-Por favor, escríbase un problema en cada cara de las hojas de respuestas. **El primero en la primera cara, el segundo en la segunda cara, etc.**

-El último problema es voluntario. **Tiene un nivel de dificultad mayor que el resto y sólo debiera ser intentado por aquellos que quieran optar a la matrícula de honor.**

-Las respuestas deben ser justificadas correctamente.

-No se admite el uso de máquinas calculadoras **o similares.**

-Se puntuará sobre diez, contribuyendo cada apartado de la forma siguiente:

1) 0'5 cada uno, 2) 1+0'75, 3) 0'75+1, 4) 1+1, 5) 2.

EJERCICIOS

1) (Véase la hoja de respuestas).

2) Recuérdese que $\mathbb{P}_n[x] = \{\text{Polinomios de } \mathbb{R}[x] \text{ de grado } \leq n\} \cup \{0\}$.

i) Demostrar que si el conjunto $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de $\mathbb{P}_2[x]$ entonces $B'' = \{1, xP_1, xP_2, xP_3\}$ lo es de $\mathbb{P}_3[x]$.

ii) Decir razonadamente si $B = \{1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3\}$ es una base de $\mathbb{P}_3[x]$.

3) Consideramos la función $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - 3 + 3^{125}.$$

i) Es f inyectiva? ii) Se cumple que $\operatorname{Im} f \subset 5\mathbb{Z}$?

4) i) Sea A el conjunto de primos mayores que 5, $A = \{7, 11, 13, \ldots\}$. Demostrar que $(n_1, n_2)\mathcal{R}_1(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 n_2 = m_1 m_2$ es una relación de equivalencia en $A \times A$ y hallar las clases.

ii) Estudiar si $\overline{x}\mathcal{R}_2\overline{y} \Leftrightarrow \overline{x}^2 = \overline{y}^2$ es un relación de equivalencia en $\mathbb{Z}_7^*$ y en caso afirmativo hallar las clases.

5) Sean $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Calcular el orden y el signo de σ, τ^{101} y $\tau\sigma$.

OPCIONAL:

6) En una empresa todos los jefes cobran lo mismo mientras que el primer empleado cobra la mitad que un jefe, el segundo la tercera parte, el tercero la cuarta parte, etc. Uno de los jefes dice que hay cierta equidad en el reparto, porque entre todos los jefes cobran lo mismo que entre todos los empleados. Demostrar que miente.

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... Grupo...... D.N.I. (o pasaporte)........................

Calificación: $\underset{1}{\sqcup} + \underset{2}{\sqcup} + \underset{3}{\sqcup} + \underset{4}{\sqcup} + \underset{5}{\sqcup} =$ ☐

1) Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Para toda permutación $\sigma \in S_{121}$ se cumple que σ^{121} es par.

ii) Si $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ cumplen $\operatorname{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1$ entonces $\operatorname{mcd}(n_1, n_2) = 1$ y $\operatorname{mcd}(n_2, n_3) = 1$.

iii) El grupo $G = \{\gamma, \beta, \alpha, \delta\}$ cuya tabla de multiplicación se indica, es cíclico.

$\cdot$	γ	β	α	δ
γ	γ	β	α	δ
β	β	γ	δ	α
α	α	δ	β	γ
δ	δ	α	γ	β

iv) El nmero $77726^6 - 1$ es primo.

v) Si $A, B \subset \mathbb{R}$ entonces $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

-Por favor, escríbase un problema en cada cara de las hojas de respuestas. **El primero en la primera cara, el segundo en la segunda cara, etc.**

-El último problema es voluntario. **Tiene un nivel de dificultad mayor que el resto y sólo debiera ser intentado por aquellos que quieran optar a la matrícula de honor.**

-Las respuestas deben ser justificadas correctamente.

-No se admite el uso de máquinas calculadoras **o similares.**

-Se puntuará sobre diez, contribuyendo cada apartado de la forma siguiente:

1) 0'5 cada uno, 2) 1+1, 3) 2, 4) 0'75+1, 5) 1+0'75.

EJERCICIOS

1) (Véase la hoja de respuestas).

2) i) Sea A el conjunto de primos mayores que 7, $A = \{11, 13, 17, \ldots\}$. Demostrar que $(n_1, n_2)\mathcal{R}_1(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 n_2 = m_1 m_2$ es una relación de equivalencia en $A \times A$ y hallar las clases.

ii) Estudiar si $\overline{x}\mathcal{R}_2\overline{y} \Leftrightarrow \overline{x} + \overline{x} = \overline{y} + \overline{y}$ es un relación de equivalencia en $\mathbb{Z}_6$ y en caso afirmativo hallar las clases.

3) Sean $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ y $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular el orden y el signo de σ, τ^{101} y $\tau\sigma$.

4) Consideramos la función $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 3 + 3^{125}.$$

i) Es f inyectiva? ii) Se cumple que $\operatorname{Im} f \subset 5\mathbb{Z}$?

5) Recuérdese que $\mathbb{P}_n[x] = \{\text{Polinomios de } \mathbb{R}[x] \text{ de grado} \leq n\} \cup \{0\}$.

i) Demostrar que si el conjunto $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de $\mathbb{P}_2[x]$ entonces $B'' = \{1, xP_1, xP_2, xP_3\}$ lo es de $\mathbb{P}_3[x]$.

ii) Decir razonadamente si $B = \{1 + 2x, 1 - 2x, x^2 + 2x^3, x^2 - 2x^3\}$ es una base de $\mathbb{P}_3[x]$.

OPCIONAL:

6) En una empresa todos los jefes cobran lo mismo mientras que el primer empleado cobra la mitad que un jefe, el segundo la tercera parte, el tercero la cuarta parte, etc. Uno de los jefes dice que hay cierta equidad en el reparto, porque entre todos los jefes cobran lo mismo que entre todos los empleados. Demostrar que miente.

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... Grupo...... D.N.I. (o pasaporte).........................

Calificación: $\underset{1}{\sqcup}$ + $\underset{2}{\sqcup}$ + $\underset{3}{\sqcup}$ + $\underset{4}{\sqcup}$ + $\underset{5}{\sqcup}$ = ☐

1) Decir <u>razonadamente</u> si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Si $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ cumplen $\operatorname{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1$ entonces $\operatorname{mcd}(n_1, n_2) = 1$ y $\operatorname{mcd}(n_1, n_3) = 1$.

ii) Para toda permutación $\sigma \in S_{49}$ se cumple que σ^{49} es par.

iii) El nmero $77796^6 - 1$ es primo.

iv) El grupo $G = \{\beta, \gamma, \alpha, \delta\}$ cuya tabla de multiplicación se indica, es cíclico.

$\cdot$	β	γ	α	δ
β	β	γ	α	δ
γ	γ	β	δ	α
α	α	δ	γ	β
δ	δ	α	β	γ

v) Si $A, B \subset \mathbb{Q}$ entonces $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

-Por favor, escríbase un problema en cada cara de las hojas de respuestas. **El primero en la primera cara, el segundo en la segunda cara, etc.**

-El último problema es voluntario. **Tiene un nivel de dificultad mayor que el resto y sólo debiera ser intentado por aquellos que quieran optar a la matrícula de honor.**

-Las respuestas deben ser justificadas correctamente.

-No se admite el uso de máquinas calculadoras **o similares.**

-Se puntuará sobre diez, contribuyendo cada apartado de la forma siguiente:
1) 0'5 cada uno, 2) 2, 3) 1+1, 4) 1+0'75, 5) 0'75+1.

EJERCICIOS

1) (Véase la hoja de respuestas).

2) Sean $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ y $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular el orden y el signo de σ, τ^{101} y $\tau\sigma$.

3) i) Sea A el conjunto de primos negativos menores que -5, $A = \{-7, -11, -13, \ldots\}$. Demostrar que $(n_1, n_2)\mathcal{R}_1(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 n_2 = m_1 m_2$ es una relación de equivalencia en $A \times A$ y hallar las clases.

ii) Estudiar si $\overline{x}\mathcal{R}_2\overline{y} \Leftrightarrow \overline{x}^2 = \overline{y}^2$ es un relación de equivalencia en $\mathbb{Z}_7^*$ y en caso afirmativo hallar las clases.

4) Recuérdese que $\mathbb{P}_n[x] = \{\text{Polinomios de } \mathbb{R}[x] \text{ de grado} \leq n\} \cup \{0\}$.

i) Demostrar que si el conjunto $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de $\mathbb{P}_2[x]$ entonces $B'' = \{1, xP_1, xP_2, xP_3\}$ lo es de $\mathbb{P}_3[x]$.

ii) Decir razonadamente si $B = \{2+x, 2-x, 2x^2+x^3, 2x^2-x^3\}$ es una base de $\mathbb{P}_3[x]$.

5) Consideramos la función $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 7 + 7^{125}.$$

i) Es f inyectiva? ii) Se cumple que $\operatorname{Im} f \subset 5\mathbb{Z}$?

OPCIONAL:

6) En una empresa todos los jefes cobran lo mismo mientras que el primer empleado cobra la mitad que un jefe, el segundo la tercera parte, el tercero la cuarta parte, etc. Uno de los jefes dice que hay cierta equidad en el reparto, porque entre todos los jefes cobran lo mismo que entre todos los empleados. Demostrar que miente.

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... Grupo...... D.N.I. (o pasaporte)........................

Calificación: ___ + ___ + ___ + ___ + ___ = ☐
(1, 2, 3, 4, 5)

1) Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Si $A, B \subset \mathbb{Z}$ entonces $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

ii) El grupo $G = \{\beta, \delta, \alpha, \gamma\}$ cuya tabla de multiplicación se indica, es cíclico.

$\cdot$	β	δ	α	γ
β	β	δ	α	γ
δ	δ	β	γ	α
α	α	γ	δ	β
γ	γ	α	β	δ

iii) Si $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ cumplen $\operatorname{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1$ entonces $\operatorname{mcd}(n_1, n_3) = 1$ y $\operatorname{mcd}(n_2, n_3) = 1$.

iv) Para toda permutación $\sigma \in S_{81}$ se cumple que σ^{81} es par.

v) El nmero $141426^6 - 1$ es primo.

-Por favor, escríbase un problema en cada cara de las hojas de respuestas. **El primero en la primera cara, el segundo en la segunda cara, etc.**

-El último problema es voluntario. **Tiene un nivel de dificultad mayor que el resto y sólo debiera ser intentado por aquellos que quieran optar a la matrícula de honor.**

-Las respuestas deben ser justificadas correctamente.

-No se admite el uso de máquinas calculadoras **o similares.**

-Se puntuará sobre diez, contribuyendo cada apartado de la forma siguiente:

1) 0'5 cada uno, 2) 1+1, 3) 1+0'75, 4) 0'75+1, 5) 2.

EJERCICIOS

1) (Véase la hoja de respuestas).

2) i) Estudiar si $\overline{x}\mathcal{R}_2\overline{y} \Leftrightarrow \overline{x}+\overline{x}=\overline{y}+\overline{y}$ es un relación de equivalencia en $\mathbb{Z}_6$ y en caso afirmativo hallar las clases.

ii) Sea A el conjunto de primos negativos menores que -7, $A=\{-11,-13,-17\ldots\}$. Demostrar que $(n_1,n_2)\mathcal{R}_1(m_1,m_2) \Leftrightarrow n_1n_2=m_1m_2$ es una relación de equivalencia en $A\times A$ y hallar las clases.

3) Recuérdese que $\mathbb{P}_n[x]=\{\text{Polinomios de } \mathbb{R}[x] \text{ de grado} \le n\}\cup\{0\}$.

i) Demostrar que si el conjunto $B'=\{P_1,P_2,P_3\}$ es una base de $\mathbb{P}_2[x]$ entonces $B''=\{1,xP_1,xP_2,xP_3\}$ lo es de $\mathbb{P}_3[x]$.

ii) Decir razonadamente si $B=\{3+x,3-x,3x^2+x^3,3x^2-x^3\}$ es una base de $\mathbb{P}_3[x]$.

4) Consideramos la función $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ definida por

$$f(n)=-n(1-n)(2-n)(3-n)(4-n)-7+7^{125}.$$

i) Es f inyectiva? ii) Se cumple que $\operatorname{Im} f\subset 5\mathbb{Z}$?

5) Sean $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&5&4&3&2&6&1\end{pmatrix}$ y $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&7&6&2&4&5\end{pmatrix}$. Calcular el orden y el signo de σ, τ^{101} y $\tau\sigma$.

OPCIONAL:

6) En una empresa todos los jefes cobran lo mismo mientras que el primer empleado cobra la mitad que un jefe, el segundo la tercera parte, el tercero la cuarta parte, etc. Uno de los jefes dice que hay cierta equidad en el reparto, porque entre todos los jefes cobran lo mismo que entre todos los empleados. Demostrar que miente.

Inicial del primer apellido

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... Grupo...... D.N.I. (o pasaporte)........................

Calificación: ___ + ___ + ___ + ___ + ___ =
1 2 3 4 5

1) Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Si $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ cumplen $\operatorname{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1$ entonces $\operatorname{mcd}(n_1, n_2) = 1$ y $\operatorname{mcd}(n_2, n_3) = 1$.

ii) El grupo $G = \{\alpha, \delta, \beta, \gamma\}$ cuya tabla de multiplicación se indica, es cíclico.

$\cdot$	α	δ	β	γ
α	α	δ	β	γ
δ	δ	α	γ	β
β	β	γ	δ	α
γ	γ	β	α	δ

iii) El nmero $491426^6 - 1$ es primo.

iv) Si $A, B \subset \mathbb{N}$ entonces $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

v) Para toda permutación $\sigma \in S_{25}$ se cumple que σ^{25} es par.