Problemas de E.D.O. (2º de Matemáticas)

1. Dado el problema

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

hállense al menos tres soluciones. *Indicación*: Combínense las dos soluciones que se pueden obtener de forma sencilla.

2. Calcúlense todos los valores $\alpha \in [0, \infty)$ para los que en el problema

$$\begin{cases} y' = |y|^{\alpha} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

haya existencia y unicidad (para $\alpha = 0$ escríbase $|y|^{\alpha} = 1$).

3. Decídase si cada una de las siguientes implicaciones es cierta para funciones $y, z \in C^1\big([0, \infty)\big)$, dando un contraejemplo o una demostración:
a) $y \geq z \Rightarrow y' \geq z'$.
b) $y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.
c) $y(0) = z(0)$, $y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.

4. Estúdiese la existencia y unicidad para el problema

$$\begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

y hállense explícitamente las soluciones cuando $y_0 = 1$ y cuando $y_0 = -1$, indicando a qué espacio $C^n(\mathbb{R})$ pertenecen.

5. Estúdiese si para cada x_0, y_0 la solución de

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2 + y^2 + 2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

se puede definir en toda la recta real.

6. Considérese

$$\begin{cases} y' = y^4 + r \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde r es una constante positiva. Hállese un entorno de cero (intentando que sea lo mayor posible) en el que se pueda asegurar existencia y unicidad. Pruébese que si la solución existe en $[0, r^{-3/4}]$ entonces $y(r^{-3/4}) \geq r^{1/4}$ y utilícese este hecho junto con

$y' \geq y^4$ para encontrar otro entorno en el que se pueda asegurar que no existe solución regular.

7. Sea y la solución de

$$\begin{cases} y' = y + \operatorname{sen}(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

y sea z la solución de esta ecuación aproximando $\operatorname{sen}(xy)$ por xy.

a) Hállese una cota superior para $\operatorname{máx} |z(x) - y(x)|$ cuando $x \in [0, 0'1]$.

b) Usando el apartado anterior, cálculese una aproximación para $y(0'1)$.

c) ¿Qué cota superior se podría dar para $\operatorname{máx} |z(x) - y(x)|$ si $x \in [-0'1, 0]$?

8. Sean los problemas

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+x^2} + e^{-y^2} \\ y(0) = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = \dfrac{z}{1+x^2} \\ y(0) = 10 \end{cases}$$

Demuéstrese que $0 \leq y(x) - z(x) \leq e^{-100}(e^x - 1)$ para $x \in [0, 1]$.

9. Hállense una fórmula para y_n cuando se aplica el método de Euler a

$$\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

escogiendo $x_n = nh$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$ Si se toma $h = 0'001$, ¿qué error se obtiene al aproximar $y(1)$?

10. Interprétese la ecuación de movimiento correspondiente al enunciado del problema 6 de la Hoja 1 como la aplicación del método de Euler a cierto problema.

11. En Mecánica, para θ_0 moderadamente pequeño se suele aproximar la solución de la ecuación del péndulo

$$\begin{cases} y'' = -\operatorname{sen} y \\ y(0) = \theta_0, \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

por $\theta_0 \cos x$, que en realidad resuelve $y'' = -y$. Acótese el error en esta aproximación cuando $\theta_0 = 0'2$ y $x \in [0, 0'1]$. *Indicación*: Escríbase primero el problema como un sistema de primer orden.

12. Considérese la solución del problema

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = \lambda \end{cases}$$

como función de x y λ, esto es, $y = y(x, \lambda)$. Suponiendo la regularidad que sea precisa, escríbase una ecuación de primer orden cuya solución sea $w = \partial y / \partial \lambda$.