matriz inversa de la matriz de componentes de la métrica. Sin embargo los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k no son componentes de un tensor: al cambiar de carta no respetan las fórmulas de cambio de coordenadas vistas en el primer capítulo. Nótese que la simetría de los g_{ij} implica las relaciones $g^{ij} = g^{ji}$ y $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Lema 3.1.2 Si $\mathcal{L} = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ con g_{ij} las componentes de una métrica, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son $\ddot{q}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j = 0$.

Demostración: Derivando

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{d}{dt} (2g_{kj} \dot{q}^j) = 2g_{kj,i} \dot{q}^i \dot{q}^j + 2g_{kj} \ddot{q}^j, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir, por tanto, como

$$2g_{kj}\ddot{q}^j - g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j = -2g_{kj,i}\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

En el segundo miembro podemos renombrar arbitrariamente los índices de sumación i y j . Si los intercambiamos y sumamos las ecuaciones resultantes, se deduce

$$g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}(g_{kj,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k})\dot{q}^i\dot{q}^j = 0.$$

Multiplicando por g^{lk} se obtiene la ecuación del enunciado. \square

Definición: Se dice que una curva parametrizada⁵ $c = c(t)$ en una variedad semiriemanniana n -dimensional es una *geodésica* si en cada carta (\mathcal{U}, ϕ) con $\text{Im } c \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, las funciones $(\phi \circ c)(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Por supuesto, se supone que los Γ_{ij}^k están evaluados en el punto $c(t)$.

Como hemos notado antes, el curso de ecuaciones diferenciales asegura que para cada punto y cada vector tangente hay una geodésica. Por otro lado, también el mismo curso nos hace sospechar acertadamente que rara vez tendremos soluciones explícitas de estos sistemas de ecuaciones diferenciales, en general no lineales.

Ejemplo: Calculemos los símbolos de Christoffell en \mathbb{R}^2 en coordenadas polares y las correspondientes ecuaciones de las geodésicas.

La métrica usual en estas coordenadas era $dr^2 + r^2d\theta^2$ (en notación moderna $dr \otimes dr + r^2d\theta \otimes d\theta$). Entonces

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}.$$

Como ambas matrices son diagonales, en la definición de los símbolos de Christoffel podemos suponer $m = k$, porque otro valor de m contribuiría con un sumando nulo. Por consiguiente

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kk}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}).$$

De aquí se deduce, tras cálculos aburridos pero triviales

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

⁵Con la denominación *curva parametrizada* nos referimos a curvas como las consideradas en el primer capítulo para definir el espacio tangente: aplicaciones de un intervalo real en la variedad con derivada no nula.

Con ello volvemos a encontrar las ecuaciones (3.1) para las geodésicas en concordancia con el Lema 3.1.2.

Cualquiera que haya pasado por los cálculos anteriores se percatará que la deducción de (3.1) fue más directa usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y el Lema 3.1.2 nos asegura que de ellas podemos obtener los símbolos de Christoffel. Esto funciona bien como método de cálculo de los Γ_{ij}^k en casos sencillos. El lector incrédulo debería cronometrar cuánto tardaría en completar su cálculo el siguiente ejemplo a partir de la definición.

Ejemplo: Hallemos los símbolos de Christoffel en S^2 cuando se usa la carta en esféricas $\phi = (\theta, \varphi)$ con el significado habitual ($x = \cos \varphi \sin \theta$, $y = \sin \varphi \sin \theta$, $z = \cos \theta$).

Un cálculo (ejercicio) prueba que la métrica usual en esféricas es

$$i^*G = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$$

o en notación clásica $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$, lo que lleva a considerar $\mathcal{L} = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta$. Y se obtiene inmediatamente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 4\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0.$$

Por consiguiente las ecuaciones de las geodésicas son

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

que comparadas con la definición implican $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cos \theta / \sin \theta$, $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$ y que el resto de los símbolos de Christoffel son cero.

Dicho sea de paso, con estas ecuaciones tenemos que el ecuador parametrizado por la longitud de arco, $\theta = \pi/2$, $\varphi = t$, y los meridianos, $\varphi = \text{cte}$, $\theta = t$, son geodésicas. El resto de los círculos máximos convenientemente parametrizados también lo son, simplemente con un argumento de simetría, pero no vemos esas soluciones a simple vista en la ecuación porque en coordenadas esféricas no tienen una ecuación sencilla.

En los cursos de Física básicos no se habla de la minimización de la energía sino de que la energía ni se crea ni se destruye, es constante. La traducción en nuestro lenguaje empleando una métrica es que los vectores tangentes a una geodésica obtenida obtenidos al derivar (las velocidades) tienen longitud constante. Esto se puede deducir fácilmente con material de una futura sección, no obstante jugaremos un poco con la ecuación para practicar y obtener una prueba a partir de la definición.

Lema 3.1.3 Si $c = c(t)$ es una geodésica, con la notación anterior se cumple que $g_{ij}(t) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$ es constante, donde $g_{ij}(t) = g_{ij}(x^1(t), \dots, x^n(t))$.

Demostración: Derivando (no se indica la dependencia en t)

$$\frac{d}{dt} \left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) = g_{ij,k} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + 2g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2x^j}{dt^2}.$$

Por otro lado la ecuación de las geodésicas se puede escribir como (véase la demostración del resultado anterior o la definición de los símbolos de Christoffel)

$$g_{ij} \frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i}) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^j}{dt}.$$

Sustituyendo $g_{ij}d^2x^j/dt^2$ en la fórmula anterior, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) = \frac{1}{2}(g_{kj,i} - g_{ij,k}) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

y esto es cero porque a cada sumando se le puede asignar su negativo intercambiando i por k . \square

Dada una curva parametrizada en una variedad riemanniana M , $c : [a, b] \rightarrow M$, por analogía con la fórmula euclídea $\int_a^b \|c'(t)\| dt$ se define su *longitud de arco* entre $c(a)$ y $c(b)$ de la forma obvia:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{G(c'(t), c'(t))} dt.$$

Deduciremos a partir del resultado anterior que las geodésicas en variedades riemannianas también son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la longitud de arco. Este hecho es geoméricamente muy significativo (si hay curvas que minimizan la longitud, son geodésicas) pero poco relevante para el resto del curso, más orientado al ámbito semiriemanniano.

Proposición 3.1.4 *Las geodésicas son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\mathcal{L} = \sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}$.*

Demostración: Derivando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} &= \mathcal{L}^{-1} g_{ij} \dot{q}^j, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} &= (2\mathcal{L})^{-1} g_{kj,i} \dot{q}^k \dot{q}^j, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) &= -\mathcal{L}^{-2} \frac{d\mathcal{L}}{dt} g_{ij} \dot{q}^j + \mathcal{L}^{-1} g_{ij,k} \dot{q}^k \dot{q}^j + \mathcal{L}^{-1} g_{ij} \ddot{q}^j. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.1.3 $d\mathcal{L}/dt = 0$ y empleando $g_{ij,k}\dot{q}^k\dot{q}^j = (g_{ij,k} + g_{ik,j})\dot{q}^k\dot{q}^j/2$ se deduce

$$g_{ij}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i})\dot{q}^k\dot{q}^j = 0.$$

que son ecuaciones que satisfacen las geodésicas. \square

No resistimos incluir unos breves comentarios sobre la posibilidad de usar la métrica para definir una distancia en una variedad riemanniana conexa M .

Dados dos puntos $p, q \in M$ siempre existe una curva parametrizada C^∞ a trozos⁶ que conecta ambos puntos y tiene sentido definir

$$d_M(p, q) = \inf\{L(c) : c \text{ es } C^\infty \text{ a trozos con } c(0) = p \text{ y } c(1) = q\}.$$

Se puede probar (§4.7 [Bu-Gi], VI.4 [Ga-Ru]) que d_M es una distancia en M y que la topología métrica es la misma que la de M . Si M es completa, esto es, si con la topología métrica es un espacio topológico completo⁷ entonces hay un mínimo: el ínfimo se alcanza para las geodésicas y reparametrizaciones suyas (Cor.4.7.6 [Bu-Gi], [ON]). La propiedad de ser completo no es gratuita, por ejemplo si $M = \mathbb{R}^2$ el ínfimo en $d_M((-1, -1), (1, 1))$ se alcanza para la recta que une los dos puntos pero, como apuntábamos al comienzo de la sección, en $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ no se alcanza el ínfimo para ninguna curva (hay ínfimo pero no mínimo). Todavía más, el *teorema de Hopf-Rinow* ([Bu-Gi], [ON]) afirma que M es completa si y sólo si las geodésicas se pueden extender indefinidamente, es decir, si se pueden definir como curvas $c : \mathbb{R} \rightarrow M$.

Ejercicios de la sección 1

- 1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
 - i) Si una métrica es definida positiva, ¿lo es la métrica inducida?
 - ii) ¿Cómo se podría deducir de un ejemplo de esta sección que los símbolos de Christoffel no son tensores?
 - iii) ¿Por qué en dimensión 4 hay como mucho 40 símbolos de Christoffel distintos? ¿Cuántos hay en dimensión 5?
 - iv) ¿Por qué $r = t$, $\theta = t$ no es una geodésica en \mathbb{R}^2 usando coordenadas polares?
- 2) Hallar la métrica inducida en el hiperboloide $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ usando la carta (definida en cierto abierto) $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.
- 3) Probar que la métrica usual de S^2 en esféricas es $d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$.
- 4) Sea G la métrica inducida en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ usando la carta proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ definida en $\mathcal{U} = S^2 \cap \{z > 0\}$. Demostrar que la base natural del espacio tangente $\{\partial_1, \partial_2\}$ no es ortogonal en \mathcal{U} , esto es, que $G(\partial_1, \partial_2)$ no es idénticamente nulo. Repetir el problema para la carta dada por los ángulos en esféricas. (Nota: Empleando la curvatura de Gauss es posible deducir que este hecho es común a cualquier carta de S^2).

⁶En realidad se puede pedir que sea simplemente C^∞ . Consideramos aquí la situación más general de regularidad C^∞ a trozos por coherencia con las referencias citadas.

⁷Véase la definición exacta en [Mu], intuitivamente podemos pensar que no le falta ningún punto límite.

5) Hallar alguna carta del cilindro de radio 3 de manera que $\{\partial_1, \partial_2\}$ sea ortonormal con la métrica inducida.

6) Demostrar que

$$r = (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)^{-1} \quad \text{con} \quad \theta = \arctan \frac{t}{\sqrt{2} - t}$$

define una geodésica en \mathbb{R}^2 con la métrica en polares $dr^2 + r^2 d\theta^2$. *Indicación:* No es necesario siquiera escribir la ecuación de las geodésicas.

7) Calcular las geodésicas con θ constante usando la métrica $dr^2 - r^2 d\theta^2$.

8) Calcular los símbolos de Christoffel para la métrica $dr^2 + 4 \operatorname{senh}^2 r d\theta^2$ y hallar alguna de las geodésicas.

9) Calcular los símbolos de Christoffel para \mathbb{R}^3 usando coordenadas esféricas (r, θ, φ) . *Indicación:* Como $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ son ortogonales, de antemano sabemos que en la métrica no aparecerán los términos cruzados $drd\theta$, $drd\varphi$, $d\theta d\varphi$, lo cual simplifica los cálculos iniciales.

10) Calcular los símbolos de Christoffel y las geodésicas de \mathbb{R}^2 con la métrica $du^2 + 4vdudv + 8v^2 dv^2$.

11) Calcular los símbolos de Christoffel y alguna geodésica del semiplano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con la métrica de Poincaré $y^{-2} dx^2 + y^{-2} dy^2$.

12) Considérese la banda $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ con la métrica definida por

$$\frac{4}{(1-x^2)^2} dx^2 + xy dx dy + (1+x^2+y^2) dy^2.$$

Utilizar que la energía es constante para calcular las geodésicas horizontales de M sin necesidad de hallar los símbolos de Christoffel.

3.2. La métrica de Schwarzschild

La métrica de Minkowski $G = -dt^2 + c^{-2} dx^2$ convierte a \mathbb{R}^2 , con la carta identidad $\phi = (t, x)$ en una variedad semiriemanniana. Como sus componentes son constantes (recuérdese que c es la velocidad de la luz en el vacío) las ecuaciones de las geodésicas $\gamma(\tau) = (t(\tau), x(\tau))$ serán $\ddot{t} = \ddot{x} = 0$. Imponiendo que partan desde el origen se tiene $t(\tau) = a\tau$, $x(\tau) = b\tau$ donde τ es el parámetro de la geodésica, y de aquí $x/t = b/a = \text{cte}$. Mecánicamente esto significa que en el mundo de la relatividad restringida, igual que en el newtoniano más familiar, en ausencia de fuerzas las partículas se mueven con velocidad constante (principio de inercia). Para un rayo de luz $b/a = c$ y se cumple $G(\gamma', \gamma') = 0$, por otro lado, según nos han dicho siempre, las partículas materiales viajan a velocidades menores que las de la luz, por consiguiente las geodésicas correspondientes verifican $G(\gamma', \gamma') < 0$. Multiplicando τ por una constante adecuada de hecho se puede conseguir

en el instante inicial $G(\gamma', \gamma') = -1$ y el Lema 3.1.3 asegura que esto se cumplirá a lo largo de toda la geodésica. Denotando a la velocidad b/a con el nombre más natural v , esta normalización permite escribir las geodésicas anteriores, salvo signos convencionales, como $t(\tau) = \tau/\sqrt{1-v^2/c^2}$, $x(\tau) = -v\tau/\sqrt{1-v^2/c^2}$ y estas fórmulas coinciden con las transformaciones de Lorentz para un observador que mide tiempo τ y espacio 0, es decir, que viaja con la partícula. En resumen, bajo la normalización $G(\gamma', \gamma') = -1$ el parámetro τ de la geodésica se interpreta físicamente como el llamado *tiempo propio*, el tiempo medido desde la partícula material cuya trayectoria representa la geodésica γ .

Imaginemos ahora que en lugar de la métrica de Minkowski consideramos en \mathbb{R}^2

$$G = -A(x^2) dt^2 + dx^2$$

con $A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ creciente. Al calcular las geodésicas, la igualdad $\frac{d}{d\tau}(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{t}) = 0$ implica $A(x^2)\dot{t} = K = \text{cte}$ y sustituyendo en la segunda de las ecuaciones se deduce

$$x'' + K^2 x \frac{A'(x^2)}{(A(x^2))^2} = 0.$$

Si $x(0) > 0$ y $x'(0) = 0$, es decir si inicialmente dejamos una partícula en reposo en la parte positiva del eje X , se cumplirá $x''(0) < 0$, la partícula se acelerará en dirección hacia el origen, y si comienza en la parte negativa se sigue $x''(0) > 0$ con el mismo efecto. Los habitantes de este universo pensarían que en el centro de \mathbb{R} hay un sol que atrae a todas las partículas de modo que aquellas en reposo en $(0, \infty)$ sufren una aceleración hacia la izquierda y las de $(-\infty, 0)$ hacia la derecha.

La relatividad general es una teoría geométrica de la gravitación creada en 1915 por A. Einstein dentro de las líneas ilustradas en el ejemplo anterior, donde se concibe la gravedad como una métrica en la variedad que representa el espacio-tiempo. De esta forma deja de ser una fuerza asociada a un campo y deviene en una deformación en nuestra manera de medir el espacio y el tiempo. Según esta interpretación las partículas masivas se aceleran al acercarse la Sol porque allí las longitudes están más “contraídas”. Ciertamente el salto conceptual abstracto dado por Einstein fue formidable, sobre todo teniendo en cuenta que la geometría riemanniana y el cálculo tensorial no tenían gran difusión. No es de extrañar que inicialmente fueran matemáticos destacados los más activamente interesados en la nueva teoría.

La pregunta obvia es ¿qué razones físicas hay para seguir esta explicación tan estafalaria de la gravedad? No nos detendremos aquí mucho en esta cuestión (véase [Ch] §3.1) y nos limitaremos a citar una razón experimental y otra teórica. La primera es que con mediciones extremadamente precisas a escala astronómica se ha comprobado que la famosa fórmula $-GMm/r^2$, sobre la cual I. Newton construyó su inamovible edificio de la gravitación, no es del todo correcta mientras que las métricas de la relatividad general

explican la levísima divergencia con los experimentos. La razón teórica es la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria. Por explicarlo con un ejemplo, si atraemos con un imán objetos de hierro, los que tienen mayor masa se acercarán más despacio o no se moverán por efecto del rozamiento, sin embargo si la Estación Espacial, un astronauta o un alfiler son capturados por la atracción gravitatoria de la Tierra las ecuaciones de movimiento serán exactamente las mismas. ¿Cómo sabe la Tierra que debe atraer menos al alfiler para que se acerque a la misma velocidad? Pensando que la gravedad es una deformación del espacio-tiempo, algo intrínseco a la geometría del mundo en que vivimos, es natural que todos los objetos se comporten por igual.

En relatividad general la variedad a considerar debe representar las tres coordenadas de espacio y la de tiempo, por tanto es de dimensión 4. La métrica en cada punto para alguna carta debiera parecerse a la de Minkowski en \mathbb{R}^4

$$-dt^2 + c^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Matemáticamente, fijado un punto p , $Q(\vec{v}) = G(\vec{v}, \vec{v})$ define una forma cuadrática en $T_p(M)$ y el álgebra lineal nos dice que todas las formas cuadráticas de la misma signatura (número de autovalores positivos y negativos) son equivalentes por cambios de base. Entonces las métricas de relevancia física son las de signatura $(1, 3)$. Fijada una se dice que la variedad semiriemanniana resultante es una *variedad de Lorentz*. Las geodésicas representando rayos de luz (fotones) y partículas materiales son de los tipos recogidos en la siguiente definición.

Definición: Se dice que γ es una *geodésica nula* en una variedad semiriemanniana con métrica G si $G(\gamma', \gamma') = 0$ y se dice que es una *geodésica temporal* si $G(\gamma', \gamma') < 0$. En este último caso cuando $G(\gamma', \gamma') = -1$ se dice que está parametrizada por el *tiempo propio*.

Resumiendo, la relatividad general establece un diccionario físico-matemático

Relatividad	Geometría
espacio-tiempo	→ variedad de Lorentz M
gravedad	→ métrica en M
rayos luminosos	→ geodésicas nulas
partículas materiales	→ geodésicas temporales
tiempo propio	→ parámetro de geodésicas temporales normalizadas

La cuestión a resolver es cómo deducir la métrica que corresponde a la gravedad del mundo real. La respuesta no es nada fácil y pospondremos a un próximo capítulo su

tratamiento matemático. Anticipamos que al igual que el potencial gravitatorio (fuera de una masa) es solución de una ecuación del tipo $\Delta V = 0$, en la relatividad general la métrica es solución de unas ecuaciones tensoriales muy feas que también contienen derivadas segundas.

Poco después de que dichas ecuaciones vieran la luz, K. Schwarzschild las resolvió en el caso radial que físicamente corresponde a la deformación del espacio-tiempo en el exterior de una masa esférica estática despreciando la influencia de otras masas.

Definición: Sea $M = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{0\})$ con las funciones coordenadas (t, r, θ, φ) siendo r, θ, ϕ las coordenadas esféricas habituales. Se llama *métrica de Schwarzschild* a

$$-\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)dt^2 + c^{-2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}dr^2 + c^{-2}r^2d\theta^2 + c^{-2}r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

donde r_0 es una constante, llamada *radio de Schwarzschild*, que físicamente representa $2Gm/c^2$ con G la constante de gravitación universal y m la masa⁸.

Para estudiar movimientos radiales, los que en términos espaciales sólo dependen del radio r (la “distancia” al origen), nos podemos olvidar de θ y φ y para mayor simplicidad considerar que el espacio-tiempo está representado por $(t, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Definición: En $M = \{(t, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ se llama *métrica de Schwarzschild bidimensional* a

$$(3.2) \quad -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + c^{-2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

Una primera sorpresa es que aparte de la singularidad natural en $r_0 = 0$ (también existe en la fuerza de Newton) haya otra en $r = r_0$. ¿Por qué no nos percatamos de ella? En el sistema internacional $G = 6,670 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ y $c = 2,9979 \cdot 10^8 m/s$ y con unos datos astronómicos cerca calculamos que para la Tierra, Júpiter y el Sol los valores de r_0 son respectivamente $8,87mm$, $2,82m$ y $2,96km$. Entonces para notar esa singularidad la Tierra debería tener el tamaño de una canica, Júpiter debería caber en nuestra habitación o el Sol tendría que poderse recluir en una ciudad.

Los avances astronómicos han mostrado que tales objetos, tan diferentes de los astros que nos rodean y bien conocidos en ciencia ficción, existen realmente. Cuando el radio de una estrella se reduce por un colapso más allá de r_0 entonces la singularidad aparece y se dice que es un *agujero negro* [Ha-El], [Hu-To]. La esfera $r = r_0$ en la que la métrica es singular se llama *horizonte de sucesos* del agujero negro. En principio habría que omitir esta esfera de la variedad que representa el espacio-tiempo aunque veremos más adelante que la singularidad no es tan crítica como parece.

⁸En breve veremos que ésta es la única interpretación posible de r_0 si queremos recuperar la concordancia aproximada con la teoría de Newton.

Una cuestión básica es cómo cae un objeto que parte del reposo por efecto de la gravedad. El problema matemático consiste en calcular las geodésicas de (3.2).

Proposición 3.2.1 Si $\gamma(t) = (t(\tau), r(\tau))$ es una geodésica de (3.2) parametrizada por el tiempo propio y tal que $r(0) = R_0 > r_0$, $r'(0) = 0$, entonces

$$r(\tau) = R_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}V(K_0\tau)\right) \quad \text{donde} \quad K_0 = \frac{2c}{R_0} \sqrt{\frac{r_0}{R_0}}$$

y $V(x)$ es la función inversa de $f(x) = x + \sin x$.

Observación: Para masas y distancias “normales” K_0 es muy pequeño y entonces $V(K_0\tau)$ es $K_0\tau/2$ con gran aproximación, de donde se infiere que la aceleración inicial es $r''(0) \sim -R_0 K_0^2/8$. Si se quiere que esto se parezca a la fórmula de Newton $-Gm/R_0^2$, se debe cumplir $R_0 K_0^2 = 8GM/R_0^2$ que después de operar lleva a $r_0 = 2GM/c^2$, por eso la única manera de interpretar físicamente r_0 es como $2Gm/c^2$ si se quiere que la nueva teoría concuerde en el límite con la newtoniana.

Demostración: Las componentes de la métrica no dependen de t , entonces

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\dot{t} = \text{cte}$$

y por la definición del tiempo propio $-(1-r_0/r)\dot{t}^2 + c^{-2}(1-r_0/r)^{-1}\dot{r}^2 = -1$. Combinando estas dos ecuaciones se tiene $\dot{r}^2 = r_0 c^2 (r^{-1} - \text{cte})$ y $r'(0) = 0$ implica que esta constante es R_0^{-1} . En resumen, hay que resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)$$

bajo la condición inicial $r(0) = 0$. Con un cambio de variable $v = V(K_0\tau)$ o equivalentemente $\tau = (v + \sin v)/K_0$, la ecuación anterior es por la regla de la cadena

$$\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 = \frac{c^2 r_0}{K_0^2} (1 + \cos v)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)$$

y por sustitución directa $r(v) = R_0 \cos^2(v/2) = R_0(1 + \cos v)/2$ es solución de esta ecuación. \square

Consideremos ahora los rayos luminosos en las direcciones radiales.

Proposición 3.2.2 Si $\gamma(t) = (t(\tau), r(\tau))$ es una geodésica nula de (3.2) con $r(0) = R_0 > r_0$, $t(0) = 0$, entonces

$$\pm ct = r - R_0 + r_0 \log\left(\frac{r - r_0}{R_0 - r_0}\right)$$

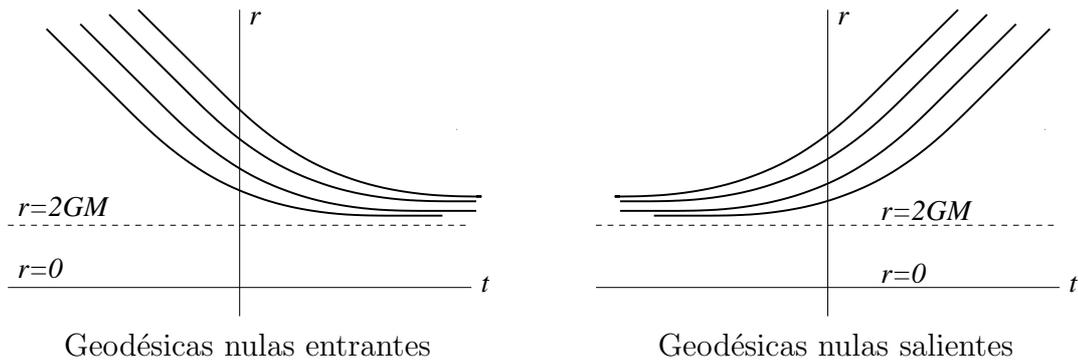
donde el signo coincide con el del $r'(0)/t'(0)$, es decir, es positivo si es saliente y negativo si es entrante.

Demostración: Por ser una geodésica nula se tiene

$$-\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + c^{-2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0$$

y por la regla de la cadena $c^2(dt/dr)^2 = (1 - r_0/r)^{-2}$. empleando las condiciones iniciales se tiene $\pm ct = \int_{R_0}^r (1 - r_0/x)^{-1} dx$ y la integral es elemental. \square

Un subproducto de la prueba es que la “velocidad” dr/dt de un rayo de luz es $c(1 - r_0/r)$, por consiguiente se ralentiza cuanto más próximo está al horizonte de sucesos y en el límite la velocidad es nula. Esto concuerda con la imagen clásica de un agujero negro como una estrella con una gravedad tan poderosa que ni la luz puede escapar. Curiosamente P.S. Laplace ya teorizó sobre tales objetos a finales del XVIII (véase [Ha-El]). Más allá de esta idea clásica, un poco imperfecta, la gráfica de las curvas del enunciado muestra que las geodésicas nulas no atraviesan el horizonte de sucesos.



Por otro lado la Proposición 3.2.1 implica que una partícula sólo necesita un tiempo finito para llegar al horizonte de sucesos porque $\cos^2\left(\frac{1}{2}V(K_0\tau)\right)$ toma todos los valores entre 0 y 1. En otras palabras: una partícula puede alcanzar el horizonte de sucesos de un agujero negro en un segundo medido por un observador subido a ella pero los observadores estáticos exteriores si tuvieran instrumentos infinitamente precisos percibirían indefinidamente las señales previas a su entrada en el horizonte de sucesos sin detectar que ésta se efectúa. Esta situación choca fuertemente con nuestro sentido común y Einstein trató de evitarla en [Ei] probando que bajo ciertas hipótesis que pudieran darse en la formación de cúmulos estelares, el horizonte $r = r_0$ debería estar “tapado” con masa sugiriendo así que los agujeros negros eran un modelo matemático sin realidad física.

Desde el punto de vista geométrico es posible remediar los problemas y paradojas que plantea la singularidad en $r = r_0$ utilizando unas sorprendentes cartas que permiten eliminarla (véase [Ha-El] §5.5).

Parte de las confusiones en la relatividad general se deben a interpretar t y r como “verdaderos” tiempos y espacios medidos por todos los observadores. La relatividad del

tiempo es particularmente contraintuitiva y adquiere una dimensión más profunda que en la relatividad especial por presentarse incluso para observadores estáticos.

Consideremos que desde $r = r_A$ parte una geodésica (una señal luminosa, una partícula) hacia r_B . Al sumarle una cantidad constante Δt a $t(\tau)$ tendremos también una geodésica que representa la misma señal emitida en otro tiempo. Para un observador estático ($r'(0) = 0$) en r_A se cumple $-1 = -(1 - r_0/r)(\frac{dt}{d\tau}(0))^2$ y entonces si Δt es pequeño el intervalo $\Delta\tau_A$ (de tiempo propio) que medirá es, aproximando $dt/d\tau$ por $\Delta t/\Delta\tau_A$,

$$\Delta\tau_A = (1 - r_0/r_A)^{1/2}\Delta t.$$

Es decir, que t difiere del tiempo (propio) medido por los observadores, a veces se dice que t es el *tiempo de Schwarzschild*. Si razonamos de la misma forma con un observador en r_B deduciremos

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{1 - r_0/r_A}{1 - r_0/r_B}}.$$

Esta fórmula implica que si un fenómeno oscilatorio ocurre en las cercanías de una gran masa gravitatoria, cuanto más lejos estemos menos frecuencia detectamos. De manera ingenua pero representativa podemos pensar que las masas atraen a los frentes de onda y cuando la atracción gravitatoria se debilita aumenta la distancia entre los nodos. En el caso de las radiaciones electromagnéticas, especialmente para el espectro luminoso de las estrellas, este fenómeno se llama *corrimiento hacia el rojo gravitatorio* (hay otro famoso corrimiento hacia el rojo debido a la expansión del Universo) y se ha detectado astronómicamente aunque no es nada fácil de cuantificar con precisión porque es muy complicado medir la masa y el radio de una gran estrella lejana.

Nótese que si r_A está muy próximo a r_0 un instante para el primer observador se transforma en una eternidad para el segundo, porque el tic de reloj junta más al tac cuanto mayor sea la gravedad, de ahí el extraño comportamiento de los objetos que se acercan al horizonte de sucesos.

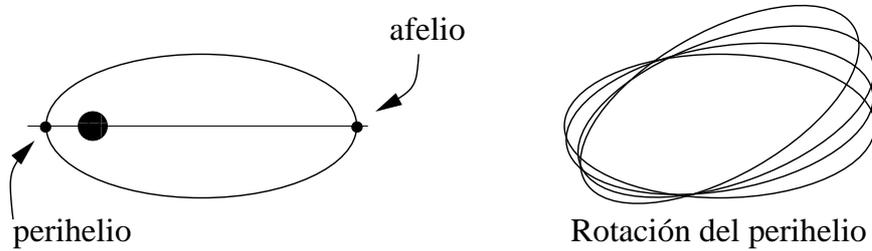
Terminaremos esta sección deduciendo un efecto que durante algún tiempo fue el único débil apoyo experimental⁹ a la relatividad general creada por Einstein.

Según enunció J. Kepler en su primera ley y probó Newton a partir de su ley de gravitación, los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. Los puntos de la órbita más cercano y más lejano al Sol se llaman *perihelio* y *afelio*, respectivamente. Debido a la influencia de otros planetas y objetos astronómicos las órbitas

⁹Es de observar que el fenómeno que describiremos no es una deducción inesperada y apriorística de la relatividad general, bien al contrario, incluso en versiones previas erróneas de la relatividad general, Einstein buscó obtener como consecuencia este fenómeno conocido en el siglo XIX. Al igual que la desviación gravitatoria de los rayos luminosos, pero en mucha menor medida, su verificación experimental no estuvo históricamente libre de dudas.

no son exactamente elípticas pero el ingenio de los astrónomos permitió cuantificar estas perturbaciones en concordancia con la gravitación de Newton.

En el siglo XIX se estudió con suma precisión la órbita de Mercurio, el planeta más afectado por la gravedad del Sol, y se observó que no era una elipse estática sino que el perihelio iba rotando levemente de revolución en revolución cierto ángulo que con los datos actuales es de $574''$ por cada siglo. Sorprendentemente una minúscula parte de esta rotación, concretamente $43''$ por siglo (al principio se pensó que algo menos) no era debida a la influencia de otros planetas. A pesar de ser una cantidad casi inapreciable (habría que esperar casi 10000 años para detectar una variación de un grado) permaneció como un problema menor pero insidioso durante años. Se sugirió que quizá existiera un nuevo planeta o gran asteroide, llamado provisionalmente Vulcano, entre el Sol y Mercurio.



Vamos a probar que la métrica de Schwarzschild tiene órbitas casi-elípticas que presentan una rotación del perihelio coincidiendo con la esperada en el caso de Mercurio. Con este propósito no podemos emplear la simplificación (3.2) porque ahora buscamos geodésicas confinadas en el plano de la eclíptica $\theta = \pi/2$ con r y φ variando. Nos ocuparemos primero de la relación entre estas dos funciones sin fijarnos en la dependencia en τ .

Proposición 3.2.3 *Las geodésicas de la métrica de Schwarzschild incluidas en el plano $\theta = \pi/2$ verifican que r y φ están relacionados mediante*

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = Ar^4 + Br^3 - r^2 + r_0r$$

donde A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales y de r_0 .

Demostración: Las componentes de la métrica de Schwarzschild no dependen de t ni de φ , entonces por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = C_1, \quad r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = C_2$$

con C_1 y C_2 constantes. Sustituyendo los valores de \dot{t} y $\dot{\varphi}$ (y $\dot{\theta} = 0$) en \mathcal{L} se deduce

$$-C_1\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} + c^{-2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + c^{-2}C_2^2r^{-2} = -1$$

y operando

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2(C_1^2 - 1) + \frac{c^2 r_0}{r} - \frac{C_2^2}{r^2} - \frac{r_0 C_2^2}{r^3}.$$

Dividiendo entre $(d\varphi/d\tau)^2 = C_2^2/r^4$ se obtiene el resultado. \square

Seguiremos ahora [Fo-Ni] con un argumento debido a C. Møller que es bastante directo y general no necesitando la hipótesis de que la órbita sea casi circular lo cual no sería aplicable a Mercurio.

El cambio $u = 1/r$ en la proposición anterior conduce a

$$(3.3) \quad (u')^2 = A + Bu - u^2 + r_0 u^3.$$

El perihelio y el afelio corresponden a los valores extremos de u , digamos u_p y u_a , en lo que la derivada se anula, por consiguiente el polinomio P del segundo miembro de (3.3) es divisible por $(u - u_p)(u - u_a)$. Además P tiene como suma de sus raíces r_0^{-1} por las fórmulas de Vieta y esto es suficiente para determinar la tercera raíz, permitiendo escribir (3.3) como

$$\frac{u'}{\pm\sqrt{P(u)}} = 1 \quad \text{donde} \quad P(u) = (u - u_a)(u_p - u)(1 - r_0(u + u_a + u_p))$$

y el signo será positivo si u es creciente ($u' > 0$) y negativo en caso contrario.

Partiendo del afelio, al pasar al perihelio siguiente u crece mientras que cuando se pasa del perihelio anterior al afelio presente u decrece. Con esta idea en mente, integrando la ecuación anterior se obtienen las siguientes fórmulas para la variación del ángulo:

$$\varphi_{\text{per.sig.}} - \varphi_{\text{afe.}} = \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}, \quad \varphi_{\text{afe.}} - \varphi_{\text{per.ant.}} = \int_{u_p}^{u_a} \frac{du}{-\sqrt{P(u)}}.$$

Sumando ambas fórmulas tenemos que la variación del ángulo entre dos perihelios consecutivos es

$$\Delta = 2 \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}} - 2\pi.$$

Para Mercurio las medidas astronómicas indican $u_a = 1,43 \cdot 10^{-11}m$ y $u_p = 2,19 \cdot 10^{-11}m$ y el r_0 correspondiente al Sol (la masa que genera la métrica de Schwarzschild) es, como habíamos mencionado, $2,96 \cdot 10^3m$. Calculando numéricamente la integral (con ayuda de un ordenador), se obtiene $\Delta = 5,04 \cdot 10^{-7}$. Teniendo en cuenta que Mercurio tarda 0,24 años en dar una vuelta alrededor del Sol, cada siglo habrá dado 416,67 vueltas y la variación del ángulo se multiplicará por este número, siendo

$$\text{Variación secular} = 2,10 \cdot 10^{-4} rad = 43,32''$$

lo que coincide con gran precisión con la cantidad observada experimentalmente. En realidad no es necesario utilizar el ordenador para estimar Δ , con unas aproximaciones sencillas (Taylor) se puede deducir la aproximación

$$\Delta \approx 3\pi r_0(u_a + u_p)/2.$$

Ejercicios de la sección 2

1) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

i) La métrica de Schwarzschild con $r_0 = 0$ coincide con la de Minkowski en esféricas, ¿por qué esto es natural?

ii) ¿Puede la métrica $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + 4dydz + 3dz^2$ representar un espacio-tiempo?

iii) Si $\gamma(\tau)$ y $\gamma(K\tau)$ con K una constante son geodésicas parametrizadas por el tiempo propio, ¿qué puede decirse de K ?

iv) ¿Cuál es la justificación del nombre “horizonte de sucesos”?

2) Para el espacio-tiempo $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)\}$ dotado con la métrica $-(1-x^2)^{-1}dt^2 + dx^2$, hallar las geodésicas parametrizadas por el tiempo propio con $x(0) = x_0$ y $x'(0) = t(0) = 0$.

3) Hallar los símbolos de Christoffel para la métrica de Schwarzschild bidimensional.

4) Tómese en \mathbb{R}^2 la métrica $G = -A(x^2) dt^2 + dx^2$ con $A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Si $\gamma(\tau) = (t(\tau), x(\tau))$ es una geodésica parametrizada por el tiempo propio con $x(0) = x_0$ y $x'(0) = t(0) = 0$, calcular la aceleración $x''(0)$ en términos de x_0 y A .

5) Si nos dejamos caer hacia un agujero negro partiendo del reposo desde $r = R_0$, probar que según nuestras mediciones tardaremos en alcanzar el horizonte de sucesos $r = r_0$ un tiempo dado por la fórmula

$$\tau_H = \frac{R_0}{c} \left(\sqrt{\frac{R_0}{r_0}} \arccos \sqrt{\frac{r_0}{R_0}} + \sqrt{1 - \frac{r_0}{R_0}} \right).$$

6) Si mido 1,75m, me he pasado toda la vida de pie sobre la Tierra ($R = 6,38 \cdot 10^6 m$, $r_0 = 8,87 \cdot 10^{-3} m$) y mi cabeza tiene exactamente 22 años; estudiar si mis pies son más o menos jóvenes que mi cabeza y aproximar la diferencia de edad. (Despréciase el crecimiento, la rotación de la Tierra y los efectos gravitatorios externos).

7) Supongamos que una partícula material se aleja radialmente de una estrella de manera que si se prolongase indefinidamente su movimiento, llegaría al infinito con velocidad cero. Demostrar que el tiempo de Schwarzschild que necesita para ir de r_A a r_B viene dado por $t_B - t_A = r_0^{-1/2} c^{-1} \int_{r_A}^{r_B} (r - r_0)^{-1} r^{3/2} dr$. ¿Qué ocurre cuando $r_A \rightarrow r_0^+$?

8) Probar que a lo largo de cualquier geodésica de la métrica de Schwarzschild la expresión $r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$ permanece constante.

9) En relatividad general, al igual que en el caso clásico, es posible que un planeta siga una órbita circular alrededor de una estrella. Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a la variable r demostrar que se verifica la segunda ley de Kepler $\omega^2 r^3 = GM$ donde $\omega = d\varphi/dt$.

10) Usar la aproximación $(1-x)^{-1/2} \approx 1 + x/2$ para x pequeño para obtener el ángulo de rotación del perihelio

$$\Delta \approx \int_{u_a}^{u_p} \frac{2 + r_0(u_a + u_p + u)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du - 2\pi.$$

y calcular esta integral explícitamente para conseguir la aproximación $\Delta \approx 3\pi r_0(u_a + u_p)/2$.

11) La Tierra en su afelio dista del Sol $1,52 \cdot 10^{11}m$ y en su perihelio $1,47 \cdot 10^{11}m$. Despreciando la influencia de otros planetas, hallar cuántos centímetros se mueve el punto en que se alcanza el perihelio al cabo de un año.