CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 1

1) Construye las tablas de verdad de las siguientes proposiciones. ¿Es alguna de ellas una tautología?
a) $(S \wedge T) \vee \neg(S \vee T)$; *b)* $(S \vee T) \Rightarrow (S \wedge T)$; *c)* $(\neg S \vee T) \Leftrightarrow \neg(S \wedge \neg T)$; *d)* $(S \wedge \neg T) \Rightarrow (T \wedge \neg S)$.

2) Comprueba que la proposición $((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee \neg(\neg R \Rightarrow \neg P))$ es una contradicción.

3) Sean T=algunos hombres son tontos, U= no tengo dos dedos de frente, y W= hay castillos en el aire.
Traduce las siguientes proposiciones a frases en castellano:
a)$(W \wedge \neg T) \Rightarrow \neg U$, *b)*$W \vee (T \wedge \neg U)$, *c)*$W \vee (\neg U \Rightarrow T)$, *d)*$T \Leftrightarrow (W \Rightarrow U)$.

4) ¿Cuál de las siguientes condiciones es *necesaria* para que un número natural n sea divisible por 6?
a) n es divisible por 3; b) n es divisible por 9; c) n es divisible por 12; d) $n = 24$; e)n^2 es divisible por 3;
f) n es par y divisible por 3; g) n es par o divisible por 3.

5) ¿Cuáles de las condiciones del ejercicio 4 son *suficientes* para que n sea divisible por 6?
¿Cuáles son *necesarias y suficientes* para que n sea divisible por 6?

6) Escribe el recíproco y el contrarrecíproco de las siguientes frases:
a) Para que llueva es necesario que haya nubes. b) Para que llueva es suficiente que haya nubes.
c) Una condición necesaria para la paz en el mundo es el desarme mundial. d) Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarían.

7) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? ¿Cuáles falsas? Justifica las respuestas:
a) Si no ocurre que $3^2 = 9$, entonces $4^2 = 16$. b) Si no ocurre que $3^2 = 8$, entonces $4^2 = 16$.
c) Si $3 \cdot 2 = 6$ y $4 + 4 = 8$, entonces $5 \cdot 5 = 20$. d) Si $3 \cdot 2 = 6$ y $4 + 4 = 7$, entonces $5 \cdot 5 = 20$.

8) ¿Cuáles de los siguientes pares de proposiciones son lógicamente equivalentes? ¿Por qué?
a) $A \vee \neg B$ y $\neg A \Rightarrow B$; *b)* $A \wedge (\neg A \wedge B)$ y $\neg[\neg A \wedge (A \vee \neg B)]$; *c)* $A \Leftrightarrow \neg B$ y $A \Rightarrow (\neg B \vee \neg A)$; *d)* $\neg(A \Rightarrow \neg B)$ y $B \Rightarrow A$.

9) Para cada una de las siguientes proposiciones, formula una lógicamente equivalente usando solo $S, T, \neg$ y $\vee$.
(Se pueden usar tantos paréntesis como sean necesarios.)
a)$S \Rightarrow \neg T$, *b)*$S \wedge (T \vee \neg S)$, *c)*$(S \Rightarrow T) \vee (T \Rightarrow S)$, *d)*$[\neg(S \vee T)] \Rightarrow S$.

10) Identificar el antecedente y el consecuente en las siguientes implicaciones:
a) Siempre que llego tarde cojo el autobús. b) Para creermelo es necesario que lo vea. c) Si te vas lejos llegarás tarde. d) Si estudias duro, entonces te irá bien en la UAM. e) Si ganas mas de 10.000.000, entonces no pagas el impuesto sobre la renta. f) Si no hay pinchos de tortilla comeré un bocadillo. g) Iré al cine sólo si la película empieza a las ocho.

11) Escribir las negaciones de las implicaciones del ejercicio 10. Darlas en forma afirmativa.

12) Sean A, B, C tres proposiciones para las que podemos probar que $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow C$ son verdaderas. Demuestra que también es verdadera $A \Rightarrow C$. ¿Podemos deducir algo sobre la verdad o falsedad de A, B o C?

13) Sabiendo que $P \Rightarrow Q$ es verdadero y que también es verdadero $P \vee Q$, ¿se puede concluir que P es verdadero?

14) Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a símbolos y cuantificadores. Las respuestas no deben contener palabras.
a) El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva. b) Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas. c) La suma de dos números irracionales no es necesariamente irracional. d) La raíz cuadrada de un número racional no es necesariamente racional.

15) Traduce cada una de las siguientes fórmulas a frases. Las respuestas no deben contener ningún símbolo, sólo palabras. (Tanto las fórmulas de este ejercicio como las afirmaciones del anterior, son todas verdaderas, pero no se pide su verificación).
a) $\forall x\, ((x \in \mathbb{R} \wedge x > 0) \Rightarrow \exists y\, (y > 0 \wedge y^2 = x))$. *b)* $\exists x\, \forall y\, ((y > x) \Rightarrow (y > 5))$.
c) $\neg \exists x\, (x \in \mathbb{R} \wedge (1 < x^2 < x))$. *d)* $\forall y\, \exists x\, (x \in \mathbb{R} \wedge x^3 = y + 1)$.

16) Formula como frases (sin símbolos) la negación de las proposiciones del ejercicio 15.

17) Explica por qué son verdaderas cada una de las siguientes proposiciones para cada número natural $x \leq 6$.
a)$x > 2 \Rightarrow 2x > 4$. *b)*$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 < 0$. *c)*$x^2 + 1 < 0 \Rightarrow x = 3$. *d)*$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x > 1$.

18) Razona con palabras por qué los siguientes pares de afirmaciones no son equivalentes en los números naturales.
a) $\forall x\, \exists y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ y $\exists x\, \forall y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$. *b)* $\forall x\, \exists y,\, x < y < x + 2$ y $\exists x\, \forall y,\, x < y < x + 2$.

19) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? (El universo asociado a las variables se da entre corchetes.)
a) $\forall x\, (x + 1 \geq x)$, $[\mathbb{R}]$; b) $\exists x\, (2x + 3 = 5x + 1)$, $[\mathbb{N}]$; c) $\exists x\, (x^2 + 1 = 2^x)$, $[\mathbb{R}]$; d) $\exists x\, (x^2 = 2)$, $[\mathbb{R}]$;
e) $\exists x\, (x^2 = 2)$, $[\mathbb{Q}]$; f) $\forall x\, (x^3 + 17x^2 + 6x + 100 \geq 0)$, $[\mathbb{R}]$; g) $\exists x\, (x^3 + x^2 + x + 1 \geq 0)$, $[\mathbb{R}]$;
h) $\forall x \exists y\, (x + y = 0)$, $[\mathbb{R}]$; i) $\exists x\, \forall y\, (x + y = 0)$, $[\mathbb{R}]$;
j) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (xy = xz)$, $[\mathbb{R}]$; k) $\forall x\, \exists y\, (x \geq 0 \Longrightarrow y^2 = x)$, $[\mathbb{R}]$; l) $\forall x\, \exists y\, (x \geq 0 \Longrightarrow y^2 = x)$, $[\mathbb{N}]$;

20) Escribir en forma positiva las negaciones de los enunciados del ejercicio 19.

21) Negar los siguientes enunciados y dar los resultados en forma afirmativa.
a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}\, (x + y = 1)$; b) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}\, (x + y = z^2)$; c) $\forall x > 0, \exists y < 0\, (x + y = 0)$.

22) Sean m y n números naturales. Demuestra que si m y n son impares, entonces $m \cdot n$ es impar. Demuestra que si uno de ellos es par, entonces $m \cdot n$ es par. ¿Son estas dos afirmaciones una la recíproca de la otra? Si no lo son, ¿hay alguna relación entre ellas? ¿Son verdaderas sus recíprocas?

23) a) Sean m y n números naturales. Demuestra que si m y n son potencias de 3, entonces $m + n$ no es nunca una potencia de 3.
b) ¿Hay algo especial en el número 3 que aparece en el apartado a)? ¿Qué otros números podrías usar en su lugar?

24) Demuestra por reducción al absurdo las siguientes afirmaciones:
a) No existe un número natural mayor que todos los demás números naturales.
b) $\log_3 1215$ es irracional.
c) Si en un polígono de 99 lados se trazan 50 diagonales (rectas uniendo vértices no consecutivos) entonces existen dos de ellas que parten del mismo vértice.

25) Se llama *cuadrado perfecto* a un número de la forma a^2 donde a es un número natural. Demuestra que si un número natural no nulo n es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ no puede ser un cuadrado perfecto.

26) Demuestra que si cada número natural par y mayor que 2 es suma de dos primos, entonces cada número natural impar y mayor que 5 es suma de tres primos.

27) Demuestra que todo número entero se puede escribir como una suma de enteros impares con como mucho tres sumandos.

28) Demuestra la verdad o falsedad de cada una de las afirmaciones siguientes:
a) La suma de dos cuadrados perfectos es un cuadrado perfecto.
b) Sea n un entero positivo. La lista $n, n + 1, n + 2, \ldots, 2n + 1, 2n + 2$ contiene un cuadrado perfecto.
c) Existe un entero positivo que es igual a la suma de todos sus divisores menores que él mismo (incluido el divisor 1).
d) La suma de dos cuadrados perfectos no es nunca un primo.
e) La diferencia de dos cuadrados perfectos no es nunca un primo.
f) $\forall x \in \mathbb{R}(1 + x^2 < (1 + x)^2)$.
g) $\exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}(3m + 5n = 12)$
h) Para cualesquiera enteros a, b y c, si a divide a bc, entonces a divide a b o a divide a c.

29) Demostrar por inducción:
a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
d) La suma de los primeros k números naturales impares es k^2.
e) La suma de los primeros k números naturales pares es $k^2 - k$.
f) Dado $a \in \mathbb{R}, a \neq 1$, se tiene $\sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
g) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n + 1)! - 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

30) a) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 2$, entonces $2^n > 1 + 2n$.
b) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 4$, entonces $2^n > n^2 + 1$.
c) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $a_n = 4^n + 6n - 1$ es divisible por 9.
d) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $b_n = 7^n - 4^n$ es divisible por 3.

31) Sea $P(n)$ la siguiente propiedad de un $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$.
a) Demostrar que $P(n)$ verdadera $\Longrightarrow P(n + 1)$ verdadera.
b) ¿Es $P(n)$ verdadera para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$?

32) Vamos a demostrar que, dado un conjunto C de n caballos, todos los caballos de C son del mismo color. Lo haremos por inducción sobre n.
a) Si $n = 1$ sólo hay un caballo, luego todos son del mismo color. (Podíamos incluso haber empezado con $n = 0$, ningún caballo, de modo que también son todos del mismo color, pero no es el caso más interesante.)
b) Supongamoslo cierto para conjuntos de n caballos, y sea $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}$ un conjunto con $n + 1$ caballos. Por la hipótesis de inducción, los n caballos del conjunto $C' = \{c_1, \ldots, c_n\}$ tienen el mismo color, y lo mismo sucede con los n caballos del conjunto $C'' = \{c_2, \ldots, c_{n+1}\}$. Como c_n esta en C' y en C'', todos los caballos de C tienen el mismo color que c_n, y por tanto son todos del mismo color.
Como todos hemos visto caballos de al menos dos colores, ¿dónde está el fallo de esta "demostración"?

33) Demostrar por inducción que todo numero natural mayor que 1 se puede escribir como producto de números primos.

34) Demostrar que la suma de los ángulos interiores, medidos en radianes, de un polígono convexo con k lados es $(k - 2) \cdot \pi$. Puedes suponer que sabes cuanto vale la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

35) Sea $P(X)$ un polinómio de grado n cuyos coeficientes son números reales. Demostrar que existen como máximo n números reales distintos que sean raíces del polinomio, esto es, soluciones de la ecuación $P(X) = 0$.

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 2

1) Sean $S = \{1,2,3,4,5\}, T = \{3,4,5,7,8,9\}, U = \{1,2,3,4,9\}, V = \{2,4,6,8\}$. Calcular:
(a) $S \cap U$ (b) $(S \cap T) \cup U$ (c) $(S \cup U) \cap V$ (d) $(S \cup V) \setminus U$ (e) $(U \cup V \cup T) \setminus S$ (f) $(S \cup V) \setminus (T \cap U)$
(g) $(S \times V) \setminus (T \times U)$ (h) $(V \setminus T) \times (U \setminus S)$

2) Sea S un conjunto cualquiera, y sea $T = \emptyset$. ¿Qué puedes decir de $S \times T$?.

3) Probar las siguientes fórmulas para conjuntos arbitrarios S, T, U y V. (Indicación: Los diagramas de Venn pueden ser muy útiles para aclarar las ideas, pero no sirven para dar una demostración).
(1) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ (2) $(S \setminus (T \cup U) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$ (3) $S \setminus (T \cap U) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$
(4) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$ (5) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$

4) Demostrar que si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

5) Supongamos que $A \subset B \subset C$. Determinar $A \setminus B, A \setminus C$ y $A \cup B$.

6) Dar una descripción explícita del conjunto de partes de $S = \{a, b, 1, 2\}$

7) Calcular el conjunto de partes del conjunto de partes de $T = \{1, 2\}$.

8) Escribir los conjuntos de partes de los siguientes conjuntos:
(1) $\{1, \emptyset, \{a, b\}\}$ (2) $\{\bullet, \triangle, \partial\}$ (3) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

9) Sea $S = \{a, b, c, d\}$. $T = \{1, 2, 3\}$, y $U = \{b, 2\}$. ¿Cúales de las siguientes afirmaciones son verdaderas?:

(1) $\{a\} \in S$	(2) $a \in S$	(3) $\{a, c\} \subset S$
(4) $\emptyset \in S$	(5) $\{a\} \in P(S)$	(6) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset P(S)$
(7) $\{a, c, 2, 3\} \subset S \cup T$	(8) $U \subset S \cup T$	(9) $b \in S \cap U$
(10) $\{b\} \subset S \cap U$	(11) $\{1, 3\} \in T$	(12) $\{1, 3\} \subset T$
(13) $\{1, 3\} \in P(T)$	(14) $\emptyset \in P(S)$	(15) $\{\emptyset\} \in P(S)$
(16) $\emptyset \subset P(S)$	(17) $\{\emptyset\} \subset P(S)$	

10) Demostrar que $S \subset T$ si y sólo si $P(S) \subset P(T)$.

11) Demostrar que $S = T$ si y sólo si $P(S) = P(T)$.

12) Probar o demostrar que son falsas las siguientes afirmaciones:
(1) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ (2) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ (3) $P(A \setminus B) = P(A) \setminus P(B)$

13) Verdadero o falso: Si $S_1, S_2, \ldots$ son conjuntos de enteros y si $\cup_{j=1}^{\infty} S_j = \mathbb{Z}$, entonces uno de los conjuntos S_j debe tener infinitos elementos.

14) Verdadero o falso: Si $S_1, S_2, \ldots$ son conjuntos de números reales, y si $\cup_{j=1}^{\infty} S_j = \mathbb{R}$, entonces uno de los S_j debe tener infinitos elementos.

En los cuatro ejercicios siguientes: A es un conjunto arbitrario de índices y para cada $\alpha \in A$, S_α es un conjunto; T es un conjunto cualquiera.

15) Probar las siguientes igualdades (donde $\complement$ denota el complementario en un universo $\mathcal{U}$):

(1) $\complement(\cap_{\alpha \in A} S_\alpha) = \cup_{\alpha \in A} \complement S_\alpha$ (2) $\complement(\cup_{\alpha \in A} S_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} \complement S_\alpha$
(3) $T \cap (\cup_{\alpha \in A} S_\alpha) = \cup_{\alpha \in A} (T \cap S_\alpha)$ (4) $T \cup (\cap_{\alpha \in A} S_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} (T \cup S_\alpha)$

16) Si $T \subset S_\alpha$, para todo $\alpha \in A$, entonces demostrar que $T \subset \cap_{\alpha \in A} S_\alpha$.

17) Si $T \supset S_\alpha$, para todo $\alpha \in A$, entonces probar que $T \supset \cup_{\alpha \in A} S_\alpha$.

18) Decimos que los conjuntos S_α son disjuntos si $\cap_\alpha S_\alpha = \emptyset$; y que son disjuntos dos a dos si $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ cuando $\alpha \neq \beta$. Explicar la diferencia entre los dos conceptos y dar ejemplos.

19) Describir el conjunto de verdad de cada uno de los siguientes enunciados (el universo asociado a las variables se da entre corchetes).

$a)$ $x^2 - 5x + 6 = 0$, $[\mathbb{R}]$ $b)$ $x^2 - 5x + 6 = 0$, $[\mathbb{Z}]$
$c)$ $x < 3$, $[\mathbb{R}]$ $d)$ $x < 3$, $[\mathbb{N}]$
$e)$ $\exists y (y + 1 < x)$, $[\mathbb{N}]$ $f)$ $x^2 + 2 = 0$, $[\mathbb{R}]$
$g)$ $\exists y (x = y^2)$, $[\mathbb{R}]$ $h)$ $\exists y (x = y^2)$, $[\mathbb{N}]$

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 3

1) ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas?. ¿Cuáles suprayectivas?. ¿Es alguna de ellas biyectiva?. (Empieza por asegurarte de que todas ellas son, efectivamente, funciones.)
(a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(m) = m + 2$ (b) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $g(m) = 2m - 7$ (c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = x - x^3$
(d) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $f(x) = x^2 + 4x$ (e) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $g(n) = n(n+1)$ (f) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = +\sqrt{n^2 + 1}$
(g) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n^2 + n + 1$ (h) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $g(t) = t/(t+1)$

2) Da ejemplos de aplicaciones $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de cada uno de los siguientes tipos:

i) Inyectivas pero no suprayectivas; ii) Suprayectivas pero no inyectivas; iii) Biyectivas y iv) Ni inyectivas ni suprayectivas.

3) Sea A un conjunto *finito*.
a) Demuestra que no existen aplicaciones $A \to A$ que sean inyectivas pero no suprayectivas, ni aplicaciones $A \to A$ que sean suprayectivas pero no inyectivas. Compara con el ejercicio 2.
b) ¿si A tiene n elementos, cuántos elementos tiene el conjunto $\{f : A \to A \mid f$ es una aplicación biyectiva$\}$?

4) Sean $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ las aplicaciones definidas por $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 2$. Estudia la posible suprayectividad o inyectividad de $f,\ g,\ f \circ g,\ g \circ f$.

5) Se considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(\alpha, \beta) = 3\alpha + 2\beta$. Averigua si f es inyectiva y/o suprayectiva.

6) Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Recuerda que si $Z \subset Y$, se define $f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$. Define una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(\{3\}) = \mathbb{R}$. Describe $f^{-1}(\{\pi\})$ para la función f que hayas definido.

7) Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los triángulos. Definimos la aplicación $a : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ como $a(t) =$ *la medida en grados del menor de los ángulos de* t. Encuentra $a^{-1}(\{60\})$ y $a(\{\text{triángulos rectángulos}\})$.

8) a) Demuestra que $f : X \to Y$ es inyectiva $\iff$ existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$.
b) Demuestra que $f : X \to Y$ es biyectiva $\iff$ existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$ y $f \circ g = id_Y$.

9) Dada una aplicación $f : X \to Y$ y subconjuntos $Z, W \subset Y$, demuestra que $(a) f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$; $(b) f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$; $\quad (c) f(f^{-1}(Z)) = f(X) \cap Z$; $\quad (d) X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$

10) Demuestra que la función $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $b(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$ es efectivamente una función y es biyectiva. Describe la función b^{-1}.

11) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x \leq -1 \\ 3x & \text{si } x > -1 \end{cases}$ y sea $A = [-2, 1] \subset \mathbb{R}$.
a) Dibuja el gráfico de f y calcula $f(A)$.
b) Demuestra que f no es ni inyectiva ni suprayectiva, pero que si la restringimos a $f : A \to f(A)$ la función restringida *es* una biyección. Encuentra la función inversa de esta biyección.

12) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$
a) Dibuja el gráfico de g.
b) Demuestrar que g no es ni inyectiva ni suprayectiva, pero que basta con cambiar la definición de $g(x)$ para un único valor de x para obtener una función biyectiva. (La manera de hacer esto no es única.)
c) Describe explícitamente la función inversa de la que has obtenido en el apartado b).

13) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciónes definidas por: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$
a) Dibuja los gráficos de las funciones $f,\ g,\ g \circ f$ y $f \circ g$.
b) Encuentra las imágenes de cada una de las cuatro funciones anteriores y decide si son inyectivas y/o suprayectivas.

14) Sea E un conjunto no vacío. Para cada subconjunto $A \subset E$ definimos una función $\chi_A : E \to \{0, 1\}$, llamada *función característica de A (en E)*, como: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$
Demuestra: a) $\chi_A = \chi_B \iff A = B$; b) $\chi_E(x) = 1$, $\forall x \in E$ y $\chi(x) = 0$, $\forall x \in E$; c) $\chi_{E \setminus A}(x) = 1 - \chi_A(x)$, $\forall x \in E$;
d) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ $\forall x \in E$; e) $\chi_{A \cup B}(x) + \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$ $\forall x \in E$.

15) Sean A_1, A_2 dos conjuntos. Definimos funciones $\pi_1 : A_1 \times A_2 \to A_1$ y $\pi_2 : A_1 \times A_2 \to A_2$, llamadas respectivamente *primera y segunda proyección*, como $\pi_1(x_1, x_2) = x_1, \pi_2(x_1, x_2) = x_2$.
Sea X un conjunto cualquiera y sean $f_1 : X \to A_1, f_2 : X \to A_2$. Demuestra que existe una única función $f : X \to A_1 \times A_2$ tal que $\pi_1 \circ f = f_1$ y $\pi_2 \circ f = f_2$.

16) Con la misma notación del ejercicio anterior, demuestra que:
a) Si $B \subset A_1$, entonces $\pi_1(\pi_1^{-1}(B)) = B$.
b) Si $B \subset A_1 \times A_2$, entonces $B \subset \pi_1^{-1}(\pi_1(B))$. ¿Es cierto en general el contenido recíproco?

17) De nuevo con la misma notación, supón que A_1 y A_2 son no vacíos. Define funciones inyectivas $\alpha_1 : A_1 \to A_1 \times A_2$ y $\alpha_2 : A_2 \to A_1 \times A_2$ tales que $\pi_1 \circ \alpha_1 = id_{A_1}$ y $\pi_2 \circ \alpha_2 = id_{A_2}$.

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 4

1) Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado, $B \subset A$ un subconjunto. Para cada una de las afirmaciones siguientes demostrar que es cierta o dar un contraejemplo: i) Si A tiene un máximo, entonces A tiene un único elemento maximal; ii) Si A tiene un único elemento maximal, entonces A tiene un máximo; iii) Si B tiene un ínfimo en A, entonces B tiene un único elemento minimal y iv) Si B tiene un único elemento minimal, entonces B tiene un ínfimo en A.

2) Dada la relación de orden en $\mathbb{N}$, $n\mathcal{R}m \iff n$ *divide a* m, hallar los elementos maximales, minimales, máximos y mínimos (si existen) del conjunto $A = \{2, 3, 5, 6, 15, 10, 30\}$. ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden total en A?.

3) Sea X un conjunto no vacío, $(\mathbb{N}, \leq)$ el conjunto ordenado de los números naturales y $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación. Se define en X la siguente relación: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Demostrar que:
a) La relación $\mathcal{R}$ no es en general una relación de orden.
b) La relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden si y sólo si f es una aplicación inyectiva.

4) Diremos que una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A (que supondremos $\neq \emptyset$) es una *relación de orden estricto* si satisface las dos propiedades siguientes:
i) No existen $x, y \in A$ tales que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ (se podría llamar a esta propiedad “antisimétrica estricta”).
ii) Si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, entonces $x\mathcal{R}z$ (propiedad transitiva).
a) Demostrar que una relación de orden no es una relación de orden estricto, y que una relación de orden estricto no es una relación de orden.
b) A pesar de la anterior, demostrar que dar una relación de orden estricto en un conjunto A es equivalente a dar una relación de orden en A. (Sugerencia: ¿qué hay que añadir a una relación de orden estricto para convertirla en una relación de orden?)

5) Sea $X = \{A \in P(\mathbb{Z}) : A \text{ es finito}\}$. Dado A finito, $Card(A)$, el *cardinal* de A, es el número de elementos de A.
a) Definimos en X la relación $A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow Card(A) \leq Card(B)$. Demostrar que $\mathcal{R}$ NO es una relación de orden.
b) Definimos ahora en X la relación $A\mathcal{R}'B \Longleftrightarrow Card(A) < Card(B)$. Demostrar que $\mathcal{R}'$ es una relación de orden estricto.
c) Describe la relación de orden definida por $\mathcal{R}'$ de acuerdo con el procedimiento del apartado b) del problema 4.

6) En el conjunto de funciones $C = \{f \mid f : [0,1] \to [0,1]\}$ definimos la relación $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \sup(f) \leq \sup(g)$. Estudiar si es una relación de orden de algún tipo (parcial, total).

7) Dados $\alpha = (a, b, c)$ y $\alpha' = (a', b', c')$ en $\mathbb{N}^3$, se define: $\alpha \leq \alpha' \Longleftrightarrow (a < a') \vee (a = a' \wedge b < b') \vee (a = a' \wedge b = b' \wedge c \leq c')$. Discutir qué tipo de relación de orden es. Esta relación de orden se llama *orden lexicográfico*, por el modo en que ordenamos las palabras en el diccionario. Explicar por qué merece este nombre.

8) a) Generalizar la relación del ejercicio anterior para, dado k, ordenar k-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de enteros positivos.
b) Generalizar el apartado anterior definiendo un *orden lexicográfico* en $A^k := \{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in A\}$, donde $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado cualquiera.

9) Sea $C = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 4\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dar una descripción explícita del conjunto C y ordenar sus elementos con el orden lexicográfico en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hallar sus elementos maximales y minimales. ¿Son máximo y mínimo? ¿Puede ser el conjunto C el grafo de alguna función de un subconjunto de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$?.

10) En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el orden lexicográfico consideramos los subconjuntos siguientes: $A := [0,1] \times [0,1]$, $B := (0,1) \times (0,1)$, $C := [0,1] \times (0,1)$, $D := (0,1) \times [0,1]$. Para cada uno de ellos encontar sus máximos y mínimos, elementos maximales y minimales, cotas, supremos e ínfimos (si existen).

11) Considérese el conjunto, S, de todas las sucesiones infinitas $\{a_1, a_2, \ldots\}$ de números reales. Se dice que dos de esas sucesiones, $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots\}$ y $\alpha' = \{a'_1, a'_2, \ldots\}$, satisfacen $\alpha \leq \alpha'$ si los términos de α llegan a ser en algún momento menores o iguales que los de α'. Es decir, si existe $K > 0$ tal que $a_j \leq a'_j$ para todo $j \geq K$. Decidir qué tipo de relación es, y en particular si es o no de orden.

12) Diremos que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ está *bien ordenado* si cualquier subconjunto no vacío $X \subset A$ tiene un mínimo.
a) Estudiar si los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ con sus ordenes naturales y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico están bien ordenados.
b) ¿Es cierto que si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces cualquier subconjunto no vacío $X \subset A$ tiene un máximo?

13) Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una relación $\mathcal{R}$: $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longleftrightarrow (a + b < c + d) \vee (a + b = c + d \wedge a \leq c)$.
a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es un buen orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
b) Halla los conjuntos de cotas superiores e inferiores, el supremo y el ínfimo, el m áximo y el m ínimo (todo en caso de que existan) para este orden del conjunto $A := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a^2 + b^2 \leq 16\}$.

14) Sea $A = \{a, b, c\}$. Define una relación de orden <u>total</u> $\mathcal{R}$ en $P(A)$ tal que $\forall X, Y \in P(A), X \subset Y \Longrightarrow X\mathcal{R}Y$.

15) Vamos a generalizar el ejercicio anterior. Sea $\mathcal{S}$ una relación de orden en un conjunto A. Demuestra que existe una relación de orden <u>total</u> $\mathcal{R}$ que extiende $\mathcal{S}$, lo que quiere decir que $a\mathcal{S}b \Longrightarrow a\mathcal{R}b$, o equivalentemente, que viendo $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$ como subconjuntos de $A \times A$ tenemos $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Para ello vemos el conjunto de las relaciones de orden, al que llamaremos $\mathcal{O}$, como un subconjunto de $P(A \times A)$, y lo ordenamos mediante $\subset$.
a) Demuestra que toda relación de orden total es un elemento maximal de $\mathcal{O}$.
b) Recíprocamente, demuestra que todo elemento maximal de $\mathcal{O}$ es un orden total. (SUGERENCIA: intenta extender un orden como en el ejercicio 15. Ten de nuevo cuidado con la propiedad transitiva.)
c) Demuestra que cualquier orden $\mathcal{S}$ en A se puede extender a un orden total. (SUGERENCIA: Aplica el Lema de Zorn al subconjunto de $\mathcal{O}$ formado por los órdenes que extienden $\mathcal{S}$.)

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 5

1) Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en un conjunto X. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{R}$ satisface las dos propiedades siguientes:
i) Para todo $x \in X$ existe un $a \in X$ tal que $a\mathcal{R}x$.

ii) $a\mathcal{R}b$ y $a\mathcal{R}c \Longrightarrow b\mathcal{R}c$.

2) Considerar la relación sobre $\mathbb{Z}$ definida por: $(m,n) \in \mathcal{R} \iff m+n$ es par. Demostrar que es una relación de equivalencia. Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

3) Considerar la relación sobre $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida por: $(m,n)\mathcal{R}(m',n') \iff m \cdot n' = m' \cdot n$. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente?.

4) Consideramos ahora la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por: $(m,n)\mathcal{R}(m',n') \iff m \cdot n' = m' \cdot n$. ¿Es esta relación una relación de equivalencia?

5) Considerar la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $(m,n)\mathcal{R}(m',n') \iff m+n' = m'+n$. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes decribir las clases de equivalencia? ¿Puedes elegir un representante para cada clase de equivalencia que te ayude a mostrar lo que hace la relación de equivalencia? ¿Puedes describir el conjunto cociente?

6) Definimos en $\mathbb{Q}$ la siguiente relación: $x\mathcal{R}y \iff$ existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = h$. Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases del 0 y de $1/2$, el conjunto cociente y decidir si $2/3$ y $1/3$ pertenecen a la misma clase.

7) Definimos en $\mathbb{Q}$ la siguiente relación: $x\mathcal{R}y \iff$ existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \frac{3y+h}{3}$. Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir el conjunto cociente y decidir si $2/3$ y $4/5$ pertenecen a la misma clase.

8) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff y = y'$. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes elegir un representante para cada clase de equivalencia que te ayude a mostrar lo que hace la relación de equivalencia? ¿Puedes describir el conjunto cociente?

9) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por $(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ si $y - y'$ es un entero y $x - x'$ es un entero. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes elegir un representante para cada clase de equivalencia que te ayude a describir el conjunto cociente?.

10) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff d((x,y),(x',y')) < 1$, donde d indica la distancia usual entre dos puntos del plano. Estudiar si es una relación de equivalencia y en caso afirmativo describir las clases de equivalencia.

11) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff xy = x'y'$ Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

12) Considerar la relación definida, sobre la colección de todos los círculos en el plano $\mathbb{R}^2$, por $C_1\mathcal{R}C_2 \iff$ el círculo C_1 y el círculo C_2 tienen el mismo centro. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes elegir un representante para cada clase de equivalencia que te ayude a describir el conjunto cociente?.

13) Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En F se define la siguiente relación: $f\mathcal{R}g \iff$existe $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $|x| < r$. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre F.

14) Sea A un conjunto y B un subconjunto de A. En $P(A)$ se considera la siguiente relación: Dados $X, Y \in P(A)$, $X\mathcal{R}Y \iff X \cap B = Y \cap B$. Estudia si es una relación de equivalencia, en caso afirmativo describe el conjunto cociente.

15) Sea S el conjunto de todos los seres humanos. Sean $x, y \in S$. Decimos que x está relacionado con y si x e y son hermanos (o sea, tienen la misma madre y el mismo padre). Probar que es una relación de equivalencia. ¿Qué son las clases de equivalencia?.

16) Sea S el conjunto de todos los seres humanos. Sean $x, y \in S$. Decimos que x está relacionado con y si x e y tienen al menos un progenitor en común. ¿Es una relación de equivalencia?. Justificar la respuesta.

17) Designamos por $[(m,n)]$ la clase de un elemento $(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ en la relación de equivalencia del ejercicio 3. Llamamos X al conjunto cociente de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ por esta relación. Definimos una operación $*$ en X mediante la fórmula:

$$[(m,n)] * [(m',n')] = [(m \cdot n' + m' \cdot n, n \cdot n')].$$

Demostrar que esta operación está bien definida, esto es, la definición <u>no</u> depende de los representantes de las clases. ¿Puedes identificar esta operación en términos de cosas que conocieses previamente?

18) El conjunto cociente de $\mathbb{Z}$ por la relación de equivalencia del ejercicio 2 se suele denotar $\mathbb{Z}/2$ (se lee "$\mathbb{Z}$ módulo 2"). Sea $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$ la aplicación canónica de paso al cociente que a cada $n \in \mathbb{Z}$ le hace corresponder su clase. Sean $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dos aplicaciones definidas respectivamente por $f(n) = 3n$ y $g(n) = (-1)^n + 3$. Dar un ejemplo, o demostrar la no existencia, de las aplicaciones siguientes:

$$\begin{array}{lllrcl}
a) & F_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 & \text{tal que} & \pi \circ f & = & F_1. \\
b) & F_2 : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z} & \text{tal que} & F_2 \circ \pi & = & f. \\
c) & F_3 : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 & \text{tal que} & \pi \circ f & = & F_3 \circ \pi. \\
d) & G_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 & \text{tal que} & \pi \circ g & = & G_1. \\
e) & G_2 : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z} & \text{tal que} & G_2 \circ \pi & = & g. \\
f) & G_3 : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 & \text{tal que} & \pi \circ g & = & G_3 \circ \pi.
\end{array}$$

19) Sean X, Y dos conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación.
Definimos en X la relación $\mathcal{R}_f$ mediante: $x_1\mathcal{R}_f x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$.
a) Comprobar que $\mathcal{R}_f$ es una relación de equivalencia.

b) ¿Quién es $\mathcal{R}_f$ si f es inyectiva?
c) Llamemos X/f al conjunto cociente de X por $\mathcal{R}_f$. Dar explícitamente una biyección entre X/f y la imagen de f, $Im(f)$.
d) Sea $\pi : X \to X/f$ la aplicación canónica de paso al cociente que a cada $x \in X$ le hace corresponder su clase. Demostrar que existe una única aplicacion $\overline{f} : X/f \to Y$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. Demostrar además que $\overline{f}$ es inyectiva.

20) Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$ y A equipotente a C. Demostrar que los tres conjuntos son equipotentes.

21) Sean A y B dos conjuntos equipotentes (o sea, con el mismo cardinal). Sean A' y B' dos conjuntos también equipotentes. Demostrar los siguiente:
a) $A \times A'$ es equipotente a $B \times B'$.
b) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B$ es equipotente a $A \times \{0, 1\}$
c) Si $A \cap A' = \emptyset$ y $B \cap B' = \emptyset$ entonces $A \cup A'$ y $B \cup B'$ son equipotentes.

22) Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.

23) Sea A un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1, \ldots, a_n \in A$ son elementos de A, el conjunto $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ es equipotente a A. (Sugerencia: quitarles a A y a $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ subconjuntos numerables apropiados.)

24) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Demostrar que los cuatro conjuntos

$$A_{a,b} := (a, b), \qquad B_{a,b} := [a, b), \qquad C_{a,b} := (a, b], \qquad D_{a,b} := [a, b]$$

son equipotentes. Demostrar que $A_{a,b}$ es equipotente a $A_{0,1}$ para cualesquiera valores de a, b, y concluir que todos los conjuntos de las formas $A_{a,b}, B_{a,b}, C_{a,b}, D_{a,b}$ para cualesquiera valores de a, b son equipotentes.

25) ¿Cuál es el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:
a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, c) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, d) $P(\mathbb{Q})$, e) $\mathbb{C}$, f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$,
g) El conjunto de todas las raíces (racionales o no) de todos los polinomios cuadráticos con coeficientes racionales.
h) El conjunto de todas las raíces (reales o no) de todos los polinomios cuadráticos con coeficientes reales.
i) El conjunto de todas las raíces (racionales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama "conjunto de los números algebraícos").
j) El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen dos elementos.
k) El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen al menos 3 y no más de 8 elementos, esto es, $\{A \in P(\mathbb{N}) \mid 3 \leq Card(A) \leq 8\}$.
l) $\{A \in P(\mathbb{N}) \mid Card(A) \geq 6\}$.

26) Definimos la siguiente relación en $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Puede ser numerable el conjunto cociente?

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 6

1) Encontrar las parejas $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.

2) Hallar el máximo común divisor de 1547 y 3059.

3) Sean a y b números enteros con $a > b \geq 0$. Sea $N(a, b)$ el número de divisiones que hay que hacer para calcular el $m.c.d.(a, b)$. (Por ejemplo $N(a, 0) = 0$ y $N(30, 21) = 3$).
a) Comprobar que $N(3059, 1547) = 4$.
b) Hallar $N(1025, 423)$.
c) La sucesión de Fibonacci es : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ ($a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$). Hallar $N(a_9, a_8)$, $N(a_8, a_7)$ y $N(a_7, a_6)$.

4) Sea $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ la sucesión de Fibonacci. Demuestra lo siguiente:
a) $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} = a_{2k+1} - 1$ para todo $k \geq 0$.
b) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1} = a_{2k}$ para todo $k \geq 1$.
c) $m.c.d.(a_{k+1}, a_k) = 1$ para todo $k \geq 1$.
d) $a_{k+1}^2 - a_k a_{k+2} = (-1)^k$ para todo $k \geq 0$.

5) Con la notación de ejercicio 3. Demostrar lo siguiente:
a) Si $N(a, b) = k$ entonces $a \geq a_{k+2}$ y $b \geq a_{k+1}$ para todo $k \geq 1$.
b) Si $b < a_{k+1}$ entonces $N(a, b) < k$ para todo $k \geq 1$.
c) $N(a_{k+1}, a_k) = k - 1$ para todo $k \geq 2$ (esto último indica que la cota superior de $N(a, b)$ obtenida en b) es la mejor posible).

6) Dados m enteros consecutivos: $n, n+1, n+2, \ldots, n+(m-1)$, con $m > 1$. Demostrar que uno y solamente uno es divisible por m.

7) En una parada de autobús llegan tres líneas de autobuses: A,B y C. El autobús de la línea A tarda en hacer el recorrido completo 40 minutos; el de la línea B, una hora; y el de la línea C, 25 minutos. A las siete de la mañana han coincidido en la parada los tres autobuses. ¿A qué hora volverán a coincidir?.

8) Sea $p \in \mathbb{Z}$ ($p \neq 0, 1, -1$). Suponer que p verifica la siguiente condición: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$.
Demostrar que p es primo.

9) Sean a, b, d naturales no nulos tales que $a = a_1 d$ y $b = b_1 d$ con $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$. Demostrar que si $m.c.d.(a_1, b_1) = 1$ entonces $d = m.c.d.(a, b)$.

10) Sean a, b, m números naturales con a y b coprimos. Demostrar que si $a|m$ y $b|m$ entonces $ab|m$. Encuentra un contraejemplo que muestre que si a y b no son coprimos el resultado no es cierto en general.

11) Sea q un número entero $q \geq 1$. Calcular (q, q^2), $(q, q+1)$ y $(q, q+2)$.

12) Calcular el $m.c.d.(28n + 5, 35n + 2)$ para todo $n \geq 1$.

13) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

14) Demostrar que si $p \in \mathbb{N}$ es primo entonces p divide la número combinatorio $\binom{p}{i}$ para cada ($1 \leq i \leq p-1$). ¿Es esto cierto si p no es primo?

15) Demostrar que si $2^n + 1$ es primo n ha de ser una potencia de 2.

16) Probar que $(F_n, F_m) = 1$, donde $F_n = 2^{2^n} + 1$ y $n \neq m$. Deducir que existen infinitos primos.

17) Pedro y Sixto se encuentran en la calle tras muchos años sin verse. ¿Cuantos hijos tienes?, le pregunta Pedro a Sixto. Tengo tres hijas, el producto de sus edades es 36 y la suma el número de tu portal. Me falta algún dato para adivinar las edades, replica Pedro. Es cierto, responde Sixto; te diré entonces que la mayor toca muy bien el piano. ¿Qué edades tenían las hijas de Sixto?.
Intenta inventarte otro problema parecido.

18) Sea $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ la descomposición de n en factores primos. Demostrar que n tiene $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_s+1)$ divisores distintos.

19) Hallar los inversos de $-1, 2, 5$ y 6 en $\mathbb{Z}/7$.

20) Hallar los inversos de 13 y de -15 en $\mathbb{Z}/23$ y $\mathbb{Z}/31$.

21) ¿Para qué números racionales x es $3x^2 + 7x$ un número entero?

22) Demostrar que todo número entero se puede expresar como combinación lineal de 1001 y 30.

23) Hallar el conjunto de soluciones de las siguientes ecuaciones diofánticas:
a) $111x + 36y = 15$ *b)* $10x + 26y = 1224$ *c)* $6x + 10y = 20$ *d)* $115x + 45y = 3$.

24) Hallar las unidades y cada uno de sus inversos de $\mathbb{Z}/13$ y $\mathbb{Z}/12$.

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 7

1) Demostrar que existen infinitos enteros no representables como suma de tres cuadrados.
(Estudiar los cuadrados módulo 8).

2) Demostrar que si $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ entonces n es primo.

3) Escribir una sola congruencia que sea equivalente al par de congruencias $x \equiv 1 \pmod{4}$ y $x \equiv 2 \pmod{3}$.

4) Demostrar que si p es primo ($p \neq 3$) entonces $(p-2)2^{p-2} + 1$ no es primo.

5) Demostrar que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es divisible por 7.

6) Probar que $n^7 - n$ es divisible entre 42, para cualquier entero n.

7) Probar que $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ es un entero para todo n.

8) Oliana Molls trabaja cuatro días consecutivos y descansa uno. Betty trabaja dos y descansa uno. Sólo se ven los días de luna llena (uno de cada veintiocho días). Betty tuvo fiesta ayer, Oliana la tendrá pasado mañana y hace diez días había luna llena. ¿Cuántos días faltan par que se vean? ¿Cuántos días libres comunes habrán perdido mientras tanto por falta de luna llena?

9) Sea (a, b, c) una terna pitagórica, esto es, una solución en $\mathbb{Z}^3$ de la ecuación $X^2 + Y^2 = Z^2$. Demostrar lo siguiente:
i) al menos uno de los valores a, b o c es múltiplo de 3;
ii) abc es múltiplo de 4;
iii) al menos uno de los valores a, b o c es múltiplo de 5;
iv) $abc \equiv 0$ (60).

10) Demostrar los apartados a), b) y c) para concluir el teorema de Wilson: Si p es primo, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

a) Demostrar que si p es primo, $(a, p) = 1$, existe una sola solución de la congruencia $ax \equiv 1 \pmod{p}$.

b) Demostrar que si $a \neq 1$, $a \neq p-1$ el x correspondiente en el apartado anterior es distinto de a.

c) Utilizando los problemas a) y b), demostrar que $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (p-4)\ (p-3)\ (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$.

11) Demostrar que si $(a, n) = 1$ y $(b, n) = 1$ la ecuación $ax + by = c$ tiene exactamente n soluciones en $\mathbb{Z}/n$

12) Sea $\mathbb{Z}/10$ el anillo de los enteros módulo 10. Hallar el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas en $\mathbb{Z}/10$.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ 2x+9y=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x+4y=6 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+3y=1 \\ 3x-y=3 \end{array}\right\}$$

13) Calcular:
a) $234^{432} \pmod{11}$;
b) $145^{197} \pmod{13}$;
c) $2025^{2025} \pmod{14}$;
d) $4002^{4002} \pmod{35}$.

14) Hallar las raíces del polinomio siguiente en $\mathbb{F}_5$.

$$X^{14}+X^{11}+X^{10}-3X^5$$

15) Demostrar que $(n^5-1)n(n^5+1)$ es divisible por 22.

16) Resolver si es posible los siguientes sistemas de congruencias:

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv 13 \pmod{91} \\ x \equiv -1 \pmod{119} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x \equiv -5 \pmod{77} \\ x \equiv 17 \pmod{143} \end{array}\right\}$$

17) ¿Cuántas unidades hay en $\mathbb{Z}/2310$? ¿y en $\mathbb{Z}/1764$?

18) Demostrar que los polinomios $(X+1)^p$ y X^p+1 son iguales en $\mathbb{F}_p$ para todo primo p.

19) Sea p un número primo y $a \in \mathbb{Z}$ con $(a,p)=1$. Demostrar que
i) $a^{p^2}-a^p$ es divisible por p.
ii) $(a+p)^p \equiv a^p \pmod{p^2}$ y $(a+p)^{p-1} \not\equiv a^{p-1} \pmod{p^2}$.

20) Hallar $\phi(n)$ para $5 \le n \le 24$.

21) Demostrar que

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},\, n>0.$$

(En el sumatorio d recorre todos los divisores positivos de n.)

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 8

1) Hallar el cociente $C(X)$ y el resto $R(X)$ que se obtienen al dividir el polinomio $P(X)=X^5-X^3+3X-5$ entre el polinomio $Q(X)=X^2+7$, primero en $\mathbb{Q}[X]$ y luego en $\mathbb{F}_5[X]$.

2) Encontrar todos los cuerpos $\mathbb{F}_p$ en los que $X^2-\bar{2}$ divide a $X^5-\overline{10}X+\overline{12}$.

3) Calcular el máximo común divisor $d(x)$ de los polinomios $p(X)=X^5-5X^3+4X$ y $q(X)=X^3-2X^2-5X+6$. Encontrar dos polinomios $a(X)$ y $b(X)$ tales que $a(X)\cdot p(X)+b(X)\cdot q(X)=d(X)$.

4) Sean $p,\, q \in \mathbb{Q}[X]$. Demostrar que si p y q son primos entre sí entonces también lo son $p+q$ y $p \cdot q$.

5) Determinar un polinomio $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que X^2+1 divida a $p(X)$ y X^3+1 divida a $p(X)-1$.

6) Sean P_1, P_2 y P_3 tres polinomios primos entre sí dos a dos, es decir, tales que $m.c.d.(P_j,P_k)=1$ si $j \ne k$. Calcular $m.c.d.\ (P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3)$ y $m.c.m.\ (P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3)$.

7) Encontrar polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X)(X^2+2X-2)+B(X)(X^2+X-1)=1$.

8) Encontrar polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X)(X^2+4X+1)+B(X)(X^2+3X+1)=1$.

9) Determinar un polinomio $p(X)$ que cumpla las tres siguientes condiciones:
$gr(p(X)) \le 4, \quad p(X+1)-p(X)=X \quad$ y $\quad p(0)=1$.

10) Demostrar que los polinomios X^p+Y^p y $(X+Y)^p$ son iguales en el anillo de polinomios $\mathbb{F}_p[X,Y]$.

11) Calcular todos los ceros racionales de $20X^3-56X^2-33X+9$ y de $12X^5-17x^4+7X^3-5X^2-22X-5$.

12) Determinar un polinomio $p(X)$ de grado tres tal que $p(0)=p(1)=p(2)=1$

13) Sea $p(X)=X^4+7X^3+9X^2-27X-54$. Calcular en $\mathbb{Q}[X]$ el máximo común divisor de $p(X)$ y su derivada $p\prime(X)$ y encontrar todos los ceros de $p(X)$ con sus multiplicidades respectivas.

14)¿Existe algún $a \in \mathbb{R}$ para el que el polinomio $p(X)=X^5-\frac{10a^2}{3}X^3+5a^4X-8a^3$ tenga un cero de multiplicidad exactamente tres?

15) Demostrar que $2+\sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ son cada uno de ellos cero de un polinomio de $\mathbb{Z}[X]$. Determinar esos polinomios.

16) a) Comprobar que sólo existen cuatro aplicaciones distintas de $\mathbb{F}_2$ en $\mathbb{F}_2$. Escribir las tablas de adición y multiplicación del anillo **A** que forman y expresarlas como funciones polinomiales con coeficientes en $\mathbb{F}_2$.

b) Si se considera la aplicación $\varphi : \mathbb{F}_2[X] \longrightarrow \mathbf{A}$ que manda cada polinomio $P(X)$ a la función polinomial $P^\star : \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ dada por $a \mapsto P(a)$ demostrar que la relación de equivalencia que declara equivalentes a los polinomios que dan lugar a la misma función polinomial, es justamente la siguiente: $P \sim Q \Longleftrightarrow P - Q$ es múltiplo de $X^2 - X$.
c) Demostrar que, pasando al cociente, φ da lugar a un isomorfismo de anillos (es decir, una biyección que conserva las operaciones): $\mathbb{F}_2[X]/\sim \longleftrightarrow \mathbf{A}$

17) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo finito formado por n elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Demostrar que dos polinomios $P(X)$ y $Q(X)$ del anillo $\mathbb{K}[X]$ coinciden como funciones sobre $\mathbb{K}$ (o, hablando con más propiedad, dan lugar a funciones polinom iales $P^\star = Q^\star : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$), si y sólo si el polinomio $T(X) = (X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_n)$ divide a $P(X) - Q(X)$.

18) El polinomio $X^4 + \bar{4}$ puede descomponerse en factores lineales en $\mathbb{F}_5[X]$. Encontrar dicha factorización.

19) Fórmula de interpolación de Lagrange. Sean a_1, a_2 y a_3 son tres elementos distintos de un cuerpo $\mathbb{K}$. Definimos los polinomios

$$P_j(X) = \prod_{k \neq j} (X - a_k) \;\; j = 1, 2, 3.$$

Dados tres valores $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}$, demostrar que el polinomio de interpolación de Lagrange

$$P(X) = \sum_{j=1}^{3} y_j \, (P_j(a_j))^{-1} \, P_j(X),$$

es el único polinomio de $\mathbb{K}[X]$ de grado menor que 3, que cumple $P(a_j) = y_j$ para cada $j = 1, 2, 3$.

20) a) Demostrar que para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, existen infinitos polinomios irreducibles en $\mathbb{K}[X]$. (Sugerencia: Puede ser útil recordar la demostración de Euclides de que en $\mathbb{Z}$ hay infinitos primos.)
b) Comprobar que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo con un número finito de elementos (por ejemplo $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, para p primo) y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe algún polinomio irreducible en $\mathbb{K}[X]$, de grado mayor que n.
c) Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existen infinitos polinomios de grado n que son irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

21) Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $P(X) = \sum_{j=0}^{s} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$, definimos $\bar{P}(X) = \sum_{j=0}^{s} \bar{a}_j X^j \in \mathbb{Z}/n[X]$, donde $\bar{a}_j = a_j + n\mathbb{Z}$, la clase de restos módulo n de a_j. Probar que si $\bar{P}(X)$ es irreducible en $\mathbb{Z}/n[X]$ y tiene el mismo grado que $P(X)$, entonces $P(X)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

22) a) Sea $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ y supongamos que existe un número primo p tal que $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$ y $p|a_j$ para $j = 0, 1, \cdots, t$. Probar que entonces $P(X)$ tiene un factor irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, de grado $\geq t+1$. (Sugerencia: reducir módulo p.)
b) Como aplicación del criterio anterior, demostrar que el polinomio $p + p^3 X + pX^2 + X^3 + X^4$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ para cualquier primo p.

23) Sea $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Demostrar que $P(X)$ tiene un factor irreducible de grado 4 en $\mathbb{Q}[X]$. Descomponer $P(X)$ en polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

24) ¿Es reducible en $\mathbb{Q}[X]$ el polinomio $p(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 3$? Justificar la respuesta.

25) Descomponer el polinomio $p(X) = X^4 + 3X^2 + 4$ en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{F}_p[X]$ para $p = 2, 3, 5$ y 7.

26) Determinar los polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{F}_2[X]$ de grados $1, 2, 3$ y 4.

27) Sea $P(X) = X^5 + 4X^4 + 4X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Probar que $P(X)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

28) Sean $a, b \in \mathbb{Q}$. Probar que los polinomios $X^5 - X + 4$ y $X^3 + aX + b$ no tienen raíces comunes.

29) Obtener la descomposición en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$ del polinomio $P(X) = X^3 - X^2 - 2X + 2$. Hacer lo mismo en $\mathbb{K}[X]$ para los cuerpos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{F}_p$ para $p = 2, 3, 5$ y 7

30) Probar que el polinomio $1 + X + \cdots + X^{p-1}$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ para cualquier primo p.

31) Estudiar la reducibilidad sobre $\mathbb{Q}$ de los polinomios

$$1 + X + X^4 \qquad \text{y} \qquad 1 - X + X^4$$

32) Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y consideremos el polinomio

$$P(X) = 1 + (n+1)X + 2(m+1)X^2 + nX^3 + X^4 \in \mathbb{Z}[X].$$

Probar que $P(X)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 8

1) Hallar el cociente $C(X)$ y el resto $R(X)$ que se obtienen al dividir el polinomio $P(X) = X^5 - X^3 + 3X - 5$ entre el polinomio $Q(X) = X^2 + 7$, primero en $\mathbb{Q}[X]$ y luego en $\mathbb{F}_5[X]$.

2) Encontrar todos los cuerpos $\mathbb{F}_p$ en los que $X^2 - \bar{2}$ divide a $X^5 - \overline{10}X + \overline{12}$.

3) Calcular el máximo común divisor $d(x)$ de los polinomios $p(X) = X^5 - 5X^3 + 4X$ y $q(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$. Encontrar dos polinomios $a(X)$ y $b(X)$ tales que $a(X) \cdot p(X) + b(X) \cdot q(X) = d(X)$.

4) Sean p, $q \in \mathbb{Q}[X]$. Demostrar que si p y q son primos entre sí entonces también lo son $p + q$ y $p \cdot q$.

5) Determinar un polinomio $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que $X^2 + 1$ divida a $p(X)$ y $X^3 + 1$ divida a $p(X) - 1$.

6) Sean P_1, P_2 y P_3 tres polinomios primos entre sí dos a dos, es decir, tales que $m.c.d.(P_j, P_k) = 1$ si $j \neq k$. Calcular $m.c.d.$ (P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3) y $m.c.m.$ (P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3).

7) Encontrar polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X)(X^2 + 2X - 2) + B(X)(X^2 + X - 1) = 1$.

8) Encontrar polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X)(X^2 + 4X + 1) + B(X)(X^2 + 3X + 1) = 1$.

9) Determinar un polinomio $p(X)$ que cumpla las tres siguientes condiciones:
$gr(p(X)) \leq 4, \quad p(X+1) - p(X) = X \quad$ y $\quad p(0) = 1.$

10) Demostrar que los polinomios $X^p + Y^p$ y $(X+Y)^p$ son iguales en el anillo de polinomios $\mathbb{F}_p[X, Y]$.

11) Calcular todos los ceros racionales de $20X^3 - 56X^2 - 33X + 9$ y de $12X^5 - 17x^4 + 7X^3 - 5X^2 - 22X - 5$.

12) Determinar un polinomio $p(X)$ de grado tres tal que $p(0) = p(1) = p(2) = 1$

13) Sea $p(X) = X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 27X - 54$. Calcular en $\mathbb{Q}[X]$ el máximo común divisor de $p(X)$ y su derivada $p\prime(X)$ y encontrar todos los ceros de $p(X)$ con sus multiplicidades respectivas.

14)¿Existe algún $a \in \mathbb{R}$ para el que el polinomio $p(X) = X^5 - \frac{10a^2}{3}X^3 + 5a^4X - 8a^3$ tenga un cero de multiplicidad exactamente tres?

15) Demostrar que $2 + \sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ son cada uno de ellos cero de un polinomio de $\mathbb{Z}[X]$. Determinar esos polinomios.

16) a) Comprobar que sólo existen cuatro aplicaciones distintas de $\mathbb{F}_2$ en $\mathbb{F}_2$. Escribir las tablas de adición y multiplicación del anillo **A** que forman y expresarlas como funciones polinomiales con coeficientes en $\mathbb{F}_2$.
b) Si se considera la aplicación $\varphi : \mathbb{F}_2[X] \longrightarrow \mathbf{A}$ que manda cada polinomio $P(X)$ a la función polinomial $P^\star : \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ dada por $a \mapsto P(a)$ demostrar que la relación de equivalencia que declara equivalentes a los polinomios que dan lugar a la misma función polinomial, es justamente la siguiente: $P \sim Q \Longleftrightarrow P - Q$ es múltiplo de $X^2 - X$.
c) Demostrar que, pasando al cociente, φ da lugar a un isomorfismo de anillos (es decir, una biyección que conserva las operaciones): $\mathbb{F}_2[X]/\sim \longleftrightarrow \mathbf{A}$

17) El polinomio $X^4 + \bar{4}$ puede descomponerse en factores lineales en $\mathbb{F}_5[X]$. Encontrar dicha factorización.

18) ¿Es reducible en $\mathbb{Q}[X]$ el polinomio $p(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 3$? Justificar la respuesta.

19) Descomponer el polinomio $p(X) = X^4 + 3X^2 + 4$ en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{F}_p[X]$ para $p = 2, 3, 5$ y 7.

20) Sea $P(X) = X^5 + 4X^4 + 4X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Probar que $P(X)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

21) Probar que el polinomio $1 + X + \cdots + X^{p-1}$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ para cualquier primo p.

22) Estudiar la reducibilidad sobre $\mathbb{Q}$ de los polinomios

$$1 + X + X^4 \qquad \text{y} \qquad 1 - X + X^4$$

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 9

1) Calcular:

$$a)\ \left((2-3i)^3 - i\right)^2 \quad b)\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \quad c)\ \left((2+i)(2-i)\right)^2$$

2) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + bi$:

$$a)\ \frac{1-i}{1+i} \quad b)\ \frac{(3-i)(2+i)}{3+i} \quad c)\ \frac{(2-i)^2}{(3-i)^2}$$

3) Encontrar las partes reales e imaginarias de: *a)* z^2 *b)* $\frac{1}{z^2}$ *c)* $\frac{z+1}{z-1}$

4) Verificar que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

5) Calcular el módulo de los números complejos

$$a)\ i(2+3i)(5-2i)(-2-i)^{-1} \qquad b)\ \frac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}.$$

6) Hallar un polinomio con coeficientes reales que tenga a $z = 1 + \sqrt{-2}$ entre sus raíces.

7) Encontrar dos números complejos tales que su cuadrado sea $8 - 6i$.

8) Calcular el módulo y el argumento y expresar los siguientes números complejos
en forma trigonométrica y polar:

$$a)\ 1+i \quad b)\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad c)\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \quad d)\ -2-2i.$$

9) Calcular $e^{\pi i}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$, $e^{\frac{\pi}{4}i}$, $e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

10) Sea w una raíz n-ésima de la unidad (es decir: $w^n = 1$) distinta de 1. Comprobar que

$$a) \quad 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0 \text{ y } b) \quad 1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1} = \frac{n}{w-1}.$$

11) Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Probar que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$, y que sólo hay igualdad si $|x| = |y|$.
Ayuda: Si $a, b \in \mathbb{R}$; entonces $2ab \leq a^2 + b^2$, con igualdad sólo si $a = b$.

12) Describir el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

$$a) \quad Im(z+5) = 0 \text{ y } b) \quad Re(z^2+5) = 0,$$

donde Re y Im denotan, respectivamente, las partes real e imaginaria de los números complejos a los que afectan.

13) Calcular los diferentes valores de: $\sqrt{1-i}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[4]{16i}$ y $\sqrt{-9}$.

14) Calcular todas las raíces sextas de la unidad.

15) Hallar los ceros complejos de $p(X) = 3X^3 + 5X^2 + 5X + 2$.

16) Demostrar que el polinomio $P(X) = X^4 + 2X^2 - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.
Encontrar su descomposión en factores irreducibles en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{F}_p[X]$ para $p = 2, 3$ y 5.

17) Estudiar la reducibilidad sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{F}_p$, con $p = 2, 3$ y 5 de los polinomios siguientes

$$X^4 + 4, \quad X^4 + 36, \quad X^4 - 6, \quad X^4 - 4$$