

---

## CÁLCULO VECTORIAL

---

### Algunos operadores diferenciales

Los libros de física e ingeniería están repletos de operadores diferenciales que sirven para formular ideas relativamente sencillas. Dos de los más importantes son la divergencia y el rotacional que actúan sobre campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$ , es decir sobre funciones  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  que aplican puntos de tres coordenadas en vectores de tres coordenadas.

La *divergencia* de  $\vec{F}$  se define como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

El *rotacional* se define como un determinante formal

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

donde se supone que multiplicar por ejemplo  $\partial_y$  y  $F_3$  significa hacer la derivada parcial  $\partial F_3 / \partial y$  y lo mismo con las otras variables. Además en el resultado debemos interpretar los coeficientes de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  como la primera, la segunda y la tercera coordenadas, respectivamente.

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

pero esta fórmula es más difícil de memorizar.

Recordando que el *gradiente* es el vector formado por las derivadas parciales y se representa como  $\nabla f$ , no debiera resultar extraño que en muchos textos se escriba  $\nabla \cdot \vec{F}$  en lugar de  $\operatorname{div} \vec{F}$  y  $\nabla \times \vec{F}$  en lugar de  $\operatorname{rot} \vec{F}$ .

**Ejemplo.** Calculemos la divergencia y el rotacional de  $\vec{F}(x, y, z) = (2y + z^2, y^2 - x, xyz)$ . Se tiene fácilmente

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 2y + xy.$$

Por otro lado

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2y + z^2 & y^2 - x & xyz \end{vmatrix} = (xz - 0)\mathbf{i} - (yz - 2z)\mathbf{j} + (-1 - 2)\mathbf{k} = (xz, 2z - yz, -3).$$

Una propiedad del rotacional muy importante en Física es que es capaz de detectar los gradientes, en el sentido de que, al menos en pequeños entornos, si  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$  entonces

existe una función  $f$ , llamada *potencial*, que verifica  $\nabla f = \vec{F}$ . Como el nombre sugiere, esta función está relacionada con la energía potencial. Recíprocamente, si se toma  $\vec{F} = \nabla f$ , entonces  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ . La segunda notación introducida vuelve a ser muy sugestiva porque dice algo así como que  $\nabla \times \nabla$  es nulo. Los campos que cumplen  $\vec{F} = \nabla f$  se llaman *conservativos*, sobre todo en Física.

**Ejemplo.** Sólo para seguir practicando con la definición de rotacional, tomemos la función  $f = xz + y^3 + e^{yz}$  y comprobemos que realmente se cumple  $\text{rot } \nabla f = \vec{0}$ . El gradiente es  $\nabla f = (z, 3y^2 + ze^{yz}, x + ye^{yz})$  y el rotacional de este resultado es

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & 3y^2 + ze^{yz} & x + ye^{yz} \end{vmatrix} = ((e^{yz} + yze^{yz}) - (e^{yz} + yze^{yz}))\mathbf{i} - (1 - 1)\mathbf{j} + (0 - 0)\mathbf{k},$$

esto es, el campo vectorial nulo.

Más interesante en las aplicaciones es proceder al revés, es decir, dado un campo vectorial  $\vec{F}$  con rotacional nulo, calcular la función  $f$  de la que es gradiente. Para ello hay que resolver

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = F_3.$$

El procedimiento consiste en integrar la primera ecuación con respecto de  $x$  dejando que la constante de integración dependa de  $y$  y  $z$ , después sustituir en la segunda y volver a integrar, y lo mismo con la tercera variable.

**Ejemplo.** Consideremos el campo vectorial  $\vec{F} = (3x^2 + yz, 2yz + xz, y^2 + xy + 1)$ . Un cálculo prueba que  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ , por tanto es conservativo. Hallemos un potencial, es decir, una  $f$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$ . Escribimos las ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yz + xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + xy + 1.$$

Al integrar la primera con respecto a  $x$  se obtiene:

$$f = x^3 + xyz + C(y, z).$$

Sustituyendo en la segunda, se deduce que

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 2yz \quad \text{y por tanto} \quad C = y^2z + D(z) \quad \text{y} \quad f = x^3 + xyz + y^2z + D(z).$$

Finalmente, al sustituir en la última ecuación, se obtiene  $D'(z) = 1$  y por tanto  $D(z) = z$  salvo sumar constantes y entonces  $f = x^3 + xyz + y^2z + z$  es un potencial. Al sumar cualquier constante también se obtendría un resultado válido.

Todo lo dicho en dimensión 3 se aplica para campos en dimensión 2 suponiendo que la última coordenada es nula, aunque en la literatura del tema la gran mayoría de los autores recelan de escribir  $\text{rot } \vec{F}$  para un campo de dos dimensiones (por ejemplo [LE99]). Con este truco de completar con un cero, el rotacional tiene sus dos primeras coordenadas nulas ya que si  $\vec{F} = (F_1, F_2)$  con  $F_1$  y  $F_2$  funciones de  $(x, y)$ ,

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 0)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

La condición para que un campo sea conservativo pasa entonces a ser que esta diferencia de derivadas parciales es nula.

**Ejemplo.** El campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$  dado por  $\vec{F} = (6xy, 3x^2 - \text{sen } y)$  es conservativo porque diferencia anterior se anula. Hallemos un potencial  $f$ . Escribimos  $\nabla f = \vec{F}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - \text{sen } y.$$

Al integrar la primera ecuación (con respecto a  $x$ ) se obtiene  $f = 3x^2y + C(y)$  y al sustituir en la segunda,  $C'(y) = -\text{sen } y$ , entonces se puede tomar  $C(y) = \cos y$  y el potencial  $f = 3x^2y + \cos y$ .

Cuando calculamos la divergencia de un campo conservativo obtenemos la suma de las derivadas parciales segundas, con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  del potencial. Como esta situación es común, recibe un nombre: se dice que es el *laplaciano* del potencial y se denota con  $\Delta$ . En general, dada una función  $f$  suficientemente regular, se define su *laplaciano* como

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

El laplaciano aparece en muchos problemas de la física matemática. En particular cuando se resuelve el *átomo de hidrógeno* a través de la *ecuación de Schrödinger* y se calculan los *orbitales atómicos*. En ese y otros contextos, es muy útil disponer de una fórmula para  $\Delta$  en coordenadas esféricas. El cálculo es muy largo si sólo se utiliza la regla de la cadena sin ningún truco adicional, y conduce a la fórmula:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen } \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \text{sen } \beta \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}.$$

En particular para  $f = g(r)$  sólo dependiendo del radio (una función radial), se tiene  $\nabla f = r^{-2}(r^2 g')' = 2r^{-1}g' + g''$ . En este curso no veremos las aplicaciones de estas fórmulas que son fundamentales en numerosos cálculos de física matemática.

## Integrales de campos en curvas y superficies

En Física es natural introducir una manera de integrar que indique, en cierto modo, qué cantidad del campo pasa a través de una curva o una superficie. La idea intuitiva no es complicada y, aunque es irrelevante para resolver los problemas que se proponen habitualmente, cualquiera debiera ser capaz de entenderla.

Idea intuitiva: Pensemos en una cuenta de collar confinada a un alambre rígido. Cualquier impulso que vaya en la dirección normal de la curva no tendrá ningún efecto y sólo se aprovechará la parte tangencial, porque es la que le permite moverse. Del mismo modo, si pensamos en un líquido dentro de una superficie cerrada, saldrá más deprisa si se dirige en la dirección normal (exterior) mientras que siguiendo direcciones tangentes se quedaría dando vueltas sin llegar a salir. Las componentes tangenciales y normales se obtienen mediante un producto escalar con la tangente y la normal, y por eso aparecen, respectivamente, en la definición de las integrales sobre curvas y superficies.

Supongamos que tenemos una función  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Como  $\sigma$  asigna a cada valor del “tiempo”  $a \leq t \leq b$  un punto, podemos interpretarla como la ecuación de movimiento de una partícula y describirá una curva  $C$  recorrida en cierta dirección. Se dice que  $\sigma$  es una *parametrización* de la curva porque para cada valor del parámetro  $t$  da un punto de  $C$ . Se define la *integral de línea* de un campo vectorial  $\vec{F}$  sobre  $C$  como

$$\int_C \vec{F} \cdot d\sigma = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

Recordemos que  $F(\sigma(t))$  significa simplemente sustituir la tres componentes de  $\sigma$  en las variables de  $\vec{F}$ . Volviendo a la idea intuitiva,  $\vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$  está relacionado con la proyección de  $\vec{F}$  en la dirección tangente a la curva determinada por  $\sigma'$ . En Física, si  $\vec{F}$  es la fuerza, entonces la integral de línea indica el *trabajo* realizado a lo largo de la curva  $C$ .

Aunque el caso de dimensión 3 es el más común, nada impide considerar las integrales de línea en otras dimensiones, especialmente en dimensión 2. Simplemente ahora tanto  $\sigma$  como  $\vec{F}$  tendrán dos coordenadas. Una notación un poco antigua para la integral de línea, pero muy empleada todavía en algunos ámbitos (por ejemplo, la termodinámica), es

$$\int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \quad \text{y} \quad \int_C F_1 dx + F_2 dy$$

en los caso de dimensión 3 y 2. Significa lo mismo que  $\int_C \vec{F} \cdot d\sigma$ .

**Ejemplo.** Consideramos  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$  para  $3\pi/2 \leq t \leq 2\pi$ . Esta función describe una curva  $C$  que es un arco de circunferencia. Tomemos ahora el campo  $\vec{F} = (x^2 + y^2 + y, -x)$ . Calculemos la integral de línea. La parametrización nos dice que  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , con lo cual  $\vec{F}(\sigma(t)) = (1 + \sin t, -\cos t)$  y

$$\int_C \vec{F} \cdot d\sigma = \int_{3\pi/2}^{2\pi} (1 + \sin t, -\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-\sin t - 1) dt = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Ahora veamos una cosa bien curiosa: Tomemos la función  $\sigma(t) = (t, -\sqrt{1-t^2})$  que describe el mismo arco de circunferencia. Entonces

$$\int_0^1 \left(1 - \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt = 1 - \arcsen x \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Da el mismo resultado aunque aparentemente los cálculos son bien distintos. Realmente el misterio desaparece si uno piensa en la fórmula de cambio de variable ( $t = \sen u$ ).

En general, se cumple que *la integral de línea no depende de la parametrización que demos de la curva, sólo depende de forma de la curva en sí y de la dirección en la que se recorre.*

El sentido de recorrido afecta al signo de la integral. Por ejemplo, para la integral anterior, la primera parametrización va de  $\sigma(3\pi/2) = (0, -1)$  a  $\sigma(2\pi) = (1, 0)$ . Si quisiéramos ir de  $(1, 0)$  a  $(0, -1)$  por el mismo arco de circunferencia, entonces la  $t$  debería comenzar en  $2\pi$  y acabar en  $3\pi/2$ . Esto requiere intercambiar el orden de los límites de integración

$$\int_{2\pi}^{3\pi/2} (-\sen t - 1) dt = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

Por supuesto, intercambiar los límites siempre tiene el efecto de cambiar el signo, entonces podemos parametrizar en el orden que queramos y después ajustar el signo si no coincide con lo que necesitamos.

**Ejemplo.** Digamos que queremos calcular la integral de  $\vec{F} = (2x, 2y, 2z)$  a lo largo del segmento de recta  $r$  que va de  $(1, 1, 1)$  a  $(0, 0, 0)$ . La parametrización más natural de este segmento es  $\sigma(t) = (t, t, t)$  con la  $t$  variando de 1 a 0. Si esto supone algún trastorno para nuestra intuición sobre integrales, podemos integrar de 0 a 1 y después cambiar el signo:

$$\int_0^1 (2t, 2t, 2t) \cdot (1, 1, 1) dt = 3 \quad \Rightarrow \quad \int_r \vec{F} \cdot d\sigma = -3.$$

Veamos ahora cómo integrar un campo en una superficie. El hecho de que una superficie tenga dos dimensiones, se traduce en que ahora las parametrizaciones deben tener dos parámetros, es decir, una parametrización de una superficie  $S$  vendrá dada por una función  $\Phi$  que a cada par de parámetros  $(u, v)$  le asigna un punto de  $\mathbb{R}^3$  de forma que al variar  $(u, v)$  en cierto rango  $R$ , los valores de  $\Phi(u, v)$  describen la superficie  $S$ . Se define la *integral de superficie* de un campo vectorial  $\vec{F}$  sobre  $S$  como

$$\boxed{\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_R \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) dudv}$$

donde  $\vec{N}(u, v)$  es la normal dada por  $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ . Es decir, que todo funciona como en la integral de línea cambiando  $\sigma'(t)$ , que es un vector tangente, por  $\vec{N}(u, v)$ , que es normal.

De nuevo, la integral de superficie no depende de la parametrización que demos a la superficie, sólo depende de la forma de la superficie en sí y del sentido que se especifique para la normal.

La última parte de esta afirmación parece más misteriosa que en el caso de las curvas pero se resuelve de la misma forma. Si el sentido de la normal de una parametrización no corresponde con el especificado, basta cambiar el signo. Recordemos que, según la idea intuitiva, en el caso de las curvas queremos saber el campo a través de la curva y en el caso de las superficies, el que atraviesa la superficie de un lado a otro. En ambos casos hay dos direcciones posibles.

Las integrales de superficie de campos también se llaman *integrales de flujo*. La terminología proviene del hecho físico de que si  $\vec{F}$  es el campo de velocidades de un fluido entonces  $\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$  indica el flujo a través de  $S$ : la cantidad de fluido que atraviesa  $S$  por unidad de tiempo.

**Ejemplo.** Consideremos la superficie  $S$  parametrizada por  $\Phi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$  con  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ . Vamos a calcular la integral de superficie  $\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$  para el campo vectorial  $\vec{F} = (e^{x+y} - 1, 0, z)$ .

La parametrización nos dice que  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = 1 - u - v$ , entonces  $\vec{F}(\Phi(u, v))$  es igual a  $(e^{u+v} - 1, 0, 1 - u - v)$ . Por otra parte la normal es

$$\vec{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = (1, 1, 1),$$

ya que las derivadas parciales de  $\Phi$  son  $(1, 0, -1)$  y  $(0, 1, -1)$ . Entonces sólo resta calcular

$$\int_0^1 \int_0^1 (e^{u+v} - 1, 0, 1 - u - v) \cdot (1, 1, 1) dudv = \int_0^1 \int_0^1 (e^{u+v} - u - v) dudv.$$

Esto es una integral iterada sencilla, y se tiene

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \int_0^1 (e^{1+v} - e^v - \frac{1}{2} - v) dudv = e^2 - 2e.$$

Si nos especificaran que la normal debe apuntar hacia abajo (tercera coordenada negativa) simplemente cambiaríamos el signo y el resultado sería  $2e - e^2$ .

Parametrizar una superficie puede ser complicado. Si viene dada por la gráfica de una función  $z = f(x, y)$  entonces siempre existe la posibilidad de tomar como parametrización  $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$  que corresponde al cambio de nombres  $x = u$ ,  $y = v$ . Sin embargo en algunas ocasiones hay elecciones más adecuadas.

**Ejemplo.** La gráfica  $z = 1 - x^2 - y^2$  describe un paraboloides (una parábola que gira por el eje vertical). Digamos que queremos calcular  $\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS$  donde  $\vec{F} = (x+y, y-x, 3x+2z+2)$  y  $S$  es la porción del paraboloides en el primer octante ( $x, y, z \geq 0$ ) y deseamos especificar la dirección de la normal que apunta hacia afuera (alejándose del origen).

Según lo que acabamos de ver,  $\Phi(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$  es una parametrización válida. Los valores que pueden tomar  $x$  e  $y$  son todos aquellos en el primer cuadrante con  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ , es decir que  $(x, y)$ , y por tanto  $(u, v)$ , están en la región  $R$  dada por la parte del círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$  con  $x, y \geq 0$ . El vector normal es

$$\vec{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1).$$

¿Apunta este vector hacia afuera o hacia dentro? Es fácil verlo geoméricamente de diferentes formas. Pensemos por ejemplo en el punto  $x = y = 0, z = 1$ , que es el más alto del paraboloides. Éste es  $\Phi(0, 0)$  y la normal que ha salido es  $\vec{N}(0, 0) = (0, 0, 1)$  que apunta hacia arriba, es decir, hacia afuera de la región determinada por el octante y el paraboloides. Más fácil es simplemente notar que las tres coordenadas son positivas. Entonces no cambiamos nada y seguimos con el cálculo según la fórmula:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iint_R (u+v, v-u, 3u+2-2u^2-2v^2+2) \cdot (2u, 2v, 1) \, dudv = \iint_R (3u+4) \, dudv.$$

La región  $R$  es, como hemos visto, un cuarto del círculo unidad y entonces lo más natural y sencillo es hacer la integral pasando a polares. Se obtiene finalmente:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (3r \cos \alpha + 4)r \, dr d\alpha = \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha + 2) \, d\alpha = 1 + \pi.$$

En vez de trabajar con la parametrización fácil y después hacer un cambio a polares, es más directo usar la parametrización en polares  $\Phi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, 1 - r^2)$ . Con ella estamos expresando que  $x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$  y, consecuentemente,  $z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$ . Una ventaja inmediata es que ahora los rangos de  $r$  y  $\alpha$  son más sencillos, simplemente  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \alpha \leq \pi/2$ . El cálculo de la normal es:

$$\vec{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & -2r \\ -r \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} = (2r^2 \cos \alpha, 2r^2 \sin \alpha, r).$$

De nuevo la orientación de la normal es la correcta (las tres coordenadas son positivas). Al sustituir en la definición de la integral de superficie, debemos hallar

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r \cos \alpha + r \sin \alpha, r \sin \alpha - r \cos \alpha, 3r \cos \alpha + 4 - 2r^2) \cdot (2r^2 \cos \alpha, 2r^2 \sin \alpha, r) \, dr d\alpha.$$

Después de simplificar, obtenemos justo lo mismo que después de hacer el cambio a polares con la anterior parametrización:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (3r^2 \cos \alpha + 4r) \, dr d\alpha = 1 + \pi.$$

De esta forma, en algún sentido, nos hemos ahorrado un paso.

### Integrales de funciones escalares en curvas y superficies

En algunas aplicaciones surge de manera natural la idea de integrar una función (escalar, no un campo) a lo largo de curvas y superficies. La definición es análoga al caso de integrales de campos vectoriales excepto que  $\sigma'$  y  $\vec{N}$  se sustituyen por sus *módulos*  $|\sigma'|$  y  $|\vec{N}|$  (también llamados *normas* y denotados mediante  $\|\sigma'\|$  y  $\|\vec{N}\|$ ).

Concretamente, si  $C$  es una curva parametrizada por  $\sigma = \sigma(t)$  con  $a \leq t \leq b$ , se define la *integral a lo largo de  $C$*  de una función  $f$  como

$$\int_C f d\sigma = \int_a^b f(\sigma(t)) |\sigma'(t)| dt$$

y de la misma forma, si  $S$  es una superficie parametrizada por  $\Phi = \Phi(u, v)$  con  $(u, v)$  en cierta región  $R \subset \mathbb{R}^2$ , se define la *integral de  $f$  sobre la superficie  $S$*  como

$$\int_S f dS = \iint_R f(\Phi(u, v)) |\vec{N}(u, v)| dudv.$$

El producto escalar es el producto de los módulos para vectores que apuntan en la misma dirección (y sentido) por tanto las expresiones anteriores coinciden con integrales de campos de módulo  $f$  con las direcciones de la tangente y la normal.

Físicamente se tiene

$$\text{Masa} = \int_C f d\sigma \quad \text{y} \quad \text{Masa} = \int_S f dS$$

donde en el primer caso  $\rho$  es la densidad lineal de la curva y en el segundo caso  $\rho$  es la densidad superficial. El caso  $\rho = 1$  (masa igual a longitud o área) da lugar a las fórmulas geométricas:

$$\text{Longitud de } C = \int_C 1 d\sigma \quad \text{y} \quad \text{Área de } S = \int_S 1 dS.$$

**Ejemplo.** Consideremos la función  $f = (x+z)/(x^2+y^2)$  y la curva  $C$  parametrizada por  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ , entonces

$$\int_C f d\sigma = \int_0^{2\pi} \frac{t + \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (t + \cos t) dt = 2\pi^2 \sqrt{2}.$$

**Ejemplo.** Consideremos ahora la función  $f = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$  y la superficie  $S$  parametrizada por  $\Phi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, 2\alpha)$  con  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  y  $0 \leq r \leq 1$ . Para calcular la integral sobre  $S$  necesitamos la normal:

$$\vec{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -r \sin \alpha & r \cos \alpha & 2 \end{vmatrix} = (2 \sin \alpha, -2 \cos \alpha, r).$$



Con esto,

$$\int_S f \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 4} \sqrt{r^2 + 4} \, dr d\alpha = 2\pi \int_0^1 (r^2 + 4) \, dr = \frac{26\pi}{3}.$$

La primera raíz cuadrada viene de sustituir la parametrización en  $f$  y la segunda del módulo del vector normal.

**Ejemplo.** La fórmula del área de la superficie esférica se debe a Arquímedes quien la obtuvo hace 23 siglos por argumentos geométricos complicados. Veamos que el cálculo de varias variables nos conduce al resultado de forma rápida. Lo más natural es usar la parametrización en esféricas

$$\Phi(\alpha, \beta) = (R \cos \alpha \sen \beta, R \sen \alpha \sen \beta, R \cos \beta) \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \text{ y } 0 \leq \beta \leq \pi,$$

donde  $R$  es el radio, que está fijo. Calculando el vector normal, se obtiene esta misma expresión pero multiplicada por  $-R \sen \beta$  (esto tiene un significado geométrico, pero no entraremos en ello). Por consiguiente  $|\vec{N}| = R^2 \sen \beta$ , ya que  $|\Phi(\alpha, \beta)| = R$  por parametrizar la esfera de radio  $R$ . Se concluye entonces que el área buscada es

$$\int_S 1 \, dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sen \beta \, d\alpha d\beta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sen \beta \, d\beta = 4\pi R^2.$$

### Algunos teoremas del cálculo vectorial

Comencemos por una propiedad que permite evaluar las integrales de línea fácilmente en el caso de campos conservativos. Si  $\vec{F} = \nabla f$ , entonces por la definición de integral de línea y la regla de la cadena

$$\int_C \vec{F} \cdot d\sigma = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) \, dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

Escrito de otra forma, si  $\vec{F}$  es conservativo y  $f$  es un potencial entonces la integral de línea para una curva que va de un punto inicial  $P_i$  a un punto final  $P_f$  es simplemente

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\sigma = f(P_f) - f(P_i).}$$

Es decir, que *para campos conservativos la integral de línea no depende de la curva, sólo del punto inicial y del final*. En el caso especial  $P_i = P_f$  se deduce que *la integral de línea de un campo conservativo a lo largo de una curva cerrada es nula*. Dicho sea de paso, para que todo funcione bien matemáticamente, en el caso bidimensional la curva no debe encerrar singularidades del campo (puntos donde vale infinito o hay otros problemas de definición).

**Ejemplo.** En un ejemplo anterior, habíamos calculado la integral de  $\vec{F} = (2x, 2y, 2z)$  a lo largo del segmento de recta  $r$  que va de  $(1, 1, 1)$  a  $(0, 0, 0)$ . Es fácil ver que este campo es conservativo y que  $f = x^2 + y^2 + z^2$  es un potencial. Según la fórmula anterior podríamos rehacer el cálculo con

$$\int_r \vec{F} \cdot d\sigma = f(0, 0, 0) - f(1, 1, 1) = -3,$$

que, por supuesto, es el mismo resultado.

El milagro de los campos conservativos ha ocurrido porque a la postre estábamos integrando una derivada. Todo se reducía al teorema fundamental del cálculo. Cabe preguntarse cómo se generaliza esto a dos o tres dimensiones, es decir, cómo hay que derivar para que la integral de la derivada sea la función en el borde (en el caso habitual son los extremos del intervalo). La respuesta es que esas formas de derivar son los operadores diferenciales divergencia y rotacional que ya habíamos visto.

Concretamente, se tienen los siguientes resultados:

**Teorema de la divergencia de Gauss** Sea  $V$  una región sólida acotada y  $S$  la superficie cerrada determinada por su frontera orientada con la normal exterior. Entonces para cualquier campo vectorial  $\vec{F}$  se verifica

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS.$$

**Teorema de Stokes** Sea  $C$  una curva cerrada en el espacio que es la frontera de una superficie  $S$ . Entonces para cualquier campo vectorial  $\vec{F}$  se verifica

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \int_C \vec{F} \cdot d\sigma$$

donde la normal de  $S$  y el sentido en que se recorre  $C$  verifican la regla de la mano derecha.

La regla de la mano derecha, es una regla mnemotécnica de uso muy común en Física. Requiere pensar en la mano derecha con el pulgar estirado (salvando o condenando a un gladiador o indicando un me gusta o no me gusta). En nuestro caso dice que si la curva se recorre en la dirección de los dedos (hacia las uñas) entonces la normal irá en la dirección del pulgar. Otra regla mnemotécnica, menos famosa pero más clara, es que si caminamos por  $C$  con la cabeza en la dirección de la normal entonces  $S$  debe quedar a la izquierda.

Estos teoremas dan un indicio acerca de la oportunidad de usar los nombres *divergencia* y *rotacional*. El primer operador está relacionado con la cantidad de campo que sale de una superficie y el segundo con cómo se aprovecha el campo a lo largo de una curva cerrada.

En los ejercicios muchas veces se utiliza el primer teorema para calcular rápidamente una integral sobre una superficie cerrada cuando la integral triple es sencilla. En principio, se podría utilizar el segundo para calcular integrales de línea, pero el cálculo directo suele ser más simple que efectuar la integral en el primer miembro. Aunque el teorema tiene una importancia capital para escribir muchas leyes físicas, en los ejercicios de matemáticas aparece desplazado por su variante bidimensional. Si  $S$  está en el plano  $XY$  entonces podemos suponer que  $\vec{F}$  sólo depende de  $x$  e  $y$  y la única coordenada no nula del rotacional es la tercera, según habíamos visto ya. Además parametrizando  $S$  con  $(u, v, 0)$ , se tiene  $\vec{N} = (0, 0, 1)$ . con todo esto, el teorema de Stokes se transforma en la siguiente versión bidimensional:

**Teorema de Green** Sea  $C$  una curva cerrada en el plano que es la frontera de una región  $R$ . Entonces para cualquier campo vectorial  $\vec{F}$  se verifica

$$\boxed{\iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_C \vec{F} \cdot d\sigma}$$

donde la curva  $C$  se recorre en sentido positivo (antihorario).

Al tomar  $\vec{F} = (-y/2, x/2)$  el primer miembro es  $\iint_R 1 dx dy$ , el área de  $R$ . En otras palabras, se puede calcular el área de una región paseándose por su frontera (ésta es la base de algunos aparatos llamados *planímetros*). Esta consecuencia curiosa del teorema de Green se puede escribir como

$$\text{Área de } R = \frac{1}{2} \int_C (-y dx + x dy).$$

**Ejemplo.** Consideremos el campo  $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ . Si queremos calcular su integral sobre la superficie esférica unidad con la normal exterior, llegaremos a unos cálculos un poco largos y a integrales que no son demasiado obvias. Si utilizamos en su lugar el teorema de la divergencia de Gauss, tendremos que integrar en la esfera (sólida) unidad  $V$ . Los cálculos son bastante más simples:

$$\iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^2 \cdot r^2 \sin \beta dr d\alpha d\beta = \frac{12\pi}{5},$$

donde se ha hecho el cambio a esféricas y las integrales iteradas son inmediatas. Recordemos que  $r^2 \sin \beta$  es el jacobiano del cambio.

**Ejemplo.** En la porción de paraboloides  $S$  dada por  $z = x^2 + y^2$  con  $z \leq 1$  tomamos la normal que apunta hacia afuera ( $z < 0$ ). Si queremos calcular  $\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{N} dS$  con  $\vec{F} = (1, xz^3, 2)$ , gracias al teorema de Stokes ni siquiera hay que hallar el rotacional. Parametrizaríamos la curva borde  $C$ , la que corresponde a  $z = 1$ , como  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ , el resultado es:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\sigma = - \int_0^{2\pi} (1, \cos t, 2) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = - \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -\pi,$$

donde se ha usado  $\cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2$ . El signo negativo después de la primera igualdad viene porque la normal hacia abajo, por la regla de la mano derecha requiere que la circunferencia  $C$  se recorra en sentido horario (vista desde arriba), mientras que  $\sigma$  la recorre en sentido contrario.

**Ejemplo.** La integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\sigma$  con  $C$  la circunferencia unidad y  $\vec{F} = (e^x - y, xy)$  se puede calcular directamente pero el teorema de Green lleva a una integral sobre el círculo unidad  $R$  que es especialmente sencilla cuando se usan coordenadas polares:

$$\iint_R (y + 1) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \sin \alpha + 1)r dr d\alpha = \pi.$$

**Ejemplo.** El cálculo del área en el interior de la elipse  $C : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  con  $a$  y  $b$  constantes positivas es un ejercicio de integrales dobles, sin embargo la aplicación de la fórmula que derivaba del teorema de Green simplifica los cálculos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \int_C (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((-b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \sin t)) dt = \pi ab,$$

donde se ha usado la parametrización  $\sigma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ .

**Referencias.** En [LE99] y [MT98], así como en otros muchos libros de cálculo en varias variables, hay capítulos dedicados al cálculo vectorial. El primero tiene más ejemplos pero curiosamente parece dar más importancia a la integración de funciones (escalares) que de campos, cuando estos últimos dominan las aplicaciones más importantes.

Una deficiencia al explicar el cálculo vectorial dentro de cursos de matemáticas es que no suele quedar claro por qué se integra como se integra ni la utilidad de los operadores y los teoremas. Para ello hay que dirigirse muchas veces a libros de Física. Una buena recomendación para los alumnos aventajados es la sección correspondiente en [FLS64]. Con más matemáticas pero sin olvidar las ideas, está [Sch05]. Los alumnos realmente muy interesados en Física y que no se asusten con la notación de hace siglo y medio, pueden encontrar inspirador dar un vistazo al clásico de J.C. Maxwell [Max54] donde se estaba creando parte del cálculo vectorial y utilizándose para expresar leyes físicas. El propio Maxwell dio una de las primeras demostraciones del teorema de Stokes.

## Referencias

- [FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.
- [LE99] R.P. Larson, R.E.; Hostetler and B.H. Edwards. *Cálculo y Geometría Analítica*. (Vol.II). McGraw Hill, sexta edición, 1999.

- [Max54] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*. Dover Publications Inc., New York, 1954. 3d ed, Two volumes bound as one.
- [MT98] J. Marsden and A. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Pearson/Addison Wesley, cuarta edición, 1998.
- [Sch05] H. M. Schey. *div, grad, curl and all that (an informal text on vector calculus)*. W.W. Norton & Company, cuarta edición, 2005.