

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_ D.N.I.: \_\_\_\_\_

1. Supongamos que  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  es equivalente por filas a  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix}$ .

a. (0.5 puntos) Calcula la dimensión de  $\text{Col}(A)$ .

b. (0.5 puntos) Calcula la dimensión de  $\text{Nul}(A)$ .

c. (0.5 puntos) Calcula la dimensión de  $\text{Fil}(A)$ .

d. (0.5 puntos) Calcula la dimensión de  $\text{Fil}(A)^\perp$ .

2. Sea  $\mathbf{u}$  un vector unitario. Considera la transformación lineal  $S = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ .

a. (0.25 puntos) Calcula  $S(\mathbf{u})$ .

b. (0.5 puntos) Sean  $W = \text{Gen}\{\mathbf{u}\}$ , y  $\mathbf{v} \in W^\perp$ . Calcula  $S(\mathbf{v})$ .

c. (0.5 puntos) Da una interpretación geométrica de  $S$ .

d. (0.75 puntos) Decide de manera razonada si  $S$  es diagonalizable, y en caso afirmativo escribe su matriz en una base diagonalizante.

**3.** La generación  $k$ -ésima de una población de una determinada especie está formada por  $A_k$  hembras y  $B_k$  machos. Supongamos que la composición de la siguiente generación depende de la anterior del siguiente modo:

$$\begin{aligned}A_{k+1} &= 0.8A_k + 0.7B_k \\B_{k+1} &= 0.2A_k + 0.3B_k.\end{aligned}$$

**a.** (0.25 puntos) Escribe el sistema dinámico en notación matricial.

**b.** (1.25 puntos) Supongamos que  $A_0 = 500$  y  $B_0 = 400$ . ¿Cuál es la composición aproximada de la población en la tercera generación?

**c.** (0.5 puntos) Con las mismas condiciones iniciales que en el apartado (b), decide qué sucede a largo plazo con la composición de las dos poblaciones.

4. Considera los siguientes puntos de  $\mathbb{R}^2$  :  $(0, 0)$ ,  $(1, 8)$ ,  $(3, 8)$  y  $(4, 20)$ .

a. (1 punto) Utiliza el método de mínimos cuadrados para obtener la recta  $y = ax + b$  que mejor aproxima a los puntos.

b. (0.5 puntos) Calcula el error cometido en la aproximación del apartado (a).

c. (0.5 puntos) Si  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$ , y  $W = \text{Col}(A)$  con  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ , calcula  $\text{Proy}_W(\mathbf{b})$ .

5. Considera la forma cuadrática  $Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 8xy + 4xz + 4yz$ .

a. (1 punto) Encuentra una base ortonormal en la que la forma cuadrática  $Q$  diagonalice.

b. (0.5 puntos) ¿Es  $Q$  definida positiva?

c. (0.5 puntos) ¿Es  $Q$  definida negativa?