

1. Hállese, si es que existe, el valor de a para el cual el siguiente límite es nulo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + \operatorname{sen}(ax))^3 - \tan^3 x}{x^3(2 - \cos^4 x)}.$$

2. Estúdiese la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left[\frac{1}{x} \right] \operatorname{sen} \frac{2\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Nota: Como es habitual, $[\cdot]$ representa la parte entera y el argumento del seno se supone en radianes. Recuérdese que $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$.

3. Calcúlese la derivada de la siguiente función en todo punto en que exista:

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + |x|}.$$

4. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ una función continua. Demostrar que existe algún número en $[-1, 1]$ tal que su imagen por f coincide con el cubo de dicho número.