

ANÁLISIS MATEMÁTICO II. Curso Primero. Ing. Informática. UAM.
Dpto. de Matemáticas. HOJA 3

1. Calcular los siguientes límites, si es que existen:

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2} \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4 + y^4}$$

2. Estudiar si pueden hacerse continuas las siguientes funciones definiéndolas de manera adecuada en el punto $(0, 0)$:

$$\text{a) } \frac{\text{sen}(x + y)}{x + y} \quad \text{b) } \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

3. Se considera la curva $\vec{c}(t) = (\text{sen } t)i + (\cos t)j + 2t^{3/2}k$

- Calcular el vector velocidad de la curva.
- Calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en $t = 0$.

4. Sea y definida implícitamente por $x^2 + y^3 + e^y = 0$. Calcular dy/dx en términos de x e y .

5. Calcular el plano tangente a $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $(1, 0, 2)$.

6. Probar que las gráficas de las funciones $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ son tangentes en el punto $(0, 0)$.

7. Calcular la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$ en el punto $(4, -2, -1)$ en la dirección $\vec{v} = (i + 3j + 2k)/\sqrt{14}$.

8. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad en el punto $(0, 0)$ de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

9. Dada la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

probar que existen $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$. Probar que la función no es continua en $(0, 0)$ y por tanto tampoco es diferenciable en dicho punto.

10. Calcular la longitud de arco de la curva $x(t) = (\cos t)/t$, $y(t) = (\text{sen } t)/t$, $z(t) = t/2$, entre $t = \pi$ y $t = 2\pi$.

11. Se define la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta:

- (a) f tiene derivadas parciales continuas en todo \mathbb{R}^2 .
- (b) f es continua en todo \mathbb{R}^2 pero no es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 .
- (c) f no es continua en todo \mathbb{R}^2 .
- (d) f es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 y sus derivadas parciales no son continuas en todo \mathbb{R}^2 .

12. Calcular el valor de a para que el plano tangente a la superficie $x^2 + y^2/a^2 - z^2 = 1$ en el punto $(1, a, 1)$ sea paralelo al plano $x + 2y - z = 0$.

13. Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = x \cos y^2 + z^2$ en la dirección del vector $v = \frac{2}{\sqrt{5}}i + \frac{1}{\sqrt{5}}j$ en el punto $(1, 0, \sqrt{\pi})$.