Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Calificación: $\underset{1}{\underline{\quad\quad}} + \underset{2}{\underline{\quad\quad}} + \underset{3}{\underline{\quad\quad}} = \boxed{\quad}$

1) Calcular razonadamente el grado del cuerpo de descomposición de los siguientes polinomios sobre los cuerpos que se indican.

0'5-i) $(x^2+1)(x^2+x+1)$ sobre $\mathbb{Q}$.

0'75-ii) x^5-1 sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$.

0'5-iii) x^7-6 sobre $\mathbb{Q}$.

0'75-i) $\big(x^3+x+1\big)\big((x+1)^3+(x+1)^2+1\big)$ sobre $\mathbb{F}_2$.

2) Sea $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ con $\zeta = e^{2\pi i/9}$. Sabiendo que $P = x^6 + x^3 + 1$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ cuyas raíces son ζ, ζ^2, ζ^4, ζ^5, ζ^7 y ζ^8, resolver los siguientes apartados:

0'5-i) El automorfismo $\sigma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ dado $\sigma(\zeta) = \zeta^2$ genera todo el grupo de Galois que es isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.

0'5-ii) Demostrar que sólo existen dos cuerpos intermedios $\mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} M_1, M_2 \underset{\neq}{\subset} L$ y que $[M_1 : \mathbb{Q}] = 2$, $[M_2 : \mathbb{Q}] = 3$.

1-iii) Hallar los subgrupos de $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ que dejan fijos $\mathbb{Q}(\zeta^3)$ y $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ y deducir del apartado anterior que $M_1 = \mathbb{Q}(\zeta^3)$, $M_2 = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$.

0'75-iv) Demostrar que $(\zeta+\zeta^8)^{100}+(1+\zeta^3)^{50}+(\zeta^2+\zeta^7)^{100}+(1+\zeta^6)^{50}+(\zeta^4+\zeta^5)^{100}$ pertenece a $\mathbb{Q}$.

3) Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

0'5-i) Si $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + a \in \mathbb{C}[x]$ tiene raíces (complejas) múltiples, entonces $a \in \mathbb{Q}$.

0'5-ii) S_5 es isomorfo a $S_4 \times \mathbb{Z}_5$.

0'5-iii) La extensión de cuerpos de funciones $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}(x^4)$ tiene a $\{\mathrm{Id}\}$ como grupo de Galois.

0'5-iv) Si $L/\mathbb{Q}$ es normal y $[L : \mathbb{Q}] = 3$, entonces $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_3$.

0'5-v) Para todo primo positivo, p, la extensión $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{p})/\mathbb{Q}$ es normal y de grado 8.

0'5-vi) La extensión $\mathbb{Q}(e^2 - \pi e, e^2 + \pi e, \pi^5 - \pi^2)/\mathbb{Q}$ es algebraica.

0'5-vii) Si $\beta \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/54}) \cap \mathbb{R}$ es construible con regla y compás, entonces $\beta \in \mathbb{Q}$. (Recuérdese que $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/54}) : \mathbb{Q}] = \phi(54) = 18$).

0'5-viii) El grupo $\mathbb{Z}_2 \times S_3$ es soluble.

0'75-xi) Si $[\mathbb{F}_5(\alpha) : \mathbb{F}_5] = 5$ y M es el cuerpo de descomposición de $x^5 - \alpha \in \mathbb{F}_5(\alpha)[x]$, entonces $[M : \mathbb{F}_5] = 5$.