Análisis Matemático II. Segundo de Físicas
Septiembre 1992

AVISO: ÉSTE NO ES EL ENUNCIADO ORIGINAL. SE HA CAMBIADO FORMULANDO LAS PREGUNTAS DIRECTAMENTE EN VEZ DE DAR DIFERENTES OPCIONES "TIPO TEST"

---

1. Una población de bacterias tiene y_0 individuos en el instante inicial $t = 0$ y su incremento por unidad de tiempo es proporcional al número de individuos. Sbiendo que el número de bacterias se multiplica por seis en 10 horas, ¿cuántas horas tarda la población en duplicarse?

---

2. Hallar la solución $y(x)$ del problema de valor inicial $y'' = (y')^5 y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

---

3. Hallar la solución general de la ecuación de Riccati $y' + y^2 - 3y + 2 = 0$.

---

4. Se sabe que tres soluciones de la ecuación $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ son

$$y_1 = x^4 + 3x^2 + 1, \qquad y_2 = x^2 - 5, \qquad y_3 = x^3 - 2.$$

Hallar la solución general.

---

5. Hallar la solución del problema $y'' = \delta(t-1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

---

6. El sistema autónomo $x' = F(x, y)$, $y' = G(x, y)$ se escribe en coordenadas polares

$$r' = r(3 - r^2), \qquad \theta' = 3 - r^2 \operatorname{sen} 2\theta.$$

Estudiar si la circunferencia $r = \sqrt{3}$ es trayectoria o unión de trayectorias.

---

7. Explicar por qué el punto $(0, 0)$ del sistema $x' = y^3 + x^5$, $y' = -x^3 + y^5$ es estable.

---

8. Sea $y(x)$ la solución periódica estacionaria de la ecuación $y'' + 2y = |\operatorname{sen} x|$. (El periodo de $y(x)$ es igual al de $|\operatorname{sen} x|$). Hallar el desarrollo de Fourier de $y(x)$ en $\mathbb{R}$.

---

9. Indicar la forma de la solución (qué tipo de serie es) del problema

$$\begin{array}{cc} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \cos^4 x, & 0 < x < \pi \end{array}$$

---

10. Sea $u(x, t)$ la solución del problema

$$\begin{array}{cc} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ u(x, 0) = 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty \end{array}$$

Hallar $u(2, 1)$.
