

## Resumen del capítulo 12

**Formas cuadráticas** Una *forma cuadrática* es una función  $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $Q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$  donde  $f$  es una forma bilineal.

Si  $x_1, \dots, x_n$  son las coordenadas de  $\vec{x}$  en una base  $B$ , entonces  $Q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}x_i x_j$  donde  $(f_{ij})_{i,j=1}^n$  es la matriz de  $f$  en la base  $B$ . Tomando  $a_{ij} = (f_{ij} + f_{ji})/2$  tenemos  $Q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \vec{v}^t A \vec{v}$  donde  $A$  es una matriz simétrica y  $\vec{v}$  es un vector (columna) en  $\mathbb{R}^n$  de coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ .

En definitiva, una forma cuadrática no es otra cosa que un polinomio cuadrático homogéneo en las coordenadas. Además se puede escribir como  $\vec{v}^t A \vec{v}$  con  $A = A^t$ , la *matriz de la forma cuadrática* en la base elegida.

Se dice que una forma cuadrática  $Q$  es *definida positiva* si  $Q(\vec{x}) > 0$  para  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , se dice que es *definida negativa* si  $Q(\vec{x}) < 0$  para  $\vec{x} \neq \vec{0}$  y, suponiendo que su matriz tiene determinante no nulo, se dice que  $Q$  es *indefinida* si no es ni definida positiva ni definida negativa.

Si  $A$  con  $|A| \neq 0$  es la matriz de una forma cuadrática  $Q$ , por el teorema espectral  $A$  diagonaliza en una base ortonormal. En dicha base  $Q$  se expresa como  $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$  donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores y  $Q$  será definida positiva si todos ellos son positivos y definida negativa si todos son negativos. Un posterior cambio de base  $x_i \mapsto x'_i / \sqrt{|\lambda_i|}$  combinado con un reordenamiento de las variables permiten llegar a que  $Q$  en cierta base se expresa en coordenadas como  $y_1^2 + \dots + y_k^2 - (y_{l+1}^2 + \dots + y_{l+k}^2)$ . A esta expresión se le llama *forma normal* de  $Q$  y al par de números  $(k, l)$  *signatura* de  $Q$  (si  $l = 0$ ,  $Q$  es definida positiva).

Por ejemplo,  $Q(\vec{x}) = -x^2 + 8xy - 7y^2$  con  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tiene como matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ ,  $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$ . Los autovalores de  $A$  son  $\lambda_1 = 1 > 0$  y  $\lambda_2 = -9 < 0$  entonces su signatura es  $(1, 1)$  y es indefinida. De la misma forma si consideramos el ejemplo en  $\mathbb{R}^3$  dado por  $Q = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4yz$  los autovalores son  $\lambda_1 = 1 > 0$  (doble) y  $\lambda_2 = 6 > 0$  por tanto  $Q$  es definida positiva.

El *criterio de Sylvester* es un criterio simple y eficiente en dimensiones bajas para decidir si una forma cuadrática es definida positiva. Lo que establece es:

$$\vec{x}^t A \vec{x} \text{ definida positiva} \Leftrightarrow \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \text{ para todo } k.$$

Evidentemente,  $Q$  es definida negativa si y sólo si  $-Q$  es definida positiva y el criterio se extiende de la forma obvia.

Por ejemplo, la forma cuadrática en  $\mathbb{R}^3$  dada por  $x^2 + 11y^2 + 5z^2 - 4xy + 2xz - 2yz$  es definida positiva porque

$$\Delta_1 = |1| > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 11 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

Usando el criterio de Sylvester, la forma cuadrática antes mencionada  $Q(\vec{x}) = -x^2 + 8xy - 7y^2$ , no es definida positiva porque  $\Delta_1 < 0$ , tampoco es definida negativa porque cambiando de signo la matriz se tiene  $\Delta_2 < 0$ , por consiguiente es indefinida, como ya habíamos visto de otro modo.

Un tercer método para comprobar si una forma cuadrática es definida positiva es el *algoritmo de Gauss* que se basa en completar cuadrados para eliminar todos los productos cruzados y conseguir expresar la forma cuadrática como una combinación de cuadrados.

Por ejemplo si  $Q = x^2 - y^2 + 4z^2 - 2xy + 6xz - 2yz$ , elegimos una variable, digamos  $x$ , y queremos eliminar los productos  $-2xy + 6xz$  para ello se completan cuadrados escribiendo  $x^2 - 2xy + 6xz = (x - y + 3z)^2 - y^2 - 9z^2 + 6yz$  (nótese que los coeficientes  $-1$  y  $3$  son la mitad de  $-2$  y  $6$ ). Sustituyendo obtenemos

$$Q = (x - y + 3z)^2 - 2y^2 - 5z^2 + 4yz.$$

Ahora ya no hay productos cruzados con  $x$ . Se repite el mismo procedimiento con la variable  $y$  para eliminar  $4yz$ . Lo más cómodo es sacar el el coeficiente  $-2$  factor común antes de completar cuadrados:  $-2(y^2 - 2yz) = -2((y - z)^2 - z^2)$ . Sustituyendo se llega a

$$Q = (x - y + 3z)^2 - 2(y - z)^2 - 3z^2.$$

Con esto ya está claro que la forma cuadrática es indefinida. El cambio de base  $X = x - y + 3z$ ,  $Y = \sqrt{2}(y - z)$ ,  $Z = \sqrt{3}z$  lleva a la forma normal  $X^2 - Y^2 - Z^2$ .

Un caso excepcional en el algoritmo de Gauss es cuando la forma cuadrática sólo tiene productos cruzados y entonces no hay ninguna variable en la que comenzar completando cuadrados. Por ejemplo,  $Q = xy + 3xz + 5yz$ . En ese caso, antes de comenzar se hace un cambio de base previo que provoque la aparición de algún cuadrado. Típicamente  $x = X + Y$ ,  $y = X - Y$  (o con otros nombres de variables) que llevaría la  $Q$  anterior a  $X^2 - Y^2 + 8Xz - 2Yz$  sobre la cual ya se pueden completar cuadrados hasta llegar a  $(X + 4z)^2 - (Y + z)^2 - 15z^2$  que prueba que la signatura es  $(1, 2)$ .