

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

CÁLCULO I
Curso 2002-03

CIENCIAS MATEMÁTICAS
21 DE ENERO DE 2003

Apellidos

Nombre DNI

1. a) (1 punto). Calcula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 8n}{n^3 + 1} \right)^{(4n^2 - 1)}.$$

b) (1 punto). Calcula el siguiente límite expresándolo como límite de sumas de Riemann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

2. a) (1 punto). Estudia la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx.$$

b) (1 punto). Usa el apartado **a)** para estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{(n+3)^2}.$$

3. a) (1 punto). Demuestra que la función f dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{y } f(0) = 0$$

es derivable en todo \mathbb{R}^+ y encuentra $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. ¿Es f' continua en \mathbb{R} ?

b) (1 punto). Utiliza el Teorema de Rolle para demostrar que la función

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

nunca tiene dos ceros en $[0, 1]$.

4. a) (1 punto). Encuentra el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = 4x^{1/4}$ en $a = 1$.

b) (1 punto). Usa la fórmula de Taylor de orden 1 de $f(x) = 4x^{1/4}$ en $a = 1$ para demostrar que $4x^{1/4} \leq x + 3$ si $0 \leq x \leq 1$.

5.

a) (1 punto) Calcula $\int_0^2 |2x - 3| dx$.

b) (1 punto) Calcula $\int \frac{x^4 + x - 1}{x^3 + x} dx$.

DURACIÓN : 3 HORAS