

Geometría IV

Examen parcial 22/05/2008

1) Calcular las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas de \mathbb{R}^2 cuando se emplea la métrica $dx^2 + e^{x-2y} dy^2$.

2) Sea \bar{D} el disco unidad cerrado. Probar que no existe $f : \bar{D} \rightarrow S^1$ que deje fijos los puntos de del borde de \bar{D} . *Indicación:* En caso de que existiera, $S^1 \xrightarrow{i} \bar{D} \xrightarrow{f} S^1$ sería la identidad y esto tendría su reflejo en la cohomología.

3) Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Existen en $\Omega^2(S^2)$ formas cerradas que no sean exactas?

b) Una partícula material se mueve bajo la acción de la gravedad dada por la métrica de Schwarzschild bidimensional¹. Si en un cierto instante τ cumple $r = 4r_0/3$ y $dr/d\tau = 3c/8$, ¿Cuánto vale $dt/d\tau$?

c) Si en \mathbb{R}^2 tenemos una métrica de la forma $f(y)dx^2 + g(y)dy^2$, ¿debe permanecer la expresión $f(y)x'$ constante a lo largo de cualquier geodésica?

Duración: Una hora.

Puntuación: 3 + 3 + 1,25 + 1,25 + 1,5.

¹Ésta es la métrica $-(1 - r_0/r) dt^2 + c^{-2}(1 - r_0/r)^{-1} dr^2$.

Geometría IV

Examen parcial 27/05/2008

- 1) Calcular todos los grupos de cohomología de \mathbb{R}^2 menos dos puntos.

- 2) En \mathbb{R}^2 se considera la métrica $f(x)dx^2 + dy^2$. Calcular Γ_{11}^1 en términos de f y dar alguna f para la que este símbolo de Christoffel sea 1.

- 3) Responder razonadamente a las siguientes preguntas:
 - a) Si en S^2 se tienen $\omega, \eta \in \Omega^2(S^2)$ cerradas pero no exactas, ¿debe ser ω un múltiplo real de η ?
 - b) Una partícula material se mueve bajo la acción de la gravedad dada por la métrica de Schwarzschild bidimensional², ¿es $(1 - r_0/r)dt/d\tau$ invariante a lo largo de todo el movimiento?
 - c) ¿Cuántos símbolos de Christoffel distintos puede tener una variedad de dimensión 3?

Duración: Una hora.

Puntuación: 3 + 3 + 1,25 + 1,5 + 1,25.

²Ésta es la métrica $-(1 - r_0/r) dt^2 + c^{-2}(1 - r_0/r)^{-1} dr^2$.