Resumen del capítulo 7

Determinantes A cada matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ se le asigna un elemento de K llamado *determinante* que se denota con $|A|$ o $\det(A)$.

La definición del determinante de A es recursiva. Si A es una matriz 1×1 se define como el único elemento de A y en dimensiones superiores como

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}| - \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|$$

donde A_{ij} es la matriz obtenida a partir de A tachando la fila i y la columna j.

A partir de esta definición es fácil deducir algunas fórmulas comunes como los determinantes 2×2 o el determinante de una matriz triangular

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Desde el punto de vista computacional la fórmula que define el determinante es muy costosa para matrices generales de tamaño moderadamente grande.

Algunas propiedades de los determinantes son:

1. $|A| = |A^t|$. 2. $|AB| = |A|\,|B|$.

3. Al intercambiar dos columnas (o dos filas) el determinante cambia de signo.

Regla de Cramer Los determinantes están ligados a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales $n \times n$. La relación más conocida (aunque muy poco práctica) es la llamada *regla de Cramer*:

Sea el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ y $|A| \neq 0$, entonces la solución (única) viene dada por la fórmula

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

donde A_i es la matriz A sustituyendo la columna i por $\vec{b}$.

La relación entre resolución de sistemas y determinantes queda clara sabiendo que frente a los tres procesos de la reducción de Gauss, un determinante

1. queda invariante al sumar a una fila un múltiplo de otra.
2. se multiplica por α al multiplicar una fila por α.
3. cambia de signo al intercambiar dos filas.

De ello se podrían deducir todas las propiedades de los determinantes y permite dar un algoritmo basado en el de Gauss para calcularlos. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 & -13 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix},$$

aunque no es estrictamente necesario intercambiamos ahora las dos últimas columnas para hacer los cálculos con mayor comodidad:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 = 24.$$

La relación con la reducción de Gauss también sirve para probar que las columnas de una matriz cuadrada A son linealmente independientes si y sólo si $|A| \neq 0$ y esta última condición equivale a que A sea invertible.

Se pueden emplear determinantes para hallar la matriz inversa. Si $|A| \neq 0$, se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t$$

donde C es la matriz de cofactores, es decir $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$. Por ejemplo, si $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ se tiene $|A_{11}| = 1$, $|A_{12}| = 1$, $|A_{21}| = 2$, $|A_{22}| = 3$, y la matriz de cofactores resulta $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ y la inversa es $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.