Diciembre 1995 **Inicial del primer apellido** ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Calificación: ___ + ___ + ___ = ☐

1) Decidir si son irreducibles los polinomios siguientes en los anillos de polinomios que se indican:

0'5 - i) $x^5 + 6x^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[x]$.

0'5 - ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ en $\mathbb{Q}[x]$.

0'5 - iii) $x^2 - 2x - 4$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$.

0'5 - iv) $x^2 + 2x - 1$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$.

1 - v) $x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Q}(\sqrt[17]{2})[x]$.

2) Considérese $P = x^4 - 10x^3 + 26x^2 + 16x - 14$ y sea α su raíz real y positiva.
0'5 - i) Hallar $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

2'5 - ii) Sabiendo que $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = A_4$ donde L es el cuerpo de descomposición de P y A_4 es un grupo de orden 12 que sólo tiene subgrupos propios de órdenes 2, 3 y 4. Demostrar que cualquier polinomio de grado dos irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, también lo es en $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$.

(continúa en la otra cara)

3) Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

0'5 - i) Si $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$, para cada $1 < n < 16$ existe un elemento de L cuyo polinomio mínimo tiene grado n.

0'5 - ii) El polinomio $x^5 - x \in \mathbb{F}_5[x]$ se descompone en factores lineales.

0'5 - iii) La extensión $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}(\pi^3 + \pi + 1)$ es algebraica.

0'5 - iv) El grupo de Galois de una extensión normal es cíclico.

0'5 - v) Si el punto (x, y), con $x, y > 0$, es construible con regla y compás, entonces el punto $(\sqrt{x}, x^3 - \sqrt{y})$ también lo es.

0'5 - vi) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tiene exactamente 3 subgrupos de orden 2.

0'5 - vii) S_3 (el conjunto de biyecciones de $\{1, 2, 3\}$ en sí mismo) tiene exactamente 3 subgrupos de orden 2.

0'5 - viii) El grupo multiplicativo de unidades (elementos invertibles) del anillo $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ es cíclico.