1. Sea $f(x) = 9/(x+4)$. Calcular $f'(2)$ utilizando la definición de derivada.

2. Calcular A y B para que la siguiente función sea derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ Ax + B & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Mostrar un ejemplo de función continua tal que $f'(x)$ exista para todo $x \neq -1$, pero no para $x = -1$.

4. Hallar el área del triángulo determinado por el eje X y las rectas tangente y normal a $f(x) = 9 - x^2$ en el punto $(2, 5)$.

5. Estudiar si existe algún valor de x para el que la tangente a $f(x) = x/(x+1)$ sea paralela a la secante que conecta los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.

6. Hallar la derivada n-ésima de

$$f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x+1}$$

demostrando el resultado por inducción.

7. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demostrar que $g'(x)$ y $g''(x)$ existen para todo x, pero que $g'''(0)$ no existe. Representar las gráficas de g, g' y g''.

8. Hallar la derivada de

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x^2 \ \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}.$$

9. Suponiendo que las derivadas n-ésimas $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ existen, demostrar por inducción la regla del producto de Leibniz:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x).$$

10. Si f es una función diferenciable par, ¿cuánto vale $f'(0)$?

11. Si f es una función impar dos veces diferenciable, ¿cuánto vale $f''(0)$?

12. Sea f una función diferenciable. Demostrar que si f es par entonces f' es impar, y que si f es impar entonces f' es par. Si f' es par, ¿se sigue necesariamente que f es impar?

13. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Calcular $f^{(2002)}$.

14. Sea $f(x) = x^2 - 2$ y sea x_0 un número mayor que $\sqrt{2}$. Calcular una fórmula para la intersección $(x_1, 0)$ de la tangente a $f(x)$ en x_0 con el eje X y probar que $\sqrt{2} < x_1 < x_0$. Comprobar con una calculadora que iteraciones sucesivas de esta fórmula llevan rápidamente a una aproximación de $\sqrt{2}$ mediante fracciones y explicar esta aproximación geométricamente.

***15.** Demostrar que no existen funciones derivables f y g con $f(0) = g(0) = 0$ tales que $x = f(x)g(x)$. ¿Y si no se pide que sean derivables?

****16.** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n+1}\operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demostrar que existen $f'(0)$, $f''(0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(0)$ pero no $f^{(n+1)}(0)$.