Para realizar el examen téngase en cuenta las siguientes instrucciones:

-Por favor, escríbase un problema en cada cara de las hojas de respuestas**. El primero en la primera cara, el segundo en la segunda cara, etc.**

-El examen se puntuará sobre diez, contribuyendo cada uno de los cinco primeros problemas con dos puntos. El último problema es voluntario**. Tiene un nivel de dificultad mayor que el resto y sólo debiera ser intentado por aquellos que quieran optar a la matrícula de honor.**

-Las respuestas deben ser justificadas correctamente.

-No se admite el uso de máquinas calculadoras **o similares.**

EJERCICIOS

1) Si $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + 2y + z = 0\}$. Hallar una base de $V \cap W$ y $\dim(V + W)$.

2) En una clase de 100 alumnos el número de chicos es divisible por 13 y el de chicas es divisible por 8. Si cada chica escoge a un chico distinto como novio, ¿cuántos chicos se van a quedar sin novia?

3) Considérense las funciones $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} - \{3/2\}$ y $g : \mathbb{Q} - \{3/2\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dadas por

$$f(n) = \frac{3n}{2n-1}, \qquad g(x) = \frac{x}{2x-3} + 702^{14} + 3^7.$$

Describir de manera sencilla el conjunto $(g \circ f)^{-1}(7\mathbb{Z})$ donde $7\mathbb{Z}$ indica los múltiplos de 7.

4) Sean

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular $(\sigma\,\tau)^{16}$.

5) Comprobar que el grupo $\mathbb{Z}_9^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$ es cíclico (con la multiplicación). Demostrar que

$$\begin{array}{rcl} \phi : (\mathbb{Z}_6, +) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_9^*, \times) \\ \overline{x} & \longrightarrow & \overline{(4^x)} \end{array}$$

es un homomorfismo pero no un isomorfismo, y sin embargo $(\mathbb{Z}_6, +) \cong (\mathbb{Z}_9^*, \times)$.

OPCIONAL:

6) Hallar todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales las raíces del polinomio de segundo grado $P_n = 4x^2 - 4x - 2! - 3! - 4! - \ldots - (n-1)! - n!$ sean racionales.

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Calificación: ___ + ___ + ___ + ___ + ___ = ☐
1 2 3 4 5

Por favor, un problema en cada cara.

Para realizar el examen ténganse en cuenta las siguientes instrucciones:

-Por favor, escríbase un problema en cada cara de las hojas de respuestas**. El primero en la primera cara, el segundo en la segunda cara, etc.**

-El examen se puntuará sobre diez, contribuyendo cada uno de los cinco primeros problemas con dos puntos. El último problema es voluntario**. Tiene un nivel de dificultad mayor que el resto y sólo debiera ser intentado por aquellos que quieran optar a la matrícula de honor.**

-Las respuestas deben ser justificadas correctamente.

-No se admite el uso de máquinas calculadoras **o similares.**

EJERCICIOS

1) Sean

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular $(\sigma\,\tau)^{16}$.

2) Considérense las funciones $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} - \{3/2\}$ y $g : \mathbb{Q} - \{3/2\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dadas por

$$f(n) = \frac{3n}{2n-1}, \qquad g(x) = \frac{x}{2x-3} + 702^{14} + 3^7.$$

Describir de manera sencilla el conjunto $(g \circ f)^{-1}(7\mathbb{Z})$ donde $7\mathbb{Z}$ indica los múltiplos de 7.

3) En una clase de 100 alumnos el número de chicos es divisible por 13 y el de chicas es divisible por 8. Si cada chica escoge a un chico distinto como novio, ¿cuántos chicos se van a quedar sin novia?

4) Comprobar que el grupo $\mathbb{Z}_9^* = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\right\}$ es cíclico (con la multiplicación). Demostrar que

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{Z}_6, +) &\longrightarrow (\mathbb{Z}_9^*, \times) \\ \overline{x} &\longrightarrow \overline{(4^x)} \end{aligned}$$

es un homomorfismo pero no un isomorfismo, y sin embargo $(\mathbb{Z}_6, +) \cong (\mathbb{Z}_9^*, \times)$.

5) Si $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + 2y + z = 0\}$. Hallar una base de $V \cap W$ y $\dim(V + W)$.

OPCIONAL:

6) Hallar todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales las raíces del polinomio de segundo grado $P_n = 4x^2 - 4x - 2! - 3! - 4! - \ldots - (n-1)! - n!$ sean racionales.

Inicial del primer apellido $\boxed{}$

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Calificación: $\underbrace{}_{1} + \underbrace{}_{2} + \underbrace{}_{3} + \underbrace{}_{4} + \underbrace{}_{5} = \boxed{}$

Por favor, un problema en cada cara.

Para realizar el examen ténganse en cuenta las siguientes instrucciones:

-Por favor, escríbase un problema en cada cara de las hojas de respuestas**. El primero en la primera cara, el segundo en la segunda cara, etc.**

-El examen se puntuará sobre diez, contribuyendo cada uno de los cinco primeros problemas con dos puntos. El último problema es voluntario**. Tiene un nivel de dificultad mayor que el resto y sólo debiera ser intentado por aquellos que quieran optar a la matrícula de honor.**

-Las respuestas deben ser justificadas correctamente**.**

-No se admite el uso de máquinas calculadoras **o similares.**

EJERCICIOS

1) Considérense las funciones $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} - \{3/2\}$ y $g : \mathbb{Q} - \{3/2\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dadas por

$$f(n) = \frac{3n}{2n-1}, \qquad g(x) = \frac{x}{2x-3} + 702^{14} + 3^7.$$

Describir de manera sencilla el conjunto $(g \circ f)^{-1}(7\mathbb{Z})$ donde $7\mathbb{Z}$ indica los múltiplos de 7.

2) Sean

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular $(\sigma\,\tau)^{16}$.

3) Comprobar que el grupo $\mathbb{Z}_9^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$ es cíclico (con la multiplicación). Demostrar que

$$\begin{array}{rcl} \phi : (\mathbb{Z}_6, +) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_9^*, \times) \\ \overline{x} & \longrightarrow & \overline{(4^x)} \end{array}$$

es un homomorfismo pero no un isomorfismo, y sin embargo $(\mathbb{Z}_6, +) \cong (\mathbb{Z}_9^*, \times)$.

4) Si $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + 2y + z = 0\}$. Hallar una base de $V \cap W$ y $\dim(V + W)$.

5) En una clase de 100 alumnos el número de chicos es divisible por 13 y el de chicas es divisible por 8. Si cada chica escoge a un chico distinto como novio, ¿cuántos chicos se van a quedar sin novia?

OPCIONAL:

6) Hallar todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales las raíces del polinomio de segundo grado $P_n = 4x^2 - 4x - 2! - 3! - 4! - \ldots - (n-1)! - n!$ sean racionales.

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Calificación: $\underset{1}{\sqcup} + \underset{2}{\sqcup} + \underset{3}{\sqcup} + \underset{4}{\sqcup} + \underset{5}{\sqcup} = \square$

Por favor, un problema en cada cara.

Para realizar el examen ténganse en cuenta las siguientes instrucciones:

-Por favor, escríbase un problema en cada cara de las hojas de respuestas**. El primero en la primera cara, el segundo en la segunda cara, etc.**

-El examen se puntuará sobre diez, contribuyendo cada uno de los cinco primeros problemas con dos puntos. El último problema es voluntario**. Tiene un nivel de dificultad mayor que el resto y sólo debiera ser intentado por aquellos que quieran optar a la matrícula de honor.**

-Las respuestas deben ser justificadas correctamente.

-No se admite el uso de máquinas calculadoras **o similares.**

EJERCICIOS

1) Comprobar que el grupo $\mathbb{Z}_9^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$ es cíclico (con la multiplicación). Demostrar que

$$\begin{array}{rcl} \phi : (\mathbb{Z}_6, +) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_9^*, \times) \\ \overline{x} & \longrightarrow & \overline{(4^x)} \end{array}$$

es un homomorfismo pero no un isomorfismo, y sin embargo $(\mathbb{Z}_6, +) \cong (\mathbb{Z}_9^*, \times)$.

2) Sean

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular $(\sigma\,\tau)^{16}$.

3) Considérense las funciones $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} - \{3/2\}$ y $g : \mathbb{Q} - \{3/2\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dadas por

$$f(n) = \frac{3n}{2n-1}, \qquad g(x) = \frac{x}{2x-3} + 702^{14} + 3^7.$$

Describir de manera sencilla el conjunto $(g \circ f)^{-1}(7\mathbb{Z})$ donde $7\mathbb{Z}$ indica los múltiplos de 7.

4) En una clase de 100 alumnos el número de chicos es divisible por 13 y el de chicas es divisible por 8. Si cada chica escoge a un chico distinto como novio, ¿cuántos chicos se van a quedar sin novia?

5) Si $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + 2y + z = 0\}$. Hallar una base de $V \cap W$ y $\dim(V + W)$.

OPCIONAL:

6) Hallar todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales las raíces del polinomio de segundo grado $P_n = 4x^2 - 4x - 2! - 3! - 4! - \ldots - (n-1)! - n!$ sean racionales.

Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Calificación: $\underset{1}{\sqcup} + \underset{2}{\sqcup} + \underset{3}{\sqcup} + \underset{4}{\sqcup} + \underset{5}{\sqcup} = \square$

Por favor, un problema en cada cara.