

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

TRABAJO DE FIN DE GRADO

El teorema del h-cobordismo

Autor:

J. Ángel GONZÁLEZ

Directora:

Dr. Marina LOGARES

*Trabajo de fin de grado presentado para la obtención del título de
Doble Grado en Matemáticas - Ingeniería Informática*

Departamento de Matemáticas

15 de mayo de 2014

Última Modificación: 25 de septiembre de 2014



*“Si hace girar la rueda, es álgebra;
pero, si contiene una idea, es topología.”*

Solomon Lefschetz

RESUMEN

El teorema del h-cobordismo

por J. Ángel GONZÁLEZ

Dadas dos variedades diferenciales cerradas M_0 y M_1 , se dice que son cobordantes si existe una variedad compacta W tal que $\partial W = M_0 \sqcup M_1$. El teorema del h-cobordismo, justamente, da condiciones muy débiles para asegurar que un cobordismo sea trivial, esto es, difeomorfo a $M_0 \times [0, 1]$. A partir de este resultado, pueden resolverse problemas de gran profundidad, como la conjetura de Poincaré generalizada para dimensiones altas, que afirma que toda variedad diferenciable con los mismos grupos de homología que una esfera es homeomorfa a una esfera.

En la presente memoria abordaremos la demostración del teorema del h-cobordismo, desarrollando para ello las herramientas técnicas necesarias. Así, analizaremos la relación entre la adjunción de asas y la cirugía, y cómo mediante teoría Morse es posible descomponer un cobordismo en una descomposición por asas. A partir de esta descomposición, investigaremos cómo, utilizando técnicas de topología algebraica, estas asas pueden ser canceladas unas con otras hasta alcanzar la trivialidad del cobordismo. En este proceso, descubriremos la necesidad de un teorema técnico de gran importancia, conocido como el truco de Whitney y cómo se halla en el corazón de la prueba y condiciona las hipótesis del teorema del h-cobordismo.

Given two closed differentiable manifolds M_0 and M_1 , it is said that they are cobordant if there exists a compact manifold W such that $\partial W = M_0 \sqcup M_1$. The h-cobordism theorem, in fact, shows how very weak conditions in the cobordism can be imposed in order to assure that it is trivial, that is, diffeomorphic to $M_0 \times [0, 1]$. Very deep problems can be solved using this result, like the generalized Poincaré conjecture for high dimensions, which states that every differentiable manifold with the same homology groups than a sphere is, in fact, homeomorphic to a sphere.

In the present report, we approach the proof of the h-cobordism theorem, developing the subsequent necessary technical tools. In this direction, we will analyze the relation between pasting handles and surgery theory, and how Morse theory can be used to create a handlebody decomposition of a cobordism. From this decomposition, we will survey how, using techniques from algebraic topology, this handles can be cancelled one to each other to reach the triviality of the cobordism. In this process, we will discover that a remarkable technical theorem is needed, known as the Whitney trick, and how this result is key for the proof, determining the hypothesis of the h-cobordism theorem.

Agradecimientos

Este Trabajo de Fin de Grado ha sido una experiencia maravillosa, que, sin embargo, no hubiese sido posible sin el apoyo de tantas personas que siempre han estado a mi lado. En primer lugar, me gustaría agradecerlo a mis compañeros, tanto del Doble Grado como de Matemáticas, con especial dedicación a Cristóbal, Diego, Mario, Juan, Gallego y María Inés; que siempre han sido para mi un ejemplo inquebrantable de superación y de cómo la voluntad es lo único que necesitamos para llegar más lejos. Gracias por esas charlas maravillosas sobre muchos y muy diversos temas científicos. Con vosotros he aprendido infinidad de cosas sobre mecánica cuántica, relatividad general, geometría, análisis, álgebra, teoría de números, computabilidad, lenguajes de programación...

Además, me gustaría agradecer la dedicación de todos los profesores que, en algún momento de la carrera, me han impartido clase. Creo sinceramente que he tenido la suerte de aprender de la mano de magníficos docentes que no limitaban su trabajo a dar su clase y a hacer un examen, sino que dedicaban todos sus esfuerzos en profundizar más allá y transmitir una comprensión total de la materia. Gracias a ellos he podido crecer como matemático y evolucionar desde cuando necesitaba horas para entender cómo era posible que \mathbb{Q} y \mathbb{N} fuesen equicardinales hasta encontrar la belleza de comprender por qué la variable compleja nos permite calcular el grupo fundamental de la circunferencia.

Asimismo, me gustaría dar las gracias a mis amigos por el apoyo que siempre me han demostrado y la acogida que siempre he encontrado en ellos. Especialmente me gustaría dar las gracias a Laura, Silvia, Jony, Vicente, Silvina, María, Javi, Miguel, Yolanda, Germán, Sara, Samuel, Luis y Jaime por todos esos años maravillosos que he pasado con vosotros y, no me cabe duda, serán muchos más. También quisiera dar las gracias a Laura por entrar en mi vida y convertirla en algo fantástico y precioso; y por haber soportado estoicamente mi dedicación casi plena a mi Trabajo de Fin de Grado. Por supuesto, no podía faltar mi agradecimiento a mi familia, en especial a mis padres, que siempre me ha apoyado en mis estudios y me han inculcado que la oportunidad de aprender es la mayor fortuna que se puede tener.

Finalmente, me gustaría dedicar estas últimas palabras a mi directora en este trabajo, Marina Logares, en sincero agradecimiento por todo el apoyo y confianza que siempre ha depositado en mí a lo largo de todos estos años. Si soy el matemático en el que me he convertido es, sin lugar a dudas, gracias a ella. Para mí no es únicamente una tutora, sino una maestra, una mentora, y una guía.

Índice general

Abstract	IV
Agradecimientos	VI
Índice general	VIII
Notaciones básicas	X
1. Cobordismo	1
1.1. Introducción	1
1.2. Definiciones y notaciones básicas	4
1.3. Teorema del h-cobordismo	6
1.3.1. Consecuencias	7
2. Teoría Morse	11
2.1. Funciones Morse	11
2.2. Topología vía Morse	13
2.2.1. Demostración del teorema de estabilidad topológica	14
2.2.2. Aplicaciones del teorema de estabilidad topológica	16
2.3. Funciones de Morse-Smale	19
2.3.1. Homología Morse	19
3. Asas y Cirugía	22
3.1. Adjunción de un Asa	22
3.2. Cirugía	24
3.3. Descomposición en Asas y Teoría Morse	27
4. Alteración de cobordismos	30
4.1. Reordenación de asas	30
4.2. Cancelación de asas	33
4.2.1. Primeros resultados de cancelación	33
4.2.2. Cancelación de asas en índices intermedios	36
4.2.3. Cancelación de asas en índices bajos	37
4.3. Demostración del teorema del h-cobordismo	39
4.3.1. El lema de la forma normal	39
4.3.2. Finalización de la demostración del teorema del h-cobordismo	41
4.4. Truco de Whitney	42

4.4.1. Herramientas técnicas y el teorema de extensión	45
--	----

A. Dualidad de Lefschetz-Poincaré	47
--	-----------

Bibliografía	50
---------------------	-----------

Notaciones básicas

B^n	$:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x\ < 1\}$	Bola unidad abierta de dimensión n .
\bar{B}^n	$:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x\ \leq 1\}$	Bola unidad cerrada de dimensión n .
S^n	$:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ x\ = 1\}$	Esfera de dimensión n .
\mathbb{H}^n	$:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$	Hemiespacio izquierdo de dimensión n .
$M + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$	$:= M \cup_\varphi D^\lambda \times D^{m-\lambda}$	Adjunción de una λ -asa a M .
$S_p \varphi$	$:= \varphi(S^{\lambda-1} \times \{0\})$	Esfera de pegado inducida por φ en $M + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$.
$S_t \varphi$	$:= \{0\} \times S^{m-\lambda-1}$	Esfera transversal inducida por φ en $M + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$.
$\mathcal{C}_\varphi^\lambda M$	$:= (M - \text{Int Im } \varphi) \cup_{\bar{\varphi}} D^\lambda \times S^{m-\lambda}$	Cirugía de índice λ a M .
$\pi_n(X)$	$:= n$ -ésimo grupo de homotopía de X .	
$\pi_n(X, A)$	$:= n$ -ésimo grupo de homotopía de X relativo a A .	
H_n	$:=$ Teoría homológica satisfaciendo los axiomas de Eilenberg-Steenrod.	
$M \cong N$	$:= M$ y N son variedades difeomorfas.	

*A los que siempre están a mi lado,
porque son la fuente de mi fuerza.
Y a los que acaban de llegar,
porque han hecho mejor mi vida.*

Capítulo 1

Cobordismo

1.1. Introducción

Sin lugar a dudas, el problema más importante en topología algebraica es el de clasificación. Prácticamente todas las definiciones, teoremas y resultados de topología dejan entrever, tácitamente, esa ulterior aspiración por la clasificación. De entre todas las formas de indentificar, dos son especialmente relevantes, a saber, la equivalencia salvo homeomorfismos en espacios topológicos y salvo difeomorfismos en variedades diferenciables. Sin embargo, lejos de ser triviales, los problemas de clasificación se cuentan entre los más difíciles de la matemática. Tanto es así que el Instituto Clay incluyó entre sus célebres Problemas del Milenio la conjetura de Poincaré, que versa sobre la identificación de la 3-esfera por sus invariantes algebraicos.

Es precisamente este problema el que motiva gran parte de la discusión de este trabajo. En 1900, Henri Poincaré conjeturó que toda variedad diferenciable con los mismos grupos de homología que una esfera debía ser, salvo homeomorfismo, una esfera. La respuesta a esta pregunta, lejos de ser trivial, ha motivado gran parte del desarrollo de la topología algebraica y diferencial del siglo XX. Tanto es así que la respuesta se mantuvo esquiva hasta que, en 1961, Stephen Smale fue capaz de probar esta conjetura para dimensión mayor o igual que 5. Pero es más, las ideas que había necesitado desarrollar eran tan geniales que, únicamente un año más tarde fue capaz de reorganizarlas para probar un resultado central en topología diferencial, sobre el que se centra el trabajo que nos ocupa, conocido como el teorema del h-cobordismo.

El marco en el que se inscribe este teorema es el siguiente. Supongamos que tenemos dos variedades diferenciables cerradas (i.e., compactas y sin frontera) M_0 y M_1 tales que existe otra variedad compacta W de forma que $\partial W = M_0 \sqcup M_1$. En estas condiciones, se dice que M_0 y M_1 son cobordantes y que W es un cobordismo entre ellas. Claramente, la relación de cobordalidad es una relación de equivalencia y, por tanto, provee una forma de clasificar variedades. Más aún, evidentemente dos variedades difeomorfas son cobordantes, vía el cobordismo $M_0 \times [0, 1]$ y, por tanto, la relación de cobordalidad es más débil que la de difeomorfía.

Lo que viene a esclarecer el teorema del h-cobordismo es, precisamente, la relación contraria, estableciendo que, bajo ciertas condiciones, todo cobordismo es trivial, i.e., de la forma $M_0 \times [0, 1]$ y, por ende, M_0 y M_1 son difeomorfas. Respecto a las condiciones que deberemos imponer al cobordismo W para que se cumpla este teorema es que sea un h-cobordismo (esto es, que M_0 y M_1 sean simplemente conexos y que las inclusiones $M_0, M_1 \hookrightarrow W$ sean equivalencias homotópicas) y que $\dim W \geq 6$.

Las repercusiones de este resultado son impresionantes, pues a partir de él podremos caracterizar los discos en dimensiones altas como los únicos espacios compactos con frontera simplemente conexa con homología trivial (teorema 1.3.7) y, con él en la mano, probar que toda esfera homológica es homeomorfa a una esfera en dimensión mayor o igual que 5, (conjetura de Poincaré generalizada, teorema 1.3.9) o, incluso, que en dimensiones 5 y 6 podemos afinar más y la equivalencia es salvo difeomorfismo.

Sin embargo, a pesar de la facilidad con la que se desprenden profundos resultados del teorema del h-cobordismo, su demostración es compleja y tortuosa. La primera herramienta que necesitaremos desarrollar para su demostración son las nociones de descomposición de asas y de cirugía, que serán tratadas en el capítulo 3. En efecto, en ese capítulo probaremos que todo cobordismo es difeomorfo al resultado de engordar la frontera inferior M_0 y, sobre ella, pegar sucesivas asas (i.e. variedades de la forma $\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$) y descubriremos que el resultado sobre la frontera del cobordismo de adjuntar una λ -asa es precisamente el resultado de realizarle λ -cirugía. Para encontrar esta descomposición utilizaremos la idea recurrente de entender una variedad por las funciones que en ella se pueden definir, materializado en este caso como Teoría Morse, a cuyo estudio hemos destinado el capítulo 2.

Ahora bien, esta descomposición en asas no es única, sino que podemos realizar una serie de operaciones con las asas que nos permitan crearlas o eliminarlas entre ellas. Es precisamente gracias a este negocio por lo que seremos capaces de probar que el cobordismo es trivial, cancelando progresivamente unas asas con otras, como haremos en el capítulo 4. Para ello, nuestros esfuerzos se dividirán en dos frentes de actuación. Por un lado, deberemos tratar las asas de índices 0 y 1 para conseguir eliminarlas de nuestra descomposición en asas de la variedad. La eliminación de las asas de dimensión 0 simplemente se deberá a una cuestión de conexión, pues adjuntar un 0-asa es, precisamente, añadir una componente conexa a la variedad (proposición 4.2.11). La eliminación de las 1-asas será más compleja y en ella entrará crucialmente en juego la simple-conexión del cobordismo. En efecto, como veremos (teorema 4.2.12), un 1-asa representa una obstrucción a la trivialidad del grupo fundamental (pues es un arco que sobresale de la variedad) luego, como W es por hipótesis simplemente conexa, debe ser porque estas asas están siendo canceladas con otras de dimensión mayor.

Una vez eliminadas las asas de índice bajo con argumentos de conexión y simple-conexión, deberemos eliminar las asas de índice superior. En este punto, el eje central de los argumentos vira hacia una cuestión más homológica, pasando por comprender con profundidad la relación entre homología y descomposición en asas. Así, necesitaremos invocar una teoría homológica heredada de la teoría Morse, la homología Morse, que nos permite ligar de forma natural ambos conceptos. En consecuencia, la

cancelación de estas asas se deberá, principalmente, a que, por hipótesis, $H_*(W, M_0) = 0$. Sin embargo, materializar esta idea en una realidad será algo súmamente complicado.

La idea clave reside en ser capaz de llevar las asas de un cierto índice a un índice más alto, de manera que, operando por los dos lados del cobordismo, seamos capaces de concentrarlas en únicamente dos índices consecutivos, lo que se conoce como la forma normal (teorema 4.3.5). Entonces, la hipótesis de que $H_*(W, M_0) = 0$, junto con un argumento de álgebra lineal nos permitirá concluir que el cobordismo es trivial. La dificultad de la prueba, de este modo, reside precisamente en ser capaces de cambiar asas de índice bajo por otras de índice más alto, lo que se conoce como *handle trading*.

Para ello, el teorema que vendrá en nuestra ayuda es el que hemos tenido a bien llamar teorema del desentrelazamiento (teorema 4.2.4) que esencialmente afirma que dos asas cuyos núcleos se intersecan en un único punto pueden cancelarse entre sí. Ahora bien, lo que nos ocurrirá es que, las asas que consideraremos tendrán *intersección algebraica* igual a uno. En consecuencia, lo que ocurre es que los restantes puntos de intersección se están cancelando algebraicamente unos con otros, de manera que para la homología resultan invisibles.

Para solventar este problema, deberemos realizar una modificación al cobordismo que nos permita cancelar, topológicamente, estos puntos que se cancelaban algebraicamente. Aquí, la herramienta básica será lo que se conoce como el *truco de Whitney* (teorema 4.4.1). La idea es muy sencilla. Dados dos puntos que se cancelan algebraicamente entre sí, podemos construir dos caminos de manera que el lazo que forman sea contráctil. La contracción, entonces, nos crea un disco 2-dimensional inmerso en la variedad, separando los dos puntos críticos. Si este disco estuviese, además, embebido, entonces estos puntos de intersección pueden cancelarse ‘empujando una subvariedad sobre la otra a través del disco’, lo que se conoce como *finger move*, y así, la cancelación sería efectiva. No obstante, en general esto no será así y deberemos aproximar este disco inmerso por uno embebido. La herramienta básica para realizar este regate es el conocido como teorema débil del embebimiento de Whitney (teorema 4.4.9), que nos permite embeber variedades inmersas de dimensión n en variedades de dimensión mayor que $2n + 1$. En particular, como la variedad que queremos embeber es un disco 2-dimensional, necesitaremos que nuestra frontera tenga dimensión mayor o igual a $2 \cdot 2 + 1 = 5$ o, equivalentemente, que el cobordismo tenga dimensión mayor o igual a 6.

Es precisamente aquí donde la hipótesis de dimensión se hace imperativa y el punto en el que los intentos de generalizar este teorema a dimensiones bajas fracasan. En dimensiones altas existe ‘espacio suficiente’ como para permitir mover los discos inmersos de forma que se embeban, lo cual es imposible en dimensiones bajas. Esta cuestión, lejos de una molestia técnica, impregna todos los rincones de la topología de bajas dimensiones y convierte a las variedades de dimensión 4 en un lugar inhóspito en el que, actualmente, se realiza una fuerte investigación (véase, por ejemplo, [4]).

Como corolario a toda esta demostración, el lector percibirá que, si bien la hipótesis de dimensión resulta insalvable, en las hipótesis de h -cobordismo aún queda mucho por relajar. Tal es así que, con no mucho más trabajo, es posible extender los lemas clave para adaptarlos al caso de cobordismos no

simplemente conexos, formulándolos sobre su recubrimiento universal, que sí lo es. En consecuencia, es posible probar que, bajo hipótesis más débiles, la categoría de las variedades diferenciales identificadas bajo cobordismo es equivalente a un grupo que únicamente depende del grupo fundamental de la base, conocido como el grupo de torsión de Whitehead. Este resultado se conoce como el teorema del s-cobordismo. Lamentablemente, por falta de espacio no será tratado en esta memoria, si bien puede consultarse, por ejemplo, en [11].

En consecuencia, el teorema del h-cobordismo es uno de los teoremas fundamentales en topología diferencial, que no sólo nos permite derivar profundas consecuencias, sino que su demostración misma es un ejercicio de inquisitio minucioso en las sutilezas de la topología. Más aún, su prueba nos permite entender, de forma absolutamente clara, por qué 4 es la dimensión clave en la que la topología sufre un drástico cambio.

1.2. Definiciones y notaciones básicas

Dado un espacio topológico X , y un subespacio $A \subset X$, denotaremos con $\pi_n(X, A)$ el n -ésimo grupo de homotopía de X relativo a A , i.e. el conjunto de aplicaciones $f : \bar{B}^n \rightarrow X$ tal que $f(S^{n-1}) \subset A$, módulo homotopía. Si X es conexo por caminos, abreviaremos $\pi_n(X, \star)$ por $\pi_n(X)$ y lo llamaremos el n -ésimo grupo de homotopía. Recuérdese, asimismo, que un espacio simplemente conexo es espacio conexo por caminos con primer grupo de homotopía trivial.

En todo momento, H_n y H^n denotarán, respectivamente, homologías y cohomologías que satisfagan los axiomas de Eilenberg-Steenrod. Para fijar ideas, puede pensarse que H_n es la homología singular y H^n su correspondiente cohomología singular, o la cohomología de de Rham. Salvo que se indique lo contrario, supondremos que la (co)homología tiene coeficientes en \mathbb{Z} (i.e. $H_0(\star) = H^0(\star) = \mathbb{Z}$) y, en caso de ser necesario considerarlos en otro grupo abeliano G , lo denotaremos por $H_n(X; G)$ (respectivamente $H^n(X; G)$). De igual forma, denotaremos por $H_*(X)$ (respectivamente $H^*(X)$) al complejo graduado de (co)homología de un espacio, i.e., $H_*(X) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n(X)$.

A lo largo de este trabajo, por una variedad diferenciable entenderemos una variedad topológica (que consideraremos Hausdorff y con base numerable), junto con una elección de un atlas maximal C^∞ . Si M y N son difeomorfos lo denotaremos por $M \cong N$. Salvo mención explícita, todas las variedades consideradas serán conexas y compactas. Además, por una subvariedad entenderemos, en todo momento, una subvariedad embebida.

El concepto más recurrente a lo largo de este trabajo es, sin lugar a dudas, el de cobordismo.

Definición 1.2.1. Sean M_0 y M_1 variedades diferenciables cerradas (i.e. compactas y sin frontera) y conexas. Si existe una variedad diferenciable conexa, W , tal que su frontera tiene dos componentes, $\partial W = W_0 \sqcup W_1$, y tal que existen embebimientos $\phi_0 : M_0 \rightarrow W$ y $\phi_1 : M_1 \rightarrow W$ que hacen $W_0 = \phi_0(M_0)$ y $W_1 = \phi_1(M_1)$, diremos que $(W, M_0, M_1, \phi_0, \phi_1)$ es un **cobordismo** entre M_0 y M_1 .

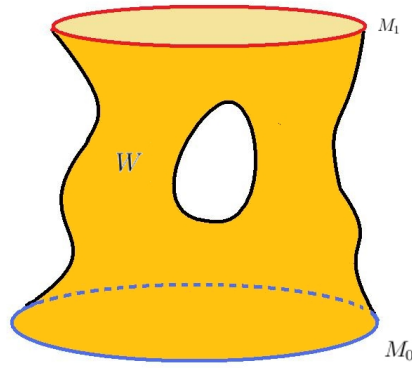


FIGURA 1.1: Cobordismo entre dos variedades

Y, por supuesto, una vez que hemos definidos los objetos, hay que decidir cuáles son los morfismos permitidos entre ellos.

Definición 1.2.2. Sean $(W, M_0, M_1, \phi_0, \phi_1)$ y $(W', M'_0, M'_1, \phi'_0, \phi'_1)$ dos cobordismos. Un **morfismo de cobordismos** es una aplicación diferenciable $\varphi : W \rightarrow W'$ que envía M_0 a M'_0 y M_1 a M'_1 , esto es, tal que los siguientes diagramas conmutan



Si φ es un difeomorfismo, diremos que los cobordismos son difeomorfos.

Definición 1.2.3. Dado un difeomorfismo $(W, M_0, M_1, \phi_0, \phi_1)$, si M_0, M_1 y W están orientadas de tal manera que, con la orientación inducida por W sobre su frontera, $\phi_1 : M_0 \rightarrow W_0$ preserva la orientación y $\phi_0 : M_1 \rightarrow W_1$ la invierte, entonces diremos que es un **cobordismo orientado** y lo denotaremos como $\partial W = M_0 \sqcup \overline{M_1}$.

Observación 1.2.4. Aunque, en sentido estricto, deberíamos considerar siempre las aplicaciones ϕ_0 y ϕ_1 , por simplicidad, confundiremos M_0 y M_1 con sus imágenes en W sin mayor mención. En ese caso, denotaremos el cobordismo simplemente por (W, M_0, M_1) . De igual forma, para aliviar la notación, en algunos casos confundiremos el cobordismo (W, M_0, M_1) con W .

Otra noción que nos será de gran utilidad es la de composición de cobordismos

Definición 1.2.5. Sean $(W, M_0, M_1, \phi_0, \phi_1)$ y $(W', M'_0, M'_1, \phi'_0, \phi'_1)$ dos cobordismos tales que M_1 y M'_0 son difeomorfos. Entonces el **cobordismo composición**, denotado por $W' \circ W$, es el cobordismo $(W \cup_{\phi'_0 \circ \phi_1^{-1}} W', M_0, M'_1)$, resultado de pegar W y W' por su frontera común.

Observación 1.2.6. Esta definición requiere alguna aclaración. En primer lugar, para comprobar la definición precisa de pegado de variedades, véase la definición 3.1.2. Además, no es del todo claro que $W \cup_{\phi'_0 \circ \phi_1^{-1}} W'$ pueda dotarse de una estructura diferenciable compatible con ϕ_0 y ϕ'_1 . Para convencerse

definitivamente, basta utilizar el corolario 2.2.10 para comprender la estructura del cobordismo cerca de M_1 .

Definición 1.2.7. Un cobordismo (W, M_0, M_1) se dice **trivial** si es difeomorfo al cobordismo producto $(M_0 \times [0, 1], M_0, M_1)$. En particular, en un cobordismo trivial, $M_0 \cong M_1$.

1.3. Teorema del h-cobordismo

Una de las preguntas más inmediatas que nos viene a la mente tras comprender la definición de cobordismo es, dado un cobordismo (W, M_0, M_1) , en qué casos podemos asegurar que W es trivial. La respuesta, sin embargo, dista mucho de ser elemental.

Definición 1.3.1. Un cobordismo (W, M_0, M_1) se dice que es un **h-cobordismo** si M_0 y M_1 son simplemente conexos y M_0 y M_1 son retracts de deformación débil de W .

En vistas a comprobar que un cierto cobordismo sea un h-cobordismo, resulta de gran utilidad el siguiente criterio.

Proposición 1.3.2. *Un cobordismo (W, M_0, M_1) es un h-cobordismo si y sólo si W , M_0 y M_1 son simplemente conexos y $H_*(W, M_0) = 0$.*

Demostración. En primer lugar, observemos que, por aplicación sucesiva del teorema de Hurewicz, en su versión para pares topológicos punteados, usando el par (W, M_0) se tiene que $\pi_n(W, M_0) = 0$ para todo n .

Sean, ahora, \widehat{W} y \widehat{M}_0 CW-complejos homotópicamente equivalentes a W y M_0 respectivamente, y $\widehat{i} : \widehat{M}_0 \rightarrow \widehat{W}$ el morfismo de CW complejos homótopo a la inclusión natural $i : M_0 \hookrightarrow W$. Por la sucesión exacta larga en homotopía generada por las inclusiones $(\widehat{M}_0, \star) \hookrightarrow (\widehat{W}, \star) \hookrightarrow (\widehat{W}, \widehat{M}_0)$, se tiene, para $n \geq 2$

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(\widehat{W}, \widehat{M}_0) \rightarrow \pi_n(\widehat{M}_0) \xrightarrow{\widehat{i}_*} \pi_n(\widehat{W}) \rightarrow \pi_n(\widehat{W}) \rightarrow \pi_{n-1}(\widehat{W}, \widehat{M}_0) \rightarrow \cdots$$

Así, como $\pi_n(\widehat{W}, \widehat{M}_0) = 0$ para todo n se tiene que $\widehat{i}_* : \pi_n(\widehat{M}_0) \rightarrow \pi_n(\widehat{W})$ es un isomorfismo para $n \geq 2$. Asimismo, sobre el grupo fundamental también es un isomorfismo, puesto que ambas variedades son simplemente conexas por hipótesis. De este modo, por el teorema de Whitehead (véase [3]) se tiene que \widehat{i} es una equivalencia homotópica y, por tanto, lo es $i : M_0 \hookrightarrow W$, como queríamos demostrar.

Respecto a M_1 por la dualidad de Lefschetz-Poincaré (véase Apéndice A), se tiene que, $H_n(W, M_0) \cong H_n(W, M_1)$. En consecuencia, $H_*(W, M_1) = 0$ y basta aplicar el mismo razonamiento a M_1 que para M_0 .

Para la implicación contraria, notemos que las inclusiones $M_0 \xrightarrow{i} W \xrightarrow{j} (W, M_0)$ inducen una sucesión exacta larga

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(M_0) \xrightarrow{i_*} H_n(W) \xrightarrow{j_*} H_n(W, M_0) \xrightarrow{\partial} H_{n+1}(M_0) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Ahora bien, si $r : W \rightarrow M_0$ es el retracto de deformación, se tiene que $r_* \circ i_* = id_{M_0}$ y $i_* \circ r_* = id_W$, luego i_* es un isomorfismo y, por tanto $H_n(W, M_0) = 0$ para todo $n \geq 0$. ■

Observación 1.3.3. Nótese que, gracias a la dualidad de Lefschetz-Poincaré, las hipótesis algebraicas pueden evaluarse únicamente en uno de los extremos del cobordismo.

En el caso de h-cobordismos, junto con una hipótesis adicional sobre la dimensión, el problema de decidir si un cobordismo es trivial está completamente resuelto.

Teorema 1.3.4. (Del h-cobordismo.) *Todo h-cobordismo (W, M_0, M_1) cumpliendo $\dim M_0 \geq 5$ es trivial.*

Corolario 1.3.5. *Si M, N son variedades diferenciables cerradas y simplemente conexas con $\dim M \geq 5$, entonces M y N son difeomorfas si y solo si son h-cobordantes.*

Observación 1.3.6. La hipótesis de dimensión, tal y como veremos más adelante, resulta crucial en la prueba a la hora de simplificar el cobordismo anulando sus asas en dimensiones bajas así como para lograr una descomposición conocida como forma normal.

Sea $n = \dim M_0$. Para $n = 0, 1$ el teorema es trivialmente cierto por los teoremas de clasificación de curvas y superficies. En dimensión $n = 2$ el resultado también es cierto, al ser equivalente a la hipótesis de Poincaré para S^3 , que fue demostrada por Perelman usando flujos de Ricci. Para $n = 3$ es desconocido y equivalente a la existencia de 4-esferas exóticas, mientras que para $n = 4$ es cierto topológicamente (i.e., con todas las aplicaciones continuas y no necesariamente diferenciables), pero falso diferenciablemente.

El objetivo de los siguientes capítulos de este trabajo es proveer las herramientas y técnicas necesarias para abordar la demostración de este resultado, que se culminará en la sección 4.3. La metodología seguida para alcanzar la demostración de este teorema sigue los pasos que Smale dio en la primera demostración del resultado, si bien utilizando algunos conceptos modernos de carácter algebraico.

1.3.1. Consecuencias

Más allá del interés que de por sí despierta comprender los h-cobordismos, uno de los mejores argumentos a favor de la relevancia de este teorema es la profundidad de las consecuencias que de él se derivan.

La primera de estas aplicaciones es que, gracias al teorema del h-cobordismo, podemos caracterizar perfectamente los discos de dimensiones superiores únicamente en términos topológicos y algebraicos.

Teorema 1.3.7. (Caracterización del disco.) *Sea M una variedad diferenciable compacta y simplemente conexa con frontera simplemente conexa. Sea $m = \dim M$ y supongamos $m \geq 6$, entonces son equivalentes*

- M es difeomorfa al disco \bar{B}^m .
- M es homeomorfa al disco \bar{B}^m .
- M es contractible.
- $H_0(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$ para $n > 0$.

Demostración. Las primeras implicaciones son triviales, por lo que únicamente falta probar que si M tiene la homología de un punto, entonces es difeomorfo a un disco.

Sea \bar{B}^m un m -disco embebido en $\text{Int } M$ mediante una $\phi : \bar{B}^m \hookrightarrow \text{Int } M$ con interior B^m y frontera S^{m-1} . Entonces, por la propiedad de escisión

$$H_*(M - B^m, S^{m-1}) = H_*(M - B^m, \bar{B}^m - B^m) \cong H_*(M, \bar{B}^m)$$

Ahora bien si $x_0 \in \bar{B}^m$, usando el par (M, \bar{B}^m) se tiene la sucesión exacta

$$H_n(\bar{B}^m) \rightarrow H_n(M) \rightarrow H_n(M, \bar{B}^m) \rightarrow H_{n-1}(\bar{B}^m)$$

En consecuencia, $H_n(M, \bar{B}^m) = 0$ para $n \geq 0$.

Más aún, $M - \bar{B}^m$ es simplemente conexo. Para comprobarlo, en primer lugar observemos que $M - \bar{B}^m$ es homotópicamente equivalente a $M - \{p\}$ para un $p \in \bar{B}^m$. Ahora bien, si, sobre M , escogemos una pequeña bola alrededor del punto p , llamémosla U , y hacemos $V = M - \{p\}$, entonces ambos abiertos son conexos por caminos y $U \cap V \cong B^m - \{0\}$, que es simplemente conexo para $m \geq 3$. De este modo, por el teorema de Seifert-Van Kampen se tiene

$$\{0\} = \pi_1(M) \cong \pi_1(U) \star \pi_1(V) \cong \{0\} \star \pi_1(M - \{p\}) \cong \pi_1(M - \{p\})$$

Por tanto, por el teorema del h-cobordismo, se tiene que el cobordismo $(M - B^m, \partial M, S^{m-1})$ es trivial, luego existe un difeomorfismo $\varphi : S^{m-1} \times [0, 1] \rightarrow M - B^m$ tal que $\varphi(S^{m-1} \times \{1\}) = \partial M$ y $\varphi(S^{m-1} \times \{0\}) = S^{m-1}$.

Para construir un homeomorfismo al disco, supongamos que \bar{B}^m tiene radio 1, sea $2\bar{B}^m$ el disco de radio 2, de manera que $\bar{B}^m \subset 2\bar{B}^m$. Entonces el homeomorfismo buscado es la aplicación

$$\psi : 2\bar{B}^m \longrightarrow M$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \phi(x) & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\| - 1\right) & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

Finalmente, para concluir que M es difeomorfo al disco, basta observar que la estructura diferencial inducida en M mediante ψ hace a las inclusiones $\bar{B}^m \hookrightarrow$ y $M - B^m \hookrightarrow M$ embebimientos y apelar a la unicidad de tales estructuras (véase Proposición 3.1.3). ■

Sin embargo, a pesar de la importancia del resultado previo, la mejor muestra de que el teorema del h-cobordismo es un teorema realmente profundo sobre la estructura de las variedades es su capacidad para resolver, sin mucho esfuerzo, la conjetura de Poincaré en dimensiones altas.

Definición 1.3.8. Si M es una variedad compacta y conexa tal que $H_*(M) = H_*(S^m)$ para algún $m > 0$, diremos que M es una **m-esfera homológica**.

Teorema 1.3.9. (Conjetura de Poincaré generalizada.) Toda m -esfera homológica, para $m \geq 6$ es homeomorfa a una esfera.

Demostración. Sea M nuestra variedad candidata a esfera y consideremos B^m una m -bola embebida en M vía cierta $\varphi : \bar{B}^m \hookrightarrow M$. Entonces $(M - B^m, S^{m-1}, \emptyset)$ es un cobordismo y, por tanto, por la dualidad de Lefschetz-Poincaré y la propiedad de escisión tenemos

$$H_n(M - B^m) = H_n(M - B^m, \emptyset) \cong H_{m-n}(M - B^m, S^{m-1}) \cong H_{m-n}(M, \bar{B}^m)$$

Ahora bien, la sucesión exacta en homología inducida por el par (M, \bar{B}^m) dice

$$H_i(\bar{B}^m) \rightarrow H_i(M) \rightarrow H_i(M, \bar{B}^m) \rightarrow H_{i-1}(\bar{B}^m)$$

Así, para $i > 0$ se tiene $H_i(\bar{B}^m) = 0$ y, por tanto,

$$H_i(M, \bar{B}^m) \cong H_i(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = m \\ 0 & \text{si } 0 < i < m \end{cases}$$

En $i = 0$ la sucesión colapsa a $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_0(M, \bar{B}^m) \rightarrow 0$ y, por tanto, $H_0(M, \bar{B}^m) = 0$.

En consecuencia, $M - B^m$ tiene la homología de un punto, luego, por el teorema 1.3.7 existe un difeomorfismo $\psi : M - B^m \rightarrow \bar{B}^m$. Pero, entonces, ya tenemos totalmente identificada la topología de M pues $M \cong \bar{B}^m \cup_{\psi \circ \varphi} \bar{B}^m$ que, como veremos a continuación, es homeomorfa a S^m . ■

Definición 1.3.10. Dado un difeomorfismo $\varphi : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$, la variedad $\bar{B}^m \cup_{\varphi} \bar{B}^m$ se denomina una **m-esfera twistada**.

Proposición 1.3.11. Toda m -esfera twistada es homeomorfa a S^m .

Demostración. Denotemos nuestra esfera twistada por $D_1^m \cup_{\varphi} D_2^m$. Consideremos el embebimiento estándar $\bar{B}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ y sea $e_{m+1} = (0, 0, \dots, 1)$ el último elemento de la base canónica de \mathbb{R}^{m+1} . Definimos, así, la función continua $\psi : D_1^m \cup_{\varphi} D_2^m \rightarrow S^m$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi \|x\|}{2} x & - \cos \frac{\pi \|x\|}{2} e_{m+1} & \text{si } x \in D_1 \\ \sin \frac{\pi \|x\|}{2} \varphi(x) & + \cos \frac{\pi \|x\|}{2} e_{m+1} & \text{si } x \in D_2 \end{cases}$$

Se tiene que ψ es una función continua e inyectiva, mapeando un espacio compacto en un Hausdorff y, por tanto, es un homeomorfismo. ■

Observación 1.3.12. La hipótesis de que M sea una esfera homológica es, en general, insuficiente. A pesar de que, históricamente, la conjetura fue planteada en estos términos, poco más tarde, Poincaré mismo exhibió un contraejemplo a este enunciado en dimensión 3, hallando una 3-esfera homológica con grupo fundamental el grupo icosaédrico binario. Por este motivo, en el enunciado del teorema para dimensiones bajas se sustituye esta hipótesis por otra estrictamente más fuerte, a saber, que M y S^m sean homotópicamente equivalentes.

Más aún, gracias al trabajo de Kervaire y Milnor, podemos mejorar un poco más las conclusiones.

Teorema 1.3.13. *Toda m -esfera homológica, para $m = 5, 6$ es difeomorfa a una esfera.*

Demostración. Por el teorema de Kervaire-Milnor [6] existe una variedad diferenciable, compacta, simplemente conexa y contractible, W , tal que $M = \partial W$. En consecuencia, por el teorema 1.3.7 se tiene que W es difeomorfo a \bar{B}^{m+1} y, por tanto, $M = \partial W \cong \partial \bar{B}^{m+1} = S^m$. ■

Observación 1.3.14. La unicidad salvo homeomorfismo o difeomorfismo está crucialmente relacionada con la dimensión de la esfera considerada. En efecto, Milnor demostró en [9] que existen 7-esferas exóticas, esto es, variedades diferenciables homeomorfas a la 7-esfera, pero no difeomorfas a ella. Respecto a $m = 4$, el problema no está resuelto y se conoce como la conjetura de Poincaré diferenciable. De este modo, una de las lecturas del teorema 1.3.13 es la inexistencia de 5-esferas o 6-esferas exóticas.

Observación 1.3.15. Al igual que la conjetura de Poincaré diferenciable, tampoco es cierto que las esferas twisteadas sean difeomorfas a la esfera usual en cualquier dimensión. En efecto, Smale demostró que todas las esferas exóticas son difeomorfas a una esfera twisteadas.

Capítulo 2

Teoría Morse

La teoría Morse es una de las técnicas analítico-geométricas más potentes de la topología diferencial. No solo resulta la técnica principal empleada en la prueba del teorema que nos ocupa, sino que también es una herramienta fundamental para la construcción de ejemplos de variedades exóticas [9], la demostración del teorema de periodicidad de Bott [1] o la formulación supersimétrica de Witten [18]. Su esencia radica en que nos permite dar una descomposición de la variedad estudiada en términos topológicos únicamente a partir de información analítica.

2.1. Funciones Morse

Definición 2.1.1. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en una variedad diferenciable M . Diremos que $p \in M$ es un **punto crítico** de f si $df_p = 0$. Dado $p \in M$ un punto crítico de f , definimos **Hessiana de f en p** como la aplicación bilineal simétrica $Hf_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Hf_p(v_p, w_p) = w_p(\tilde{v}(f))$, donde \tilde{v} es un campo vectorial que extiende a v en un entorno de p .

Si la Hessiana Hf_p es no degenerada (i.e. la aplicación lineal $T_pM \rightarrow T_p^*M$ que hace $v \mapsto Hf_p(v, \cdot)$ es un isomorfismo), diremos que p es un punto crítico **no degenerado** de f . A la dimensión del máximo subespacio vectorial de T_pM en el que Hf_p es definida negativa se le denomina el **índice** de f en p y se denota por $\text{Index}(p)$.

Observación 2.1.2. Obsérvese que Hf_p es simétrica para p un punto crítico pues $Hf_p(v, w) - Hf_p(w, v) = w_p(\tilde{v}(f)) - v_p(\tilde{w}(f)) = [\tilde{w}, \tilde{v}]_p f = 0$.

Proposición 2.1.3. Si $p \in M$ es un punto crítico de f , la matriz de Hf_p en la base $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_p$ es $\left(\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right|_p \right)_{i,j=1}^n$.

Demostración. Es una simple comprobación. Se tiene

$$Hf_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_p$$

■

Observación 2.1.4. A la luz de la proposición anterior, se tiene que Hf_p no depende de la elección de \tilde{v} escogida. Además, se tiene que p es un punto crítico no degenerado de f si y solo si $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_p \right)_{i,j=1}^n \neq 0$.

La propiedad analítica fundamental de estas funciones es que, localmente, pueden expresarse como una forma cuadrática.

Lema 2.1.5. (de Morse). *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable con $p \in M$ un punto crítico no degenerado. Entonces existe una carta (U, φ) con $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ tal que*

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2$$

donde λ es el índice de f en p .

Demostración. En primer lugar, observemos que, tomando una carta adecuada (V, ψ) alrededor de p tal que $\psi(p) = 0$, podemos reducirnos al caso $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω un entorno convexo de 0 . Más aún, vía una traslación, podemos suponer que $f(0) = 0$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) dt dt \end{aligned}$$

En consecuencia, $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}$ para ciertas funciones $h_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Más aún, sustituyendo h_{ij} por $H_{ij} = 1/2(h_{ij} + h_{ji})$, podemos suponer que $(H_{ij})_{i,j=1}^n$ es simétrica. Restrinjamos Ω para garantizar que $(H_{ij})_{i,j=1}^n$ sea invertible (obsérvese que esto puede hacerse porque $(H_{ij}(0))_{i,j=1}^n = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 \right)_{i,j=1}^n$ es invertible y basta apelar a continuidad).

Nuestro objetivo es 'diagonalizar' $(H_{ij})_{i,j=1}^n$, para lo cual procederemos por inducción. Supongamos, así, que en ciertas coordenadas (ψ, Ω) , f es de la forma

$$f \circ \psi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^{r-1} \pm (u_i)^2 + \sum_{i,j \geq r} H_{ij}(u_1, \dots, u_n) u_i u_j$$

Entonces, quizá precomponiendo con un cambio lineal de coordenadas, podemos suponer que la matriz $(H_{ij}(0))_{i,j \geq r}^n$ es diagonal. En particular, se tiene que $H_{rr}(0) \neq 0$ y, por tanto, en un entorno de Ω (que

seguiremos denotando igual) puede definirse la aplicación $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \left(u_1, \dots, u_{r-1}, |H_{rr}|^{1/2} \left(u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir}}{H_{rr}} \right), u_{r+1}, \dots, u_n \right)$$

Simplemente derivando se observa que φ es un difeomorfismo local y, en consecuencia, es un cambio de coordenadas en un subentorno de Ω . Ahora bien, un calculo inmediato muestra que

$$f \circ \psi \circ \varphi^{-1}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^r \pm (u_i)^2 + \sum_{i,j>r} \tilde{H}_{ij}(u_1, \dots, u_n) u_i u_j$$

para cierta matriz \tilde{H} simétrica. A partir de este punto, la prueba completa se sigue por inducción sobre r . ■

Definición 2.1.6. Sea M una variedad diferenciable, posiblemente con frontera. Una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una **función Morse** si todos sus puntos críticos son interiores (i.e. pertenecen a $M - \partial M$) y no degenerados.

Observación 2.1.7. Gracias al lema de Morse, tenemos que los puntos críticos no degenerados son aislados. En particular, esto quiere decir que, si M es compacta, entonces tiene una cantidad finita de puntos críticos.

En caso de un cobordismo hay que afinar un poco la definición.

Definición 2.1.8. Sea (W, M_0, M_1) un cobordismo. Diremos que una función diferenciable $f : W \rightarrow [0, 1]$ es una **función Morse de cobordismo** si f es de Morse sobre W , $M_0 = f^{-1}(0)$ y $M_1 = f^{-1}(1)$.

2.2. Topología vía Morse

Las funciones Morse resultan de gran utilidad para estudiar la topología de una variedad diferenciable. En efecto, dada una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una variedad sin frontera, se tiene que, entre dos puntos críticos de f , la variedad no experimenta cambios en su topología pero, al alcanzarse un punto crítico de índice λ , se produce una alteración topológica que depende de λ . En esta sección, trataremos de dar precisión a estas afirmaciones.

Definición 2.2.1. Sea M una variedad diferenciable y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función Morse. Un punto $a \in \mathbb{R}$ se dice **valor crítico** de f si $a = f(p)$ para algún punto crítico $p \in M$.

Denotemos por comodidad $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$ para $a \in \text{Im}(f)$. Obsérvese que, por el teorema de la función inversa, si a no es valor crítico de f , entonces M^a es una variedad diferenciable con frontera.

El resultado principal de esta sección, que demostraremos en la última parte, es

Teorema 2.2.2. (De estabilidad topológica.) Sea $f : M \rightarrow [0, 1]$ una función Morse sobreyectiva y sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, de forma que $f^{-1}[a, b]$ no contiene ningún punto crítico de f . Entonces $f^{-1}[a, b]$ es difeomorfo a $f^{-1}(a) \times [a, b]$ de manera que, si $\varphi : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow f^{-1}[a, b]$ es el difeomorfismo, entonces $f \circ \varphi = \pi_2$, la proyección sobre la segunda componente. Más aún, si $0 < a < b < 1$, entonces M^a es difeomorfo a M^b y M^a es un retracto de deformación de M^b .

Observación 2.2.3. En particular, se tiene que $f^{-1}(a)$ es difeomorfo a $f^{-1}(b)$.

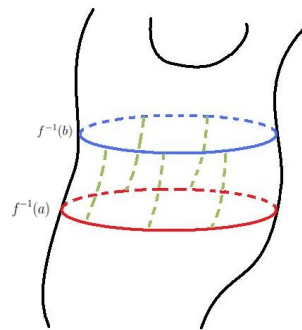


FIGURA 2.1: Visualización del teorema de estabilidad topológica

Incluso, y esto es lo más interesante, la teoría Morse nos permite controlar el cambio en la topología y, para muestra, el siguiente resultado.

Teorema 2.2.4. Sea a un valor crítico de f . Supongamos que, para algún $\epsilon > 0$, $f^{-1}([a - \epsilon, a + \epsilon])$ es compacto y contiene un único punto crítico de índice λ . Entonces $M^{a+\epsilon}$ es homotópicamente equivalente a $M^{a-\epsilon} \cup_{\varphi} \bar{B}^{\lambda}$ para algún embebimiento $\varphi : S^{\lambda-1} \hookrightarrow f^{-1}(a)$.

En esta sección no probaremos este teorema, pues en el capítulo 3 trataremos en profundidad un técnica conocida como cirugía y probaremos un teorema más general, véase el teorema 3.3.3.

2.2.1. Demostración del teorema de estabilidad topológica

Antes de abordar la prueba del teorema 2.2.2 necesitamos unas herramientas muy útiles en geometría diferencial conocidas como funciones meseta y particiones de la unidad, que nos permiten reducir cálculos globales a aspectos locales.

Lema 2.2.5. (Existencia de funciones meseta.) Sea M una variedad diferenciable y sean C un compacto y U un abierto con $C \subset U$. Entonces, existe $\varphi : M \rightarrow U$ diferenciable tal que $\text{supp}(\varphi) \subset U$ y $\varphi \equiv 1$ en C . A esta φ se la conoce como una **función meseta para C y U** .

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ es fácil construir una $g_{\epsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente positiva en $(-\epsilon, \epsilon)^n$ y 0 en otra parte.

Ahora, dado $p \in C$, existe una carta (ψ, V) alrededor de p tal que $\bar{V} \subset U$ (su existencia queda garantizada porque M es T_3) y $\psi(p) = 0$. Así, existe $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon, \epsilon)^n \subset V$ y, por tanto, podemos definir $\phi_p = g_{\epsilon} \circ \psi^{-1}$ y extenderla por 0.

Por compacidad, tenemos que una cantidad finita ϕ_1, \dots, ϕ_k cumplen $\sum_{i=1}^k \phi_i > 0$ en C y son 0 fuera de un cerrado contenido en U . Sea $m > 0$ el mínimo de $\sum_{i=1}^k \phi_i$ en C . Entonces, si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente con $h(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $h(x) = 1$ para $x \geq 1$, la función $\varphi = h \circ (\frac{1}{m} \sum_{i=1}^k \phi_i)$ es la función deseada. ■

Observación 2.2.6. En particular, la existencia de funciones meseta prueba que las variedades diferenciales compactas son completamente normales, esto es, dados $A, B \subset M$ tales que $\bar{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \bar{B} = \emptyset$ existe $f : M \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Corolario 2.2.7. (Existencia de particiones de la unidad.) Sea M una variedad diferenciable. Entonces, para todo recubrimiento por abiertos \mathcal{O} de M existe una familia de funciones diferenciables $\{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{O}} : M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

- $\text{supp}(\varphi_U) \subset U$.
- $\sum_{U \in \mathcal{O}} \varphi_U = 1$ y la suma es finita en cada punto.

Esta familia de aplicaciones es conocida como una **partición de la unidad subordinada a \mathcal{O}** .

Esquema de la demostración. La prueba completa puede encontrarse en [14]. Utilizando la paracompatibilidad de M y la propiedad de Lindelöf, podemos suponer que \mathcal{O} es localmente finito, numerable y que cada abierto tiene cierre compacto. Sea ahora un recubrimiento \mathcal{Q} tal que para cada $V \in \mathcal{Q}$ existe un único $U \in \mathcal{O}$ tal que $\bar{V} \subset U$.

Las particiones de la unidad se construyen tomando funciones meseta $\{\psi_V\}_{V \in \mathcal{Q}}$ de manera que $\sum_{V \in \mathcal{Q}} \psi_V$ tiene una cantidad finita de sumandos en cada punto y basta definir $\varphi_U = \sum_{V \subset U} \psi_V / \sum_{V \in \mathcal{Q}} \psi_V$. ■

Y ya tenemos todo lo necesario para probar el resultado principal de esta sección.

Demostración de 2.2.2. La idea clave de la prueba es modificar las curvas integrales de ∇f en $f^{-1}[a, b]$ de forma que el flujo engendrado, θ , se comporte de forma similar al flujo de la función altura, es decir, que cumpla $(f \circ \theta)(p, t) = f(p) + t$ para p y t apropiados. Gracias a esta propiedad, podremos deducir los resultados sin mucho esfuerzo.

Elijamos una métrica riemanniana g para M y definamos ∇f como el único campo vectorial tal que $g(\nabla f, X) = df(X)$ para todo campo vectorial X . Definimos, ahora, el campo vectorial en $f^{-1}[a, b]$ dado por $X = \frac{1}{\|\nabla f\|^2} \nabla f$.

Sea θ el flujo asociado a X , i.e., una aplicación $\theta : U \subset f^{-1}[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow f^{-1}[a, b]$ cumpliendo $\frac{d}{dt} \theta(p, t) = X_{\theta(p, t)}$. Dado $p \in f^{-1}[a, b]$, sea I_p el intervalo de existencia de $\theta_p = \theta(p, \cdot)$, la curva integral de θ que

pasa por p . Entonces, por definición, si $t \in I_p$ se tiene

$$\frac{d}{dt}(f \circ \theta_p(t)) = df(X) = g(\nabla f, X) = g\left(\nabla f, \frac{1}{\|\nabla f\|^2} \nabla f\right) = 1$$

De este modo, $(f \circ \theta)(p, t) = f(p) + t$ para $p \in f^{-1}[a, b]$ y $t \in I_p$. En particular, se tiene que $I_p = [a - f(p), b - f(p)]$, pues, en un compacto, las curvas integrales son prolongables hasta la frontera. En consecuencia, para $p \in f^{-1}(a)$ y $t \in I_p = [0, b - a]$ se cumple $a \leq (f \circ \theta)(p, t) \leq b$ y, por tanto, $\theta : f^{-1}(a) \times [0, b - a] \rightarrow f^{-1}[a, b]$ es un difeomorfismo local invertible. Así, trasladando, $\varphi(p, t) = \theta(p, a + t)$ es el difeomorfismo buscado.

Para la segunda parte del teorema, supongamos que $0 < a < b < 1$ y extendamos X a un campo vectorial en todo M . Para ello, sea $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función meseta tal que $\phi \equiv 1$ en $f^{-1}[a, b]$ y $\phi \equiv 0$ fuera de algún entorno U de $f^{-1}([a, b])$ de cierre compacto que no contiene puntos críticos ni corta a la frontera. Entonces, $\widehat{X} = \phi \cdot \frac{1}{\|\nabla f\|^2} \nabla f$ es un campo vectorial bien definido en toda la variedad que extiende a X .

Sea $\widehat{\theta}$ su flujo asociado. Como M es compacta y $\widehat{X}_p = 0$ para todo $p \in \partial M$, entonces $\widehat{\theta} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ es un flujo global. Más aún, cumple

$$\frac{d}{dt}(f \circ \theta_p(t)) = g\left(\nabla f, \phi \cdot \frac{1}{\|\nabla f\|^2} \nabla f\right) = \phi \leq 1$$

luego $(f \circ \theta)(p, t) \leq f(p) + t$. En consecuencia $\widehat{\theta}(\cdot, b - a) : M^a \rightarrow M^b$ tiene por inversa $\widehat{\theta}(\cdot, a - b) : M^b \rightarrow M^a$ y, por ende, es un difeomorfismo entre M^a y M^b . Para la retracción, basta construir

$$\begin{aligned} r : [0, 1] \times M^b &\longrightarrow M^b \\ (t, p) &\longmapsto \theta\left(p, (a - b)t \cdot h\left(\frac{f(p) - a}{b - a}\right)\right) \end{aligned}$$

donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente, diferenciable y con $h(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $h(x) = 1$ para $x \geq 1$. ■

2.2.2. Aplicaciones del teorema de estabilidad topológica

En esta sección haremos uso del teorema de estabilidad topológica 2.2.2 para probar algunos resultados sobre la estructura de las variedades diferenciales. De este modo, requeriremos que, dada una variedad diferenciable, pueda definirse una función de Morse sobre ella. Este es, precisamente, el contenido los siguientes teoremas, cuyas demostraciones pueden encontrarse, por ejemplo, en [10].

Definición 2.2.8. Sea M una variedad compacta y sea $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^n$ un atlas para M . Definimos la **topología C^r en M** como la topología en las funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que son r veces diferenciables inducida por las seminormas para $k = 1, \dots, r$

$$p_k(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \varphi_i(U_i)} |\partial^\alpha (f \circ \varphi_i)(x)|$$

Teorema 2.2.9. *En un cobordismo (W, M_0, M_1) , las funciones Morse forman un abierto denso en las funciones suaves con la topología $C^2(W)$. Más aún, las funciones Morse con las imágenes de todos sus puntos críticos distintas son también densas en la misma topología.*

Gracias este teorema de existencia, que será usado profusamente en todo el trabajo, podemos probar algunos resultados de carácter topológico usando teoría Morse.

Corolario 2.2.10. (Lema del collar.) *Sea M una variedad diferenciable y compacta con frontera y sea $F \subset \partial M$ una componente de la frontera. Entonces, existe un entorno U de F tal que $U \cong F \times [0, 1)$. Dicho entorno se llama un **collar** de F .*

Demostración. Definimos el cobordismo $(M, F, \partial M - F)$ y sea $f : M \rightarrow [0, 1]$ una función Morse para este cobordismo. Entonces, por definición, existe un entorno U de F en el que f no tiene puntos críticos. Sea $m > 0$ el mínimo de f en el compacto $M \cap U^c$. Entonces, $f^{-1}[0, \frac{m}{2}]$ no contiene puntos críticos luego, por el teorema 2.2.2, $f^{-1}[0, \frac{m}{2}] \cong f^{-1}(0) \times [0, \frac{m}{2}] \cong F \times [0, 1]$ y, por tanto, $f^{-1}[0, m/2)$ es el abierto deseado. ■

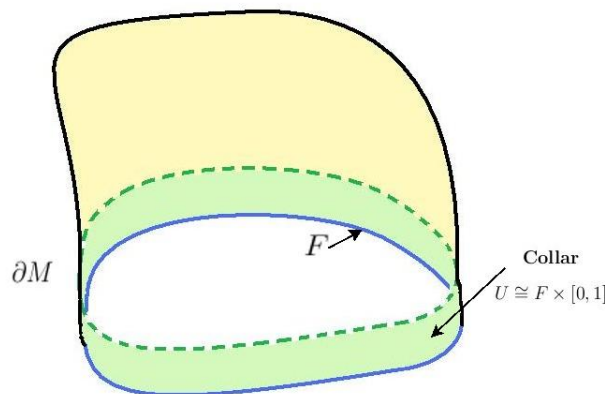


FIGURA 2.2: Collar a la frontera de una variedad

Análogamente a la demostración del lema del collar, puede probarse una versión más fuerte conocida como el lema del bicollar.

Definición 2.2.11. Una variedad conexa y cerrada $N \subset M$ se dice que tiene **dos lados** si existe un entorno U de N tal que $U - N$ tiene dos componentes.

Corolario 2.2.12. (Lema del bicollar.) *Sea M una variedad diferenciable y compacta y sea N una subvariedad diferenciable cerrada tal que cada una de sus componentes tiene dos lados. Entonces existe un entorno U de N tal que $U \cong N \times [-1, 1]$ de forma que N corresponde a $N \times \{0\}$. Dicho entorno se llama un **bicollar** de N .*

Gracias al lema del collar podemos zanjar el problema pendiente de la buena definición del cobordismo composición.

Corolario 2.2.13. *Dados dos cobordismos (W, M_0, M_1) y (W', M_1, M_2) , existe una única estructura diferenciable en $W' \circ W$ de manera que las inclusiones $W, W' \hookrightarrow W' \circ W$ sean embebimientos.*

Además, si W y W' tienen definidas sendas funciones Morse f y f' , estas pueden ser combinadas para formar una nueva función Morse $f'' : W' \circ W \rightarrow \mathbb{R}$ con los mismos puntos críticos del mismo índice, manteniéndose en el interior de su variedad correspondiente.

Observación 2.2.14. Si prescindimos de la restricción de que las inclusiones $W, W' \hookrightarrow W' \circ W$ sean embebimientos, no podemos garantizar la unicidad de la estructura diferencial. Recuérdese, por ejemplo, la observación 1.3.15 de que existen esferas twisteadas no difeomorfas entre sí.

Y, a posteriori, podemos mejorar el teorema 2.2.2

Corolario 2.2.15. *Sea $f : W \rightarrow [0, 1]$ una función Morse del cobordismo (W, M_0, M_1) . Entonces M_0 es un retracto de deformación de M^c para cualquier $c < 1$ tal que $f^{-1}[0, c]$ no contiene puntos críticos.*

Demostración. Sea U un collar de M_0 y sea $m > 0$ el mínimo de f en $W \cap U^c$. Entonces, como U es un collar, M_0 es un retracto de deformación para $f^{-1}[0, m/2] \subset U$, mientras que, por el teorema 2.2.2, $f^{-1}(-\infty, m/2] = f^{-1}[0, m/2] = M^{m/2}$ es un retracto de deformación de M^c . ■

Es más, este resultado tiene su aplicación directa a cobordismos, lo que nos da una consecuencia de gran utilidad.

Corolario 2.2.16. *En un cobordismo (W, M_0, M_1) puede definirse una función Morse sin puntos críticos si y sólo si W es un cobordismo trivial.*

Finalmente, probaremos un resultado que se ha demostrado fundamental para el estudio de esferas exóticas, pues permite identificar esferas únicamente a partir de una función Morse definida sobre ella.

Teorema 2.2.17. (Reeb.) *Sea M una variedad diferenciable cerrada y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función Morse con únicamente dos puntos críticos. Entonces M es homeomorfa a una esfera.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el máximo de f se alcanza en 1 y el mínimo en 0. Entonces, por el lema de Morse 2.1.5, se tiene que, para ϵ suficientemente pequeño, $f^{-1}[0, \epsilon]$ y $f^{-1}[1 - \epsilon, 1]$ son difeomorfos a dos esferas.

Ahora bien, por el lema de estabilidad topológica 2.2.2, como no existen valores críticos entre 0 y 1, se tiene que $f^{-1}[0, \epsilon]$ es difeomorfo a $f^{-1}[0, 1 - \epsilon]$. En consecuencia, se tiene que M es homeomorfo al pegado de dos discos por su frontera, i.e., a una esfera twisteadas, que, por el teorema 1.3.11 es homeomorfo a una esfera. ■

2.3. Funciones de Morse-Smale

Utilizando las notaciones de la demostración de 2.2.2 podemos definir dos subvariedades que resultarán de gran utilidad posteriormente.

Definición 2.3.1. Sea $f : W \rightarrow [0, 1]$ una función Morse de cobordismo sobre una variedad compacta. Escojamos una métrica riemanniana para W y sea θ el flujo asociado a ∇f . Sea p un punto crítico de f , definimos las **variedades estable e inestable** de f en p , \mathcal{W}^e y \mathcal{W}^u respectivamente, como

$$\mathcal{W}^e(p) = \{q \in W \mid \theta_q(t) \rightarrow p \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

$$\mathcal{W}^u(p) = \{q \in W \mid \theta_q(t) \rightarrow p \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}$$

Definición 2.3.2. Dos subvariedades $N_1, N_2 \subset M$ se dicen **transversales** si para todo $p \in N_1 \cap N_2$ se tiene que $T_p M = T_p N_1 \oplus T_p N_2$.

Definición 2.3.3. Una función Morse de cobordismo $f : W \rightarrow [0, 1]$ en una variedad riemanniana se dice de **Morse-Smale** si para cualesquiera puntos críticos p y q se tiene que $\mathcal{W}^e(p)$ y $\mathcal{W}^u(q)$ son transversales.

Al igual que con las funciones Morse, las Morse-Smale también tienen un teorema de existencia cuya demostración puede consultarse en [13].

Teorema 2.3.4. (Smale.) Dada una función de Morse de cobordismo $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, existe una métrica riemanniana g en W tal que f es Morse-Smale en (W, g) .

2.3.1. Homología Morse

Hasta ahora, hemos utilizado la teoría Morse únicamente como una forma de construir la descomposición en asas de un cobordismo y posteriormente estudiar en qué casos esta descomposición puede ser simplificada. Sin embargo, la teoría Morse también nos proporciona una poderosa herramienta algebraica para el cálculo de la homología de un espacio, lo que se conoce como homología Morse.

La idea clave en la que reside la homología Morse se basa en la observación de que, usando la descomposición en asas de una variedad, podemos controlar su homología. Supongamos que (W, M_0, M_1) es un cobordismo elemental, con una única asa de índice λ adjunta a $M_0 \times [0, 1]$ para obtener W , luego

$$W \cong M_0 \times [0, 1] + \mathcal{A}_\lambda^\varphi \cong M_0 \times [0, 1] \bigcup_{\varphi} \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$$

Ahora bien, observemos que \bar{B}^λ es un retracto de deformación de $\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ y que, por cómo se ha procedido para el pegado, este retracto puede extenderse a un retracto de $W \cong M_0 \times [0, 1] \bigcup_{\varphi} \bar{B}^\lambda \times$

$\bar{B}^{m-\lambda}$ sobre $M_0 \cup_{\varphi|_{S_p\varphi}} \bar{B}^\lambda$ i.e. el resultado de añadir una λ -celda a M_0 . Así, usando la propiedad de escisión de la homología singular se tiene

$$H_k(W, M_0) \cong H_k(M_0 \cup_\varphi \bar{B}^\lambda, M_0) \cong H_k(\bar{B}^\lambda, S^{\lambda-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

De este modo, a pesar de lo elemental de este cálculo, todo parece apuntar a que, en efecto, deberíamos poder calcular la homología de un espacio utilizando su descomposición en asas o, equivalentemente, una función Morse definida sobre él si pudiésemos controlar en qué manera las distintas asas se relacionan entre sí. Esto es, precisamente, lo que la homología Morse consigue.

Supongamos que en nuestro cobordismo (W, M_0, M_1) tenemos definida una función Morse de cobordismo $f : W \rightarrow [0, 1]$. Además, dada una función Morse, genéricamente una métricas riemannianas la convierte en Morse-Smale, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que f es de Morse-Smale para el cobordismo en una cierta métrica. Sean p y q dos puntos críticos para f de índices λ_p y λ_q respectivamente. Definimos las **líneas de flujo** entre p y q como

$$\tilde{\mathcal{M}}(p, q) = \mathcal{W}^u(p) \cap \mathcal{W}^e(q)$$

Más aún, observemos que \mathbb{R} actúa sobre $\tilde{\mathcal{M}}(p, q)$ por traslación en el flujo, por lo que podemos definir su espacio de órbitas, conocido como el **módulo de líneas de flujo**, $\mathcal{M}(p, q) = \tilde{\mathcal{M}}(p, q)/\mathbb{R}$. Entonces, la condición de Morse-Smale hace que

$$\dim \mathcal{M}(p, q) = \dim (\mathcal{W}^u(p) \cap \mathcal{W}^e(q)) - 1 = \dim \mathcal{W}^u(p) + \dim \mathcal{W}^e(q) - \dim W - 1 = \lambda_p - \lambda_q - 1$$

En particular, si $\lambda_p = \lambda_q + 1$ se tiene que $\dim \mathcal{M}(p, q) = 0$. Puede comprobarse (véase [12]) que $\mathcal{M}(p, q)$ es Hausdorff y, por tanto, en este caso $\mathcal{M}(p, q)$ es una cantidad finita de puntos.

Más aún, podemos orientar $\mathcal{M}(p, q)$ para $p \neq q$ como sigue. Elijamos orientaciones cualesquiera para todas las variedades descendentes. Sea $\gamma \in \mathcal{M}(p, q)$ y sea $x \in \text{Im } \gamma$, entonces se tiene

$$T_x \mathcal{W}^u(p) \cong T_x \tilde{\mathcal{M}}(p, q) \oplus T_x M / T_x \mathcal{W}^e(q) \cong T_\gamma \mathcal{M}(p, q) \oplus T_x \gamma \oplus T_x \mathcal{W}^u(q)$$

Entonces, si orientamos $\text{Im } \gamma$ en la dirección de recorrido podemos definir una orientación en $T_\gamma \mathcal{M}(p, q)$ de manera que el isomorfismo anterior preserve la orientación. De este modo, en el caso que nos interesa con $\lambda_p = \lambda_q + 1$ se tiene que $\mathcal{M}(p, q)$ es un conjunto de puntos orientados, por lo que puede definirse su cardinal algebraico

$$\#\mathcal{M}(p, q) = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(p, q)} \text{sign}(\gamma)$$

Observación 2.3.5. Una construcción paralela puede realizarse para dos subvariedades compactas orientables $N_1, N_2 \subset M$ de la variedad compacta W , con $\dim N_1 + \dim N_2 = \dim M$ transversas entre sí. Orientemos N_1 y el fibrado normal de N_2 , νN_2 , y sea $p \in N_1 \cap N_2$. De este modo, si X_1, \dots, X_r

es una base de $T_p N_1$ positivamente orientada, entonces, por transversalidad, también es una base de $\nu_p N_2$. Definimos entonces el **número de intersección** entre N_1 y N_2 en p , $\epsilon_p(N_1, N_2)$ como $+1$ si X_1, \dots, X_r es una base positivamente orientada de $\nu_p N_2$ y -1 en caso contrario.

Si exigimos que las orientaciones de N_1 y νN_2 sean consistentes con una orientación dada de M , entonces se tiene que el número de intersección únicamente depende de la orientación elegida para M y no de las de N_1 o νN_2 .

Esta noción, que nos será de gran importancia en el truco de Whitney, resulta fundamental en topología algebraica y puede definirse más elegantemente mediante el *cap product* y la forma de intersección. Véase, por ejemplo, [2].

Definición 2.3.6. Sea $f : W \rightarrow [0, 1]$ una función Morse-Smale de cobordismo. Para cada $0 \leq \lambda \leq \dim W$ definimos C_λ como el grupo abeliano libre con generadores los puntos críticos de índice λ , i.e., $C_\lambda = \sum_{p \in \text{Crit}_f(\lambda)} \mathbb{Z} \cdot p$. Más aún, definimos el homomorfismo de grupos $\partial : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ dado sobre los generadores por

$$\partial(p) = \sum_{q \in \text{Crit}_f(\lambda-1)} \# \mathcal{M}(p, q) \cdot q$$

Se tiene que $\partial^2 = 0$ y, por tanto (C_*, ∂) es un complejo de cadena, conocido como el **complejo de Morse** de W inducido por f . Más aún, definimos la **homología Morse**, $H_*^M(W)$, como la homología asociada al complejo de cadena, esto es

$$H_k^M(C_*) = \frac{\ker \partial : C_k \rightarrow C_{k-1}}{\text{Im } \partial : C_{k+1} \rightarrow C_k}$$

Observación 2.3.7. En primera instancia, pudiera parecer que $H_k^*(M)$ depende de dos factores ocultos en la notación, a saber, la función Morse $f : W \rightarrow [0, 1]$ y la métrica riemanniana escogida para que f sea una función de Morse-Smale. Sin embargo, como veremos a continuación, esto no es así.

Teorema 2.3.8. Sea (W, M_0, M_1) un cobordismo y sea $f : W \rightarrow [0, 1]$ una función Morse-Smale de cobordismo con complejo asociado C_* . Entonces se tiene

$$H_k^M(C_*) \cong H_k(W, M_0)$$

donde $H_*(W, M_0)$ es la homología singular de W relativa a M_0 .

Capítulo 3

Asas y Cirugía

La aplicación de la teoría quirúrgica y descomposición en asas trasciende más allá de su utilidad en la prueba del teorema del h-cobordismo. Resultados posteriores evidencian que constituyen unas técnicas topológicas muy fértiles, especialmente en tareas de clasificación de variedades [16][15] y de variedades exóticas [9][6].

3.1. Adjunción de un Asa

Definición 3.1.1. La variedad diferenciable con frontera $\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ se denomina el λ -**asa en dimensión** m . A la subvariedad $\bar{B}^\lambda \times \{0\}^{m-\lambda}$ la conoce como el **núcleo** del asa y a $\{0\}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ como el **conúcleo**. Asimismo, $S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda}$ es la **frontera de pegado**, $S^{\lambda-1} \times \{0\}^{m-\lambda}$ se llama la **esfera de pegado** y $\{0\}^\lambda \times S^{m-\lambda-1}$ se denomina la **esfera transversal**.

Mediante estas asas podemos realizar una operación sobre una variedad diferencial con frontera que permite crear nuevas variedades de manera que pueda controlarse la topología de la variedad resultado. La forma de generar estas nuevas variedades es mediante la operación de pegado.

Definición 3.1.2. Sean M, N subvariedades diferenciables y sea $W \subset M$ una subvariedad. Dado un embebimiento $\varphi : W \hookrightarrow N$, definimos la variedad **pegado de M y N vía φ** y la denotamos por $M \cup_\varphi N$ a la variedad con la topología cociente

$$(M \times \{0\} \cup N \times \{1\}) / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia $(m, 0) \sim (n, 1)$ si y sólo si $m \in W$ y $n = \varphi(m)$.

No obstante, el resultado de esta operación no tiene por qué ser una variedad diferenciable. Sin embargo, cuando el pegado se realiza en las fronteras de las variedades, existe una forma canónica de suavizar el resultado.

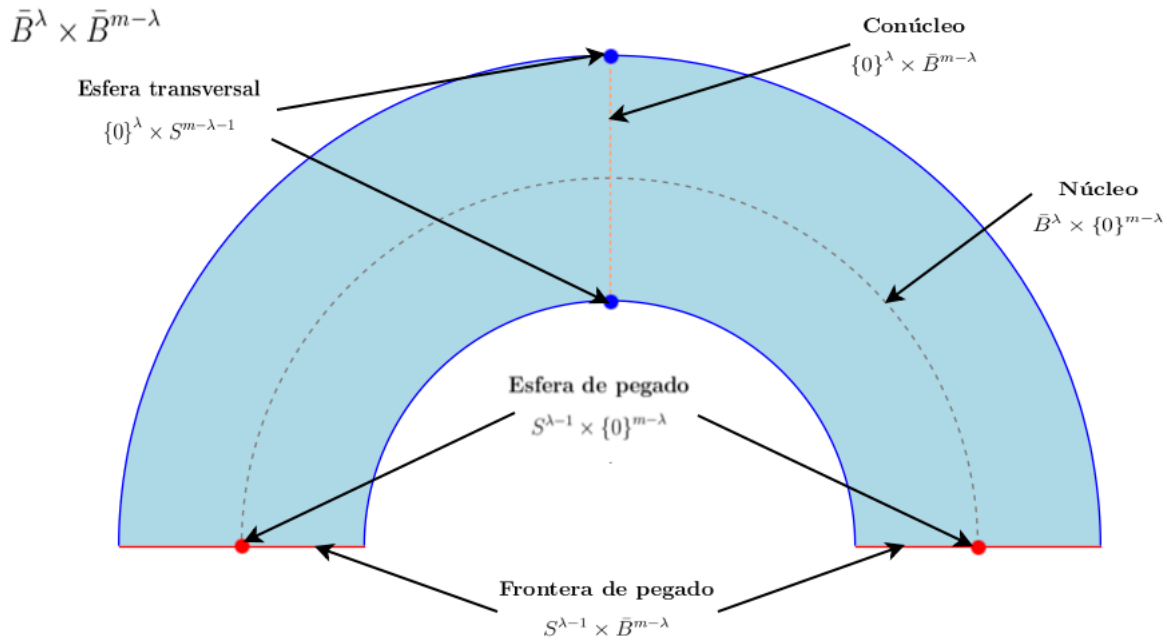


FIGURA 3.1: Anatomía de un asa

Proposición 3.1.3. Sean M, N variedades diferenciables con frontera y sea $W \subset \partial M$ una subvariedad. Entonces, dado un embebimiento $\varphi : W \hookrightarrow \partial N$ existe una única estructura diferencial en $M \cup_\varphi N$ tal que las inclusiones $M, N \hookrightarrow M \cup_\varphi N$ son embebimientos.

Esquema de la demostración. La prueba completa puede encontrarse en [10, teorema 1.4]. Mediante el teorema 2.2.10 tenemos que existen sendos entornos de W y $W' = \varphi(W)$ difeomorfos a $W \times (-1, 0]$ y $W' \times [0, 1)$ respectivamente. De este modo, tras identificar W y W' tenemos un entorno del pegado de la forma $W \times (-1, 1)$, que es localmente difeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^m . En el resto de los puntos de la variedad pegado, podemos utilizar la carta original.

La unicidad se desprende de que, al tener que hacer que las inclusiones $M, N \hookrightarrow M \cup_\varphi N$ sean embebimiento, la topología en el interior de ellas debe ser la misma que la anteriormente descrita. Por otra parte, por el lema del bicollar (véase 2.2.12), cualquier otra estructura diferencial en la variedad pegado debe tener sendos entornos de misma forma que los anteriores y, por tanto, debe ser compatible con las estructuras previas. ■

En nuestro caso, los embebimientos de pegado serán de un tipo muy concreto.

Definición 3.1.4. Sea M una n -variedad diferencial con frontera y $r \in \mathbb{N}$. Un r -**embebimiento** es un embebimiento $\varphi : S^r \hookrightarrow M$, mientras que un r -**embebimiento engrosado** es un embebimiento $\varphi : S^r \times \bar{B}^{n-r} \hookrightarrow M$.

Definición 3.1.5. (Adjunción de un asa). Sea M una m -variedad diferencial con frontera ∂M y sea $\lambda \in \mathbb{N}$. Dado un $(\lambda - 1)$ -embebimiento engrosado sobre ∂M , $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \hookrightarrow \partial M$ definimos

el resultado de realizar una **adjunción de un λ -asa** a M , $M + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$, como la variedad resultante de pegar el λ -asa $\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ identificando la frontera de pegado vía φ , esto es

$$M + \mathcal{A}_\varphi^\lambda = M \cup_\varphi \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$$

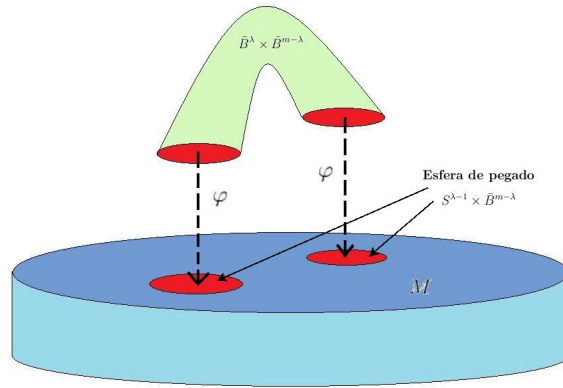


FIGURA 3.2: Adjunción de un asa

Observación 3.1.6. Otra forma de interpretar la adjunción de un asa es comprender los cambios ocurridos a partir de la estructura de CW-complejo de la variedad. En efecto, obsérvese que el resultado de adjuntar una λ -asa a M , vía un cierto embebimiento engrosado, tiene por retracto de deformación fuerte al resultado de adjuntar una λ -celda a M vía el embebimiento asociado.

Ahora bien, a pesar de que la descomposición como CW-complejo y en asas son homotópicamente equivalentes, la última goza de la deseada propiedad de que el espacio resultante es una variedad topológica, propiedad que se pierde en la descomposición en CW-complejos, y que nos será de gran utilidad en lo que sigue. En ese sentido, la descomposición en asas de una variedad es el análogo C^∞ de la descomposición en CW-complejos.

3.2. Cirugía

Muy relacionada con la adjunción de asas está la noción de cirugía. Es un proceso de pegado que permite alterar la topología de la variedad, modificando su clase de difeomorfía, lo que resulta muy útil para generar variedades con ciertas propiedades.

Definición 3.2.1. (Cirugía) Sea M una m -variedad diferencial sobre la que tenemos definido un $(\lambda - 1)$ -embebimiento engrosado $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda+1} \hookrightarrow M$. Sea $\Omega = \text{Int}(Im \varphi)$, el interior de $Im \varphi$. Entonces, la variedad resultante de realizar **cirugía de índice λ** a M , $\mathcal{C}_\varphi^\lambda M$, es

$$\mathcal{C}_\varphi^\lambda M = (M - \Omega) \cup_{\tilde{\varphi}} \bar{B}^\lambda \times S^{m-\lambda}$$

donde $\tilde{\varphi} = \varphi|_{S^{\lambda-1} \times S^{m-\lambda}}$.

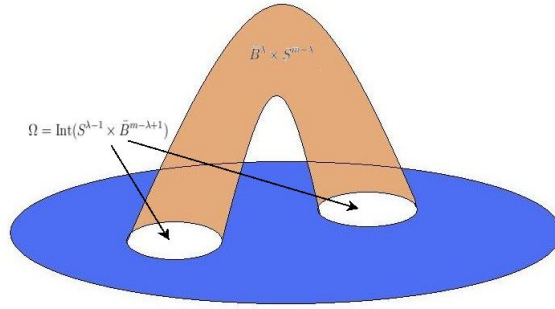


FIGURA 3.3: Realización de cirugía en una variedad

En las siguientes proposiciones comenzaremos a analizar la relación entre asas y cirugía.

Proposición 3.2.2. *La frontera de $M + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$ es el resultado de aplicar cirugía de índice λ a ∂M mediante φ .*

Demostración. Sea $\pi : M \sqcup \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow M \cup_\varphi \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ la aplicación cociente. Como π es abierta y cerrada, se tiene que

$$\partial(M + \mathcal{A}_\varphi^\lambda) = \partial(M \cup_\varphi \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}) \subset \pi(\partial(M \sqcup \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda})) = \pi(\partial M \sqcup \partial(\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}))$$

Sin embargo, algunos puntos de M y el asa pierden su condición de estar en la frontera. En efecto, cada punto de $Int(S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda})$ y cada uno de $\Omega = Int(Im \varphi)$ tienen sendos entornos homeomorfos a \mathbb{H}^n , que, en el proceso de pegado, se identifican por la frontera y, por tanto, son puntos interiores de $M \cup_\varphi \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$.

En consecuencia, como $\partial(\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}) = (S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda}) \cup (\bar{B}^\lambda \times S^{m-\lambda-1}) = Int(S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda}) \sqcup (\bar{B}^\lambda \times S^{m-\lambda-1})$ se tiene

$$\partial(M \cup_\varphi \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}) = \pi(\partial M - \Omega \sqcup \bar{B}^\lambda \times S^{m-\lambda-1})$$

donde $\pi|_{\partial M - \Omega \sqcup \bar{B}^\lambda \times S^{m-\lambda-1}}$ coincide con la aplicación cociente inducida por el embebimiento de pegado $\varphi|_{S^{\lambda-1} \times S^{m-\lambda-1}}$. ■

Ejemplo 3.2.3. Estudiemos uno de los ejemplos más importantes que ponen de manifiesto el vínculo entre cirugía y adjunción de asas. Tal es su relevancia que, como veremos a continuación, este espacio es el modelo local de una variedad en un entorno de un punto crítico para una función Morse definida sobre ella.

Consideremos la subvariedad de \mathbb{R}^m con frontera

$$\Delta_\lambda^m = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{m-\lambda+1} \left| \begin{array}{l} -1 \leq -\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 1 \\ \|x\|\|y\| < (\cosh 1)(\sinh 1) = \frac{1}{4}(e^2 + e^{-2}) \end{array} \right. \right\}$$

En este caso, tenemos que la frontera de Δ_λ^m es la unión disjunta de $\Gamma_{-1} = \{-\|x\|^2 + \|y\|^2 = -1\}$ y $\Gamma_1 = \{-\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1\}$. De hecho, tenemos los difeomorfismos

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} : S^{\lambda-1} \times B^{m-\lambda} &\longrightarrow \Gamma_{-1} & \alpha_1 : B^\lambda \times S^{m-\lambda-1} &\longrightarrow \Gamma_1 \\ (u, rv) &\longmapsto (u \cosh r, v \sinh r) & (ru, v) &\longmapsto (u \sinh r, v \cosh r) \end{aligned}$$

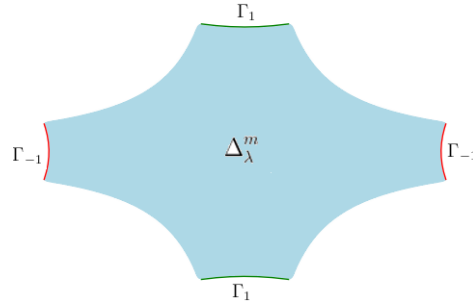


FIGURA 3.4: Región Δ_λ^m

Para estudiar la topología de Δ_λ^m , definamos la función Morse $f : \Delta_\lambda^m \rightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2$. Así definida, f tiene, en el origen, su único punto crítico, con índice λ . Más aún, la variedad estable de ∇f (con la métrica usual) es $\mathcal{W}^e = \mathbb{R}^\lambda \times \{0\}^{m-\lambda}$, mientras que la inestable es $\mathcal{W}^u = \{0\}^\lambda \times \mathbb{R}^{m-\lambda}$.

Respecto a las curvas integrales, observemos que, si $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^\lambda, y_0^1, \dots, y_0^{m-\lambda})$, entonces la trayectoria que parte de (x_0, y_0) es

$$\theta_{(x_0, y_0)}(t) = (x_0^1 e^{-2t}, \dots, x_0^\lambda e^{-2t}, y_0^1 e^{2t}, \dots, y_0^{m-\lambda} e^{2t})$$

En particular, θ es prolongable hasta la frontera.

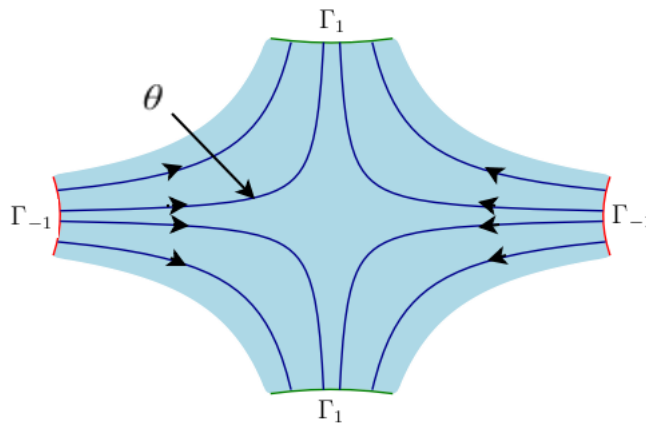


FIGURA 3.5: Curvas integrales, θ , de ∇f con la métrica usual

Consideremos, ahora, un $(x_0, y_0) \in \Gamma_{-1}$ y busquemos un $\tau(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^+$ tal que $\theta_{(x_0, y_0)}(\tau(x_0, y_0)) \in \Gamma_1$. Equivalentemente, esto quiere decir que $1 = f(\theta_{(x_0, y_0)}(\tau(x_0, y_0))) = -\|x_0\|^2 e^{-2\tau} + \|y_0\|^2 e^{2\tau}$. Gracias al teorema de los valores intermedios y al de la función implícita, si $(x_0, y_0) \notin \mathcal{W}^e$, este $\tau(x_0, y_0)$ existe, es único, y la aplicación $(x_0, y_0) \mapsto \tau(x_0, y_0)$ es diferenciable.

Más aún, obsérvese que τ es constante en $\{(x_0, y_0) \mid \|x_0\| \|y_0\| = \frac{1}{4}(e^2 + e^{-2})\}$ y denotemos por τ_0 este valor común. Entonces, tenemos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : S^{\lambda-1} \times B^{m-\lambda} \times [0, 1] &\longrightarrow \Delta_\lambda^m \\ (u, rv, s) &\longmapsto \theta_{\alpha_{-1}(u,rv)}(\tau_0 s) \end{aligned}$$

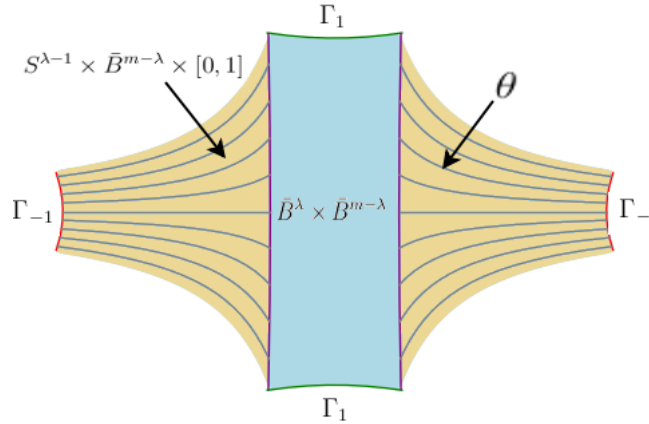


FIGURA 3.6: Descomposición en asas de la región Δ_λ^m

Más aún, tenemos que $\Delta_\lambda^m - \varphi(S^{\lambda-1} \times B^{m-\lambda} \times [0, 1])$ es difeomorfo a $\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ y, por tanto, resulta

$$\Delta_\lambda^m \cong S^{\lambda-1} \times B^{m-\lambda} \times [0, 1] \cup_\varphi \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda} \cong \Gamma_{-1} \times [0, 1] + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$$

Es decir, Δ_λ^m es difeomorfo al resultado de engordar una de sus fronteras y adjuntarle un asa. De hecho, vía una pequeña operación de cirugía, veremos que Δ_λ^m es único modelo local en un entorno de un punto crítico de índice λ .

3.3. Descomposición en Asas y Teoría Morse

Uno de los nexos de unión más importantes entre la teoría Morse y la cirugía es que, mediante las propiedades analíticas de las funciones de Morse, podemos descomponer una variedad con frontera en una sucesión de variedades, cada una de las cuales se obtiene de la anterior por el pegado de un asa.

Definición 3.3.1. Un cobordismo (W, M_0, M_1) se dice **elemental de índice λ** si existe una función Morse de cobordismo $f : W \rightarrow [0, 1]$ con un único punto crítico de índice λ .

Proposición 3.3.2. Sea M una variedad diferenciable y $\mathcal{C}_\varphi^\lambda M$ el resultado de practicarle λ -cirugía. Entonces, existe un cobordismo, W , elemental de índice λ entre M y $\mathcal{C}_\varphi^\lambda M$. Más aún, W es difeomorfo a $M \times [0, 1] + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$.

Demostración. La prueba se reduce a construir W como un cierto pegado de M con Δ_λ^m . Para ello, con la misma función Morse y notaciones del ejemplo 3.2.3, definimos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: S^{\lambda-1} \times S^{m-\lambda-1} \times (0, 1) \times [-1, 1] &\longrightarrow \Delta_\lambda^m - (\mathcal{W}^e \cup \mathcal{W}^u) \\ (u, v, r, t) &\longmapsto \theta_{\alpha_{-1}(u,rv)} \left(\frac{\tau(\alpha_{-1}(u,rv))}{2}(t+1) \right) \end{aligned}$$

Para visualizar el comportamiento de ϕ , observemos que, con las identificaciones apropiadas, $\phi(x, -1) = \alpha_{-1}(x)$ y que $\phi(x, 1) = \alpha_1(x)$. De este modo, $\phi(x, t)$ es el punto que resulta de trasladar $\alpha_{-1}(x)$ por su curva integral a tal velocidad que alcance $\alpha_1(x)$ en $t = 1$. Véase la figura 3.6.

Sea $\Omega = \varphi(S^{\lambda-1} \times \{0\})$. Definimos el embebimiento $\psi: \Delta_\lambda^m - (\mathcal{W}^e \cup \mathcal{W}^u) \hookrightarrow (M - \Omega) \times [-1, 1]$ dado por $\psi(\phi(x, t)) = (\varphi(x), t)$.

Nuestro candidato a cobordismo es, entonces, $W = \Delta_\lambda^m \cup_\psi (M - \Omega) \times [-1, 1]$. Para comprobarlo, extendamos f a toda la variedad, definiendo

$$\begin{aligned} \tilde{f}: W &\longrightarrow [-1, 1] \\ p &\longmapsto \begin{cases} \pi_2(p) & \text{si } p \in M - \Omega \times [-1, 1] \\ f(p) & \text{si } p \in \Delta_\lambda \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\pi_2: M - \Omega \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ es la proyección sobre la segunda componente.

Se tiene que \tilde{f} es una función Morse con un único punto crítico de índice λ . Además, se tiene que la frontera de W es $\tilde{f}^{-1}(-1) \sqcup \tilde{f}^{-1}(1)$. En el primer caso, tenemos un difeomorfismo de $\tilde{f}^{-1}(-1)$ con M dado por $\tau_{-1}: M \rightarrow \tilde{f}^{-1}(-1)$ que hace $\tau_{-1}(p) = (p, -1)$ si $p \notin A$ y $\tau_{-1}(p) = \alpha_{-1}(\varphi^{-1}(p))$ si $p \in \text{Im}(\varphi)$. Análogamente, el difeomorfismo de $\tilde{f}^{-1}(1)$ con $\mathcal{C}_\varphi^\lambda M$ es $\tau_1(p) = (p, 1)$ si $p \notin A$ y $\tau_1(p) = \alpha_1(\varphi^{-1}(p))$ si $p \in \text{Im}(\varphi)$.

La demostración de que $W \cong M \times [0, 1] + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$ es análoga a la del ejemplo 3.2.3. ■

Análogamente a la prueba anterior, en cada entorno de un punto crítico de índice λ puede tomarse un entorno homeomorfo a Δ_λ^m y, por tanto, el resultado es como añadir

Lema 3.3.3. (De los cobordismos elementales) *En un cobordismo (W, M_0, M_1) elemental de índice λ se tiene que $W \cong M_0 \times [0, 1] + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$ para cierto $\varphi: S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow M_0 \times \{1\}$.*

Demostración. Sea p el punto crítico de cobordismo y $a = f(p)$. Entonces, modificando ligeramente f en un entorno de p puede conseguirse que $f^{-1}[a - \epsilon, a + \epsilon]$ esté contenido en un entorno coordenado. De este modo, por un argumento análogo al de la prueba anterior se tiene que $f^{-1}[a - \epsilon, a + \epsilon]$ es homeomorfo a Δ_λ^m y, por tanto, $f^{-1}[a - \epsilon, a + \epsilon] \cong f^{-1}(a - \epsilon) \times [0, 1] + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$ para algún embebimiento $\varphi: S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow f^{-1}(a - \epsilon)$. No obstante, por el teorema de estabilidad topológica 2.2.2 se tiene que $f^{-1}[0, a - \epsilon]$ es difeomorfo a $M_0 \times [0, 1] = f^{-1}(0) \times [0, 1]$. En consecuencia, se tiene que $f^{-1}[0, a + \epsilon] \cong M_0 \times [0, 1] + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$. Ahora bien, como f no tiene más puntos críticos interiores, el lema de estabilidad topológica nuevamente nos dice que $f^{-1}[0, a + \epsilon] \cong f^{-1}[0, 1] = W$. ■

Corolario 3.3.4. *Sea (W, M_0, M_1) un cobordismo elemental de índice λ entre M_0 y M_1 . Entonces, M_1 es difeomorfo al resultado de practicar λ -cirugía a M_0 .*

Demostración. En virtud del lema 3.3.3 se tiene que existe un λ -embebimiento engrosado φ tal que $W \cong M_0 \times [0, 1] + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$. En consecuencia, por la proposición 3.2.2,

$$M_0 \sqcup M_1 \cong \partial(M_0 \times [0, 1] + \mathcal{A}_\varphi^\lambda) = \mathcal{C}_\varphi^\lambda \partial(M_0 \times [0, 1]) = \mathcal{C}_\varphi^\lambda (M_0 \times \{0\}) \sqcup \mathcal{C}_\varphi^\lambda (M_0 \times \{1\})$$

Pero, como $Im \varphi \subset M_0 \times \{1\}$, se tiene $\mathcal{C}_\varphi^\lambda (M_0 \times \{0\}) = M_0 \times \{0\} \cong M_0$ y, por tanto, $\mathcal{C}_\varphi^\lambda (M_0 \times \{1\}) \cong M_1$. ■

Teorema 3.3.5. (Descomposición en asas) *Dado un cobordismo (W, M_0, M_1) , existen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tales que*

$$W \cong M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=0}^r \mathcal{A}_{\varphi_k}^{\lambda_k}$$

para ciertos k -embebimientos engrosados φ_k respetando el borde M_0 , i.e. $M_0 \times \{0\} \cap Im \varphi_k = \emptyset$. Tal descomposición se denomina **descomposición en asas** de W .

Demostración. Sea $f : W \rightarrow [0, 1]$ una función Morse del cobordismo tal que, si p_1, p_2, \dots, p_r son sus puntos críticos con índices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, respectivamente, entonces $f(\lambda_1) < f(\lambda_2) < \dots < f(\lambda_r)$. Sean $c_0 = 0, c_1, c_2, \dots, c_r = 1$ tales que $f(\lambda_k) < c_k < f(\lambda_{k+1})$ para $0 < k < r$.

Gracias a estos puntos, si denotamos $M^k = f^{-1}(c_k)$, podemos decomponer $W = W^r \circ \dots \circ W^2 \circ W^1$, con $W^k = f^{-1}([c_{k-1}, c_k])$ el cobordismo entre M^{k-1} y M^k . Ahora bien, cada W^k es un cobordismo elemental de índice λ_k y, por tanto, $W^k \cong M^{k-1} \times [0, 1] + \mathcal{A}_{\varphi_k}^{\lambda_k}$. En consecuencia, se tiene

$$W \cong (M^{k-1} \times [0, 1] + \mathcal{A}_{\varphi_k}^{\lambda_k}) \circ \dots \circ (M_0 \times [0, 1] + \mathcal{A}_{\varphi_1}^{\lambda_1}) \cong M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=1}^r \mathcal{A}_{\varphi_k}^{\lambda_k}$$

Además, como $Im \varphi_k \subset M^k$ para $k > 0$, los φ_k respetan M_0 . ■

Corolario 3.3.6. *Si (W, M_0, M_1) es un cobordismo con descomposición en $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ asas, entonces M_1 es difeomorfo al resultado de practicarle $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ cirugías sucesivas a M_0 .*

Observación 3.3.7. La descomposición en asas de un cobordismo dista mucho de ser única. De hecho, es precisamente la no unicidad de esta descomposición la que nos permitirá demostrar el teorema del h-cobordismo, cancelando unas asas con otras hasta conseguir reducir el cobordismo al trivial.

Finalmente, observemos que la proposición 3.2.2 cierra el ciclo de implicaciones, por lo que tenemos

Proposición 3.3.8. *Sea (W, M_0, M_1) un cobordismo con $\dim W = m$. Entonces, W es elemental de índice λ si y solo si existe un embebimiento $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \hookrightarrow M_0$ y un $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $M_1 \cong \mathcal{C}_\varphi^\lambda M_0$ y $W \cong M_0 \times [0, 1] + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$*

Capítulo 4

Alteración de cobordismos

Dadas dos variedades cobordantes, el cobordismo que las une dista mucho de ser único. Esta propiedad, lejos de ser una traba, resulta de gran utilidad a la hora de estudiar la relación de cobordismo. En el presente capítulo desarrollaremos una serie de resultados que nos permitirán alterar las características topológicas de un cobordismo en pos de su simplicidad, hasta lograr probar el teorema del h-cobordismo.

4.1. Reordenación de asas

Antes de adentrarnos en la prueba del teorema del h-cobordismo, deberemos realizar un poco de intendencia y aprender a reordenar sus asas de manera que las asas se vayan adjuntando a la variedad siguiendo el orden creciente de sus índices. Para realizar esta tarea, la herramienta principal serán los conceptos de isotopía y difeotopía.

Definición 4.1.1. Dada una variedad diferencial W y una subvariedad $M \hookrightarrow W$, una **isotopía** es una aplicación diferenciable $H : M \times [0, 1] \rightarrow W$ tal que $H_t = H(\cdot, t)$ es un embebimiento para todo $t \in [0, 1]$. En particular, si $M \subset W$ y H_0 es la inclusión, diremos que H es una isotopía de M . Asimismo, una **difeotopía** es una aplicación $F : W \times [0, 1] \rightarrow W$ tal que cada $F_t = F(\cdot, t)$ es un difeomorfismo para cada $t \in [0, 1]$.

El resultado principal que nos permite realizar todas las operaciones es el siguiente teorema, cuya demostración, preciosa usando campos vectoriales no autónomos, puede encontrarse en [7].

Teorema 4.1.2. (De extensión de isotopías). *Sea W una variedad diferencial compacta (posiblemente con frontera) y $M \hookrightarrow W$ una subvariedad. Dada una isotopía $H : M \times [0, 1] \rightarrow W$, si $\text{Im } H \subset \partial W$ o $\text{Im } H \subset W - \partial W$, entonces H se extiende a una difeotopía $F : W \times [0, 1] \rightarrow W$ (i.e. $F_t \circ H_0 = H_t$ para todo $t \in [0, 1]$) de soporte compacto.*

Corolario 4.1.3. (De extensión de embebimientos). Sean $N \subset M \subset W$ subvariedades diferenciables, con N cerrada. Supongamos que $f_0, f_1 : N \hookrightarrow W - \partial W$ son dos embebimientos isotópicos en $W - \partial W$. Entonces, si f_0 se extiende a un embebimiento $\tilde{f}_0 : M \rightarrow W$, entonces f_1 también se extiende a un embebimiento $\tilde{f}_1 : M \rightarrow W$ y ambas extensiones son isotópicas.

Demostración. Sea $H : N \times [0, 1] \rightarrow W - \partial W$ la isotopía entre f_0 y f_1 . Entonces, como f_0 es un embebimiento, se tiene que $\tilde{H}_t = H_t \circ f_0^{-1} : \text{Im } f_0 \rightarrow W - \partial W$ es una isotopía entre la inclusión $\text{Im } f_0 \xrightarrow{i} W - \partial W$ y $f_1 \circ f_0^{-1} : \text{Im } f_0 \rightarrow W - \partial W$.

De este modo, por el teorema 4.1.2 existe una difeotopía $F : W \rightarrow W$ tal que $f_1 \circ f_0^{-1} = \tilde{H}_1 = F_1 \circ \tilde{H}_0 = F_1|_{\text{Im } f_0} \circ$, equivalentemente, $F_1 \circ f_0 = f_1$. En consecuencia, si $\tilde{f}_0 : M \rightarrow W$ es una extensión de f_0 , entonces $F_1 \circ \tilde{f}_0 : M \rightarrow W$ es una extensión de f_1 y $F_t \circ \tilde{f}_0$ es la isotopía entre ellas. ■

La importancia de las isotopías descansa en el hecho de que basta con conseguir que las aplicaciones de pegado sean isotópicas para conseguir que los resultados de pegar un asa sean difeomorfos.

Lema 4.1.4. (De isotopía). Dados dos $(\lambda - 1)$ -embebimientos engrosados $\varphi_0, \varphi_1 : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \partial W$ sobre una variedad compacta, si φ_0 y φ_1 son isótopos, entonces $W + \mathcal{A}_{\varphi_0}^\lambda \cong W + \mathcal{A}_{\varphi_1}^\lambda$.

Demostración. Dada la isotopía $H : (S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda}) \times [0, 1] \rightarrow \partial M$ con $H_0 = \varphi_0$ y $H_1 = \varphi_1$, por el teorema 4.1.2, existe una difeotopía $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $F_t \circ H_0 = H_t$. En particular, se tiene que $F_1 \circ \varphi_0 = F_1 \circ H_0 = H_1 = \varphi_1$ y, por tanto, el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : W \sqcup \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda} &\longrightarrow W \sqcup \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda} \\ x &\longmapsto \begin{cases} F_1(x) & \text{si } x \in W \\ x & \text{si } x \in \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda} \end{cases} \end{aligned}$$

desciende al cociente como un difeomorfismo $\tilde{\psi} : W \cup_{\varphi_0} \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow W \cup_{\varphi_1} \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$. ■

Gracias a este lema, ya tenemos la técnica principal para efectuar la trasposición de asas, si bien aún nos es necesario un lema que, como veremos en la demostración del teorema de reordenación, nos permita separar la esfera de pegado de un asa de la esfera transversal de la otra.

Definición 4.1.5. Dada una subvariedad $M \subset W$ con $m = \dim M$ y $n = \dim W$, un entorno $U \subset W$ de M se dice un **entorno producto de M** si existe un difeomorfismo $\phi : U \rightarrow M \times \mathbb{R}^{m-n}$ tal que $M = \phi(M \times \{0\})$.

Observación 4.1.6. Nótese que un entorno producto es un caso particular de entorno tubular de N tal que el fibrado vectorial sobre N es trivial.

Lema 4.1.7. Sea W una variedad diferencial compacta y $M, N \subset W$ subvariedades tales que $\dim M + \dim N < \dim W$. Si M tiene un entorno producto, entonces existe una difeotopía $F : W \times [0, 1] \rightarrow W$ tal que $F_0 = id_W$ y $F_1(M) \cap F_1(N) = \emptyset$.

Demostración. Por simplicidad, denotemos $n = \dim N$, $m = \dim M$ y $k = \dim W$. Sea $U \subset W$ el entorno producto de M y $\varphi : U \rightarrow M \times \mathbb{R}^{m-k}$ su trivialización.

Consideremos la proyección sobre la segunda variable de la trivialización $\rho_2 \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$. Como $\dim N < \dim \mathbb{R}^{m-k}$, en virtud del teorema de Sard, se tiene que $\rho_2 \circ \varphi(N \cap U)$ es un conjunto de medida nula. En particular, su imagen no es el total y, por tanto, existe $s_0 \in \mathbb{R}^{m-k}$ tal que $\varphi^{-1}(M \times \{s_0\}) \cap N = \emptyset$.

Construyamos una difeotopía que transforme $M \times \{0\}$ en $M \times \{s_0\}$. Para ello, sea $G : \mathbb{R}^{m-k} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ una difeotopía de soporte compacto en \mathbb{R}^{m-k} tal que $G_0 = id_{\mathbb{R}^{m-k}}$ y $G_1(0) = s_0$. Entonces, gracias al soporte compacto de G , podemos construir la difeotopía como

$$F : W \times [0, 1] \longrightarrow W$$

$$(x, t) \quad \mapsto \quad \begin{cases} \varphi^{-1}(y, G(s, t)) & \text{si } x = \varphi^{-1}(y, s) \in U \\ x & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

■

Fijemos $0 < \rho < 1$ y sea $\psi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que ψ_α envía $[0, \rho]$ a $[0, \alpha]$ de forma creciente y $\psi_\alpha(x) = x$ para $x \geq \alpha$. Denotemos con $B_r^\lambda = \{x \in \mathbb{R}^\lambda \mid \|x\| < r\}$ a la de radio $r > 0$. Construyamos, la difeotopía $F^\rho : \mathbb{R}^\lambda \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^\lambda$ por $F(x, t) = \psi_t(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|}$ de manera que $F_0^\rho = id_{\mathbb{R}^\lambda}$, F_t^ρ fija a los puntos con $\|x\| > 2$ y $B_2^\lambda \subset F_2^\rho(B_\rho^\lambda)$.

Supongamos, ahora, que tenemos una λ -asa en dimensión m alargada, a saber $\bar{B}_3^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$. Sea $C \subset \bar{B}_3^\lambda$ un cerrado que no contiene a $0 \in \bar{B}_3^\lambda$ de manera que existe $0 < \rho < 1$ tal que $C \cap B_\rho^\lambda = \emptyset$. Entonces, usando la difeotopía anterior, se tiene que la difeotopía $F^\rho \times id_{\bar{B}^{m-\lambda}} : \bar{B}_3^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda} \times [0, 2] \rightarrow \bar{B}_3^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ fija a los puntos de $(\bar{B}_3^\lambda - \bar{B}_2^\lambda) \times \bar{B}^{m-\lambda}$ y hace $F_2(U) \cap \bar{B}_1^\lambda = \emptyset$.

En particular, hemos construido una isotopía $H : C \times [0, 1] \rightarrow \bar{B}_3^\lambda \times B^{m-\lambda}$ tal que $H_0 = id_C$ y $H_1(C) \cap \bar{B}_1^\lambda \times B^{m-\lambda} = \emptyset$. Más aún, como H no afecta a los puntos de $(\bar{B}_3^\lambda - \bar{B}_2^\lambda) \times \bar{B}^{m-\lambda}$, H puede extenderse a una isotopía $\tilde{H} : C \times [0, 1] \rightarrow W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$ de manera que $\tilde{H}_1(C) \cap \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda} = \emptyset$.

Teorema 4.1.8. (De reordenación de asas). *Sea W una variedad diferencial con frontera y $m = \dim W$. Supongamos que tenemos dos embebimientos engrosados $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \partial W$ y $\phi : S^{\mu-1} \times \bar{B}^{m-\mu} \rightarrow \partial W$ tales que $\lambda \leq \mu$, entonces existe $\tilde{\varphi} : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \partial W$ tal que*

$$W + \mathcal{A}_\phi^\mu + \mathcal{A}_\varphi^\lambda \cong W + \mathcal{A}_{\tilde{\varphi}}^\lambda + \mathcal{A}_\phi^\mu$$

Demostración. Sea $S_t\phi$ la esfera transversal de ϕ y $S_p\varphi$ la esfera de pegado de φ . Como $\dim S_t\phi + \dim S_p\varphi = (m - \mu) + \lambda < m = \dim W$ y $S_t\phi$ tiene un entorno producto (a saber, $\{x \mid \|x\| < 1/2\}^\mu \times S^{m-\mu}$) entonces el lema 4.1.7 afirma que existe una difeotopía que las separa.

De este modo, podemos suponer que $S_t\phi \cap S_p\varphi = \emptyset$, luego, en particular, existe un cerrado $C \subset \partial(W + \mathcal{A}_\phi^\mu + \mathcal{A}_\varphi^\lambda)$ que contiene a $S_p\varphi$ y que no interseca a $0 \in S_t\phi$. Así, por la observación anterior, podemos

construir una isotopía $H : C \times [0, 1] \rightarrow W + \mathcal{A}_\phi^\mu$ tal que $H_1(C) \cap S_p\phi = \emptyset$, ergo, por el lema de isotopía 4.1.4, existe un embebimiento engordado $\tilde{\varphi}$ con $\text{Im } \varphi \subset W - S_p\phi$ tal que $W + \mathcal{A}_\phi^\mu + \mathcal{A}_\varphi^\lambda \cong W + \mathcal{A}_\phi^\mu + \mathcal{A}_{\tilde{\varphi}}^\lambda$. Pero, en ese caso, como $\tilde{\varphi}$ y ϕ tienen imágenes disjuntas, se tiene que $W + \mathcal{A}_\phi^\mu + \mathcal{A}_{\tilde{\varphi}}^\lambda \cong W + \mathcal{A}_{\tilde{\varphi}}^\lambda + \mathcal{A}_\phi^\mu$, como queríamos. ■

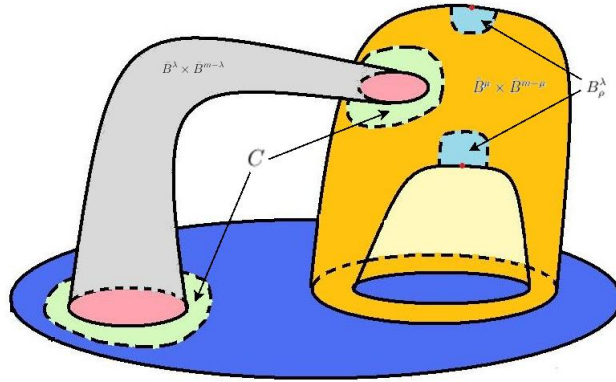


FIGURA 4.1: Proceso de reordenación de asas

Este proceso puede ser iterado cuantas veces sea necesario para conseguir.

Corolario 4.1.9. (Del cobordismo creciente). Dado un cobordismo (W, M_0, M_1) , existen $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r$ tales que

$$W \cong M_0 \times [0, 1] + \sum_{s=1}^{n_1} \mathcal{A}_{\varphi_{1,s}}^{\lambda_1} + \sum_{s=1}^{n_2} \mathcal{A}_{\varphi_{2,s}}^{\lambda_2} + \dots + \sum_{s=1}^{n_r} \mathcal{A}_{\varphi_{r,s}}^{\lambda_r}$$

para ciertos k -embebimientos engrosados $\varphi_{k,s}$ respetando el borde M_0 .

Corolario 4.1.10. Dado un cobordismo (W, M_0, M_1) con $m = \dim W$, existe una función Morse $f : W \rightarrow [-\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}]$ tal que $M_0 = f^{-1}(-\frac{1}{2})$, $M_1 = f^{-1}(m + \frac{1}{2})$ y $f(p) = \text{Index}(p)$ para cada punto crítico $p \in W$. Tal función se denomina una **función Morse auto-indexada**.

4.2. Cancelación de asas

4.2.1. Primeros resultados de cancelación

A partir de este momento, todas las descomposiciones en asas que estudiaremos vendrán dadas por aplicación del teorema 3.3.5 y, por tanto, serán de la forma

$$W = M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=0}^r \mathcal{A}_{\varphi_k}^{\lambda_k}$$

donde, en cada paso de la descomposición el nuevo asa se embebe respetando la componente M_0 de la variedad. De este modo, si M_0 es la componente inalterada de la frontera, denotaremos con $\bar{\partial}M$

la componente de W en la que se realiza la cirugía al añadir un nuevo asa, que denominaremos la **frontera activa** de W , de manera que $\partial W = M_0 \sqcup \bar{\partial}W$.

Más aún, si $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \bar{\partial}W$ es un embebimiento engrosado gracias al cual se puede construir la adjunción de un asa $W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$, entonces con $S_p\varphi$ denotaremos la imagen en $\bar{\partial}W$ de la esfera de pegado de φ , $S_p\varphi = \varphi(S^\lambda \times \{0\})$, mientras que con $S_t\varphi$ denotaremos la imagen de la esfera transversal.

Definición 4.2.1. Sean $N_1, N_2 \subset M$ dos subvariedades diferenciales. Si $p \in N_1 \cap N_2$, diremos que N_1 y N_2 son **transversas** en p si $T_pM = T_pN_1 + T_pN_2$ (no necesariamente suma directa). Si N_1 y N_2 son transversas en todo $p \in N_1 \cap N_2$, se dicen que son transversas.

Definición 4.2.2. Sea W una variedad compacta con frontera de dimensión m y sean $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \bar{\partial}W$ y $\psi : S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \rightarrow \bar{\partial}(W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda)$ dos embebimientos engrosados. Diremos que ψ está **desentrelazado** de φ si $S_p\psi$ es transversal a $S_t\varphi$ y se intersecan en un único punto.

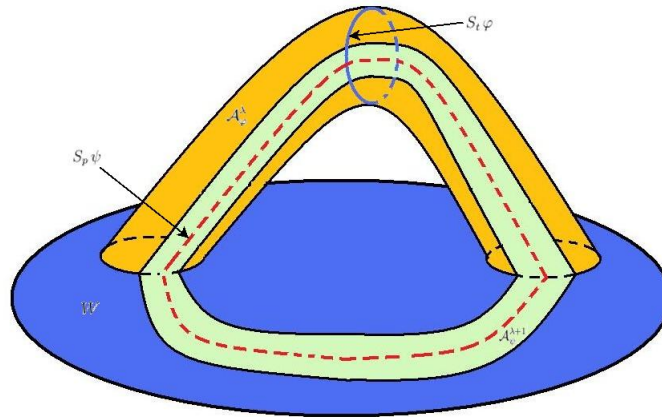


FIGURA 4.2: Asas desentrelazadas

Antes de poder abordar un resultado de cancelación fundamental, observemos que nuestro conocimiento de la suma conexa de variedades nos permite ya anular adjunciones muy concretas.

Lema 4.2.3. Sea W una variedad diferenciable con frontera de dimensión m . Sea $\bar{B}^{m-1} \subset S^{m-1}$ un disco en $S^{m-1} = \partial\bar{B}^m$ y $\varphi : \bar{B}^{m-1} \rightarrow \partial W$. Entonces $W \cup_\varphi \bar{B}^m \cong W$.

Idea de la demostración. Obsérvese que, tras la adjunción del asa, se tiene que, si $N \# M$ denota la suma conexa de N y M , como $N \# S^n \cong N$, entonces $\partial(W \cup_\varphi \bar{B}^m) = \partial W \# S^{m-1} \cong \partial W$. Esto es, la frontera de W se mantiene inalterada tras la operación, a partir de lo cual, como la variedad adjunta es un disco, se tiene que W mismo se mantiene inalterado. ■

Teorema 4.2.4. (De desentrelazamiento). Si $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \bar{\partial}W$ y $\psi : S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \rightarrow \bar{\partial}(W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda)$ son dos embebimientos desentrelazados en W , entonces existe un difeomorfismo tal que $W \cong W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda + \mathcal{A}_\psi^{\lambda+1}$.

Demostración. En primer lugar, observemos que, como $\dim S_p \psi + \dim S_t \varphi = \lambda + (m - \lambda - 1) = m - 1$, la condición de transversalidad significa que si $p \in S_p \psi \cap S_t \varphi$, entonces $T_p(\partial M) = T_p(S_p \psi) \oplus T_p(S_t \varphi)$. Sea $S_p \psi = S_+^\lambda \cup S_-^\lambda$ es la división de la esfera $S_p \psi$ en su hemisferio norte y sur, entonces usando un argumento semejante al que encabezó la demostración del lema 4.1.8 y la hipótesis de transversalidad e intersección única, podemos suponer que $S_p \psi \cap \mathcal{A}_\varphi^\lambda = S_+^\lambda \cong \bar{B}^\lambda \times \{x\} \subset \mathcal{A}_\varphi^\lambda$ para algún $x \in \bar{B}^{m-\lambda-1}$. En consecuencia, se tiene que la frontera de pegado de ψ puede descomponerse en $S_+^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1}$ y $S_-^\lambda \times D^{m-\lambda-1}$, de forma que $S_+^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \subset \mathcal{A}_\varphi^\lambda$ y $(S_-^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1}) \cap \mathcal{A}_\varphi^\lambda = \emptyset$.

Denotemos con W' el resultado de adjuntar $\bar{B}^{\lambda+1} \times \bar{B}^{m-\lambda-1}$ a W por $S_-^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1}$. Entonces, se tiene que $W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda + \mathcal{A}_\psi^{\lambda+1}$ es el resultado de pegar $\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ a W' a lo largo de $(S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}) \cup (S_+^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1}) \cong (S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}) \cup (\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1})$. Así, utilizando el lema previo en cada rodaja de $\bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ se tiene que $W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda + \mathcal{A}_\psi^{\lambda+1} \cong W'$. Ahora bien, como W' es el resultado de adjuntar a W el asa $\bar{B}^{\lambda+1} \times \bar{B}^{m-\lambda-1}$ a través de $S_-^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \cong \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1}$, nuevamente operando rodaja a rodaja, se tiene que W' es isomorfo a W , lo que finaliza la prueba. ■

Definición 4.2.5. Un embebimiento engrosado $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \bar{\partial}W$ se dice **trivial** si φ puede escribirse como una composición de embebimientos $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \bar{B}^{m-1} \rightarrow \bar{\partial}W$.

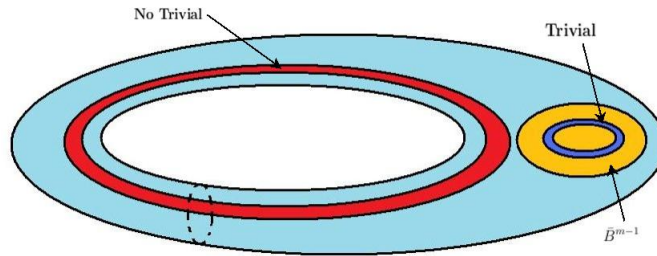


FIGURA 4.3: Ejemplos de embebimientos triviales y no triviales

Corolario 4.2.6. (De cancelación trivial). Sea W una variedad compacta con frontera de dimensión m y sea $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \bar{\partial}$ un embebimiento engrosado trivial. Entonces existe $\psi : S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \rightarrow \bar{\partial}(W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda)$ tal que $W \cong W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda + \mathcal{A}_\psi^{\lambda+1}$.

Demostración. La clave de la prueba está en construir un embebimiento engrosado $\psi : S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \rightarrow W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$ desentrelazado de φ y cancelarlo usando el teorema 4.2.4. Para ello, escogamos $x_0 \in S^{m-\lambda-1}$ cualquiera, de modo que $\phi_1 : \bar{B}^\lambda \rightarrow \mathcal{A}_\varphi^\lambda \cong \bar{B}^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda}$ dado por $\phi_1(x) = (x, x_0)$ interseca a $S_t \varphi \cong \{0\} \times S^{m-\lambda-1}$ una única vez transversalmente.

Es justo al embeber el otro hemisferio cuando entre en juego la trivialidad del embebimiento. En efecto, escribamos $\varphi = f \circ g$ con $g : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \bar{B}^{m-1}$ y $f : \bar{B}^{m-1} \rightarrow \bar{\partial}W$. Usando un argumento parecido al del preámbulo del teorema 4.1.8 puede verse que es posible construir un embebimiento $\tilde{\phi}_2 : \bar{B}^\lambda \rightarrow \bar{B}^{m-1}$ tal que $\text{Im } \tilde{\phi}_2$ únicamente interseque a $\text{Im } g$ en $g(S^{\lambda-1} \times \{x_0\})$. De este modo, se puede pegar $\phi_2 = f \circ \tilde{\phi}_2$ con ϕ_1 para lograr un embebimiento $\phi : S^\lambda \rightarrow W + \mathcal{A}_\varphi^\lambda$ tal que ϕ corte a $S_p \varphi$ en un único punto transversalmente. Así, como $S_t \varphi$ es una subvariedad compacta, puede extenderse

ϕ a un embebimiento $\psi : S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1}$ tal que $S_p \psi$ es transversal a $S_t \varphi$ en su único punto de intersección. ■

4.2.2. Cancelación de asas en índices intermedios

Una vez desarrollados los lemas de cancelación elementales de asas, podemos abordar teoremas de cancelación de asas en condiciones más generales. Comenzaremos por asas de índice intermedio, i.e., λ -asas con $0 < \lambda < m - 2$, para las cuales resulta que, en ciertas condiciones, podemos sustituirlas por $\lambda + 2$ -asas.

Supongamos que tratamos con un cobordismo (W, M_0, M_1) , con $\dim W = m$, para el cual disponemos de una descomposición en asas $W = M_0 \times [0, 1] + \sum_{\mu=0}^m \sum_{k=1}^{n_\mu} \mathcal{A}_{\varphi_k^\mu}^\mu$. Denotemos por W_λ el resultado intermedio de la descomposición añadiendo únicamente hasta asas de índice λ , esto es $W_\lambda = M_0 \times [0, 1] + \sum_{\mu=0}^\lambda \sum_{k=1}^{n_\mu} \mathcal{A}_{\varphi_k^\mu}^\mu$. Más aún, si $\bar{\partial}W_\lambda$ es la frontera activa de W_λ , definimos la **frontera activa inalterada** de W_λ , $\bar{\partial}^0 W_\lambda$, como la parte de la frontera en la cual no se van a realizar pegados de $(\lambda + 1)$ -asas, es decir $\bar{\partial}^0 W_\lambda = \bar{\partial}W_\lambda - \bigcup_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \varphi_k^{\lambda+1}(S^\lambda \times B^{n-\lambda-1})$.

Finalmente, diremos que el cobordismo W es **r -trivial** si existe una descomposición en asas de W sin asas de índice menor que r , es decir, de la forma $W = M_0 \times [0, 1] + \sum_{\mu=r}^m \sum_{k=1}^{n_\mu} \mathcal{A}_{\varphi_k^\mu}^\mu$.

Teorema 4.2.7. (De cancelación de asas intermedias). *Sea W un cobordismo de dimensión m y fijemos λ tal que $0 < \lambda < m - 2$ y supongamos que W es λ -trivial. Escojamos un cierto embebimiento de índice λ , $\varphi_{k_0}^\lambda$ de su descomposición en asas y supongamos que existe un $(\lambda + 1)$ -embebimiento $\psi : S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \rightarrow \bar{\partial}^0 W_\lambda$ tal que*

- *En $\bar{\partial}W_\lambda$: ψ es isótopo a un embebimiento engrosado que está desentrelazado de $\varphi_{k_0}^\lambda$ y cuya esfera transversal es disjunta a de las de otras λ -asas.*
- *En $\bar{\partial}W_{\lambda+1}$: ψ es isótopo a un embebimiento trivial.*

Entonces, $\varphi_{k_0}^\lambda$ puede ser sustituido por un $(\lambda + 2)$ -asa, i.e., existe $\phi : S^{\lambda+1} \times \bar{B}^{m-\lambda-2} \rightarrow \bar{\partial}W_{\lambda+1}$ tal que

$$W = M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=0, k \neq k_0}^{n_\lambda} \mathcal{A}_{\varphi_k^\lambda}^\lambda + \sum_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \mathcal{A}_{\varphi_k^{\lambda+1}}^{\lambda+1} + \mathcal{A}_\phi^{\lambda+2} + \sum_{\mu=\lambda+2}^m \sum_{k=1}^{n_\mu} \mathcal{A}_{\varphi_k^\mu}^\mu$$

Demostración. Supongamos que $W_{\lambda+1}$ es de la forma $W_{\lambda+1} = M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mathcal{A}_{\varphi_k^\lambda}^\lambda + \sum_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \mathcal{A}_{\varphi_k^{\lambda+1}}^{\lambda+1}$. Sea ψ_0 el embebimiento isótopo trivial, entonces, gracias al lema de cancelación trivial 4.2.6 aplicado a ψ_0 se tiene que existe una $(\lambda + 2)$ -asa, $\mathcal{A}_\phi^{\lambda+2}$ tal que ambas cancelan. Así, aplicando también el lema de

isotopía 4.1.4 y el de reordenación 4.1.8 se tiene

$$\begin{aligned}
 W_{\lambda+1} &= M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mathcal{A}_{\varphi_k^\lambda}^\lambda + \sum_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \mathcal{A}_{\varphi_k^{\lambda+1}}^{\lambda+1} + \mathcal{A}_{\psi_0}^{\lambda+1} + \mathcal{A}_\phi^{\lambda+2} \\
 &\cong M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mathcal{A}_{\varphi_k^\lambda}^\lambda + \sum_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \mathcal{A}_{\varphi_k^{\lambda+1}}^{\lambda+1} + \mathcal{A}_\psi^{\lambda+1} + \mathcal{A}_\phi^{\lambda+2} \\
 &\cong M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mathcal{A}_{\varphi_k^\lambda}^\lambda + \mathcal{A}_{\varphi_{k_0}^\lambda}^\lambda + \mathcal{A}_\psi^{\lambda+1} + \sum_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \mathcal{A}_{\varphi_k^{\lambda+1}}^{\lambda+1} + \mathcal{A}_\phi^{\lambda+2}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, como ψ es isotopo en $\bar{\partial}W_\lambda$ a un embebimiento engrosado desentrelazado de $\varphi_{k_0}^\lambda$, entonces por el teorema de desentrelazamiento 4.2.4 $\mathcal{A}_{\varphi_{k_0}^\lambda}^\lambda$ y $\mathcal{A}_\psi^{\lambda+1}$ se cancelan mutuamente, alcanzando la descomposición deseada. ■

Corolario 4.2.8. *Pueden suponerse las mismas hipótesis que en el teorema 4.2.7, pero únicamente suponiendo que las hipótesis de desentrelazamiento y trivialidad se producen en la esfera de pegado, es decir, basta suponer que existe un $(\lambda + 1)$ -embebimiento $\psi : S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \rightarrow \bar{\partial}^0 W_\lambda$ tal que*

- *En $\bar{\partial}W_\lambda : \psi|_{S_p\psi}$ es isotopo a un embebimiento $\chi : S^\lambda \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$ transversal a $S_t\varphi_{k_0}^\lambda$ y con intersección en el único punto, cuya esfera transversal es disjunta a de las de otras λ -asas.*
- *En $\bar{\partial}W_{\lambda+1} : \psi|_{S_p\psi}$ es isotopo a un embebimiento $\chi' : S^\lambda \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$ trivial, i.e., tal que χ' se escribe como la composición de embebimientos $\chi' : S^\lambda \rightarrow D^{m-1} \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$*

Demostración. Obsérvese que χ puede ser extendido a un embebimiento $\varphi_1 : S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$ desentrelazado de $\varphi_{k_0}^\lambda$ y sin intersectar otras esferas transversales, mientras que χ' puede ser extendido a un embebimiento $\varphi_2 : S^\lambda \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$ trivial. Entonces, basta aplicar el corolario 4.1.3 para volver a encontrarnos en las hipótesis del teorema 4.2.7. ■

4.2.3. Cancelación de asas en índices bajos

Definición 4.2.9. Una aplicación continua $f : N \rightarrow M$ se dice **n -conexa** las aplicaciones inducidas en los grupos de homotopía $\pi_k(f) : \pi_k(N) \rightarrow \pi_k(M)$ son isomorfismos para $k < n$ y $\pi_n(f) : \pi_n(N) \rightarrow \pi_n(M)$ es un epimorfismo.

Ejemplo 4.2.10. Si N y M son simplemente conexos, entonces toda aplicación $f : N \rightarrow M$ es 1-conexa.

Proposición 4.2.11. *Todo cobordismo conexo es 1-trivial.*

Demostración. Sea (W, M_0, M_1) nuestro cobordismo conexo. En primer lugar, recordemos que una 0-asa es $\bar{B}^0 \times \bar{B}^m$, embebido en W a través de $\partial\bar{B}^0 \times \bar{B}^m = \emptyset$. En consecuencia, añadir un 0-asa a $M_0 \times [0, 1]$ es añadir una componente conexa difeomorfa a \bar{B}^m . Ahora bien, como W es conexo,

cada una de estas componentes deberá estar conectada con $M_0 \times [0, 1]$ a través de un asa de índice superior. Sin embargo, como $S^{\lambda-1}$ es conexo para $\lambda > 1$, la única opción es que $\lambda = 1$. Ahora bien, la esfera transversal de una 0-asa es su frontera S^{m-1} , mientras que la esfera de pegado de una 1-asa son únicamente dos puntos, cada uno de los cuales está en una componente conexa de $S^0 \times \bar{B}^{m-1}$. En consecuencia, únicamente uno de los dos puntos de la esfera de pegado de esa 1-asa de conexión puede intersectar a la esfera transversal de la 0-asa y, por tanto, automáticamente están desentrelazadas. El resultado es ya inmediato usando el lema de desentrelazamiento 4.2.4. ■

Teorema 4.2.12. (De cancelación de asas en dimensión baja). *Si (W, M_0, M_1) es un cobordismo con $\dim W \geq 6$ y tal que la inclusión $M_0 \hookrightarrow W$ es 1-conexa, entonces W es 2-trivial.*

Más aún, dada cualquier función Morse de cobordismo $f : W \rightarrow [0, 1]$ existe otra función Morse de cobordismo $\tilde{f} : W \rightarrow [0, 1]$ tal que \tilde{f} no tiene puntos críticos de índices 0 y 1 y el número de puntos críticos de índice m y $m - 1$ para f y \tilde{f} es el mismo.

Demostración. Gracias a la proposición anterior, podemos suponer que W es 1-trivial, i.e., que no posee 0-asas. Sea \mathcal{A}_φ^1 una 1-asa. La clave de la prueba es construir un nudo $\psi : S^1 \rightarrow \bar{\partial}^0 W_1$ que interseque a la esfera transversal $S_t \varphi$ transversalmente en un único punto y tal que sea isótropo a un embebimiento trivial. De este modo, podremos usar el lema de desentrelazamiento 4.2.4 para intercambiar la 1-asa por una 3-asa.

La construcción del candidato es sencilla. En efecto, sea $x_0 \in S^{m-2}$ y definamos el embebimiento del semicírculo superior $\psi_+ : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{A}_\varphi^1$ por $\psi_+(x) = (x, x_0)$. Como $\pi_1(\bar{\partial}^0 W_0) \rightarrow \pi_1(W)$ es un epimorfismo, induce un epimorfismo de grupoides fundamentales $i_* : \Pi_1(\bar{\partial}^0 W_0) \rightarrow \Pi_1(W)$. De este modo, si ψ_- un representante de $i_*^{-1}(\psi_+)$ en $\bar{\partial}^0 W_0$, entonces se tiene que $\psi = \psi_- \star \psi_+ : S^1 \rightarrow \bar{\partial}^0 W_0$ es homotópicamente nula en W . Más aún, por construcción se tiene que ψ interseca a la esfera transversal de \mathcal{A}_φ^1 transversalmente en un único punto.

El objetivo, ahora, es ver que ψ es homotópicamente nula en $\bar{\partial} W_2$. Para ello, observemos en primer lugar que, ψ es homotópicamente nula en W_2 , pues toda λ -asa con $\lambda \geq 3$ tiene a su frontera de pegado $S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda}$ simplemente conexa. Así, volviendo a razonar con el grupoide fundamental, puede obligarse a que la homotopía esquive las λ -asas y, por tanto, esté definida en W_2 . Análogos argumentos con las 1-asas y las 2-asas permiten garantizar que la homotopía puede escogerse para estar confinada en $\bar{\partial} W_2$.

Ahora bien, esta homotopía puede entenderse como una inmersión $f : \bar{B}^2 \rightarrow \bar{\partial} W_2$ diferenciable en S^1 . De este modo, apelando al teorema débil del embebimiento de Whitney 4.4.9, como $\dim \bar{\partial} W_2 \geq 5 = 2 \dim \bar{B}^2 + 1$, podemos suponer que la homotopía es un embebimiento que, extendiéndose a un pequeño entorno tubular, nos muestra que ψ es trivial en $\bar{\partial} W_2$ como queríamos. Así, basta usar el lema de desentrelazamiento 4.2.4 para eliminar la 1-asa a coste de crear una 3-asa. ■

Observación 4.2.13. La prueba requiere el uso de forma crucial del teorema débil del embebimiento de Whitney, que únicamente aplica en dimensiones altas del cobordismo. Es, por tanto, la primera traba a que el teorema generalice a dimensiones bajas.

Corolario 4.2.14. *Si (W, M_0, M_1) es un cobordismo con $m = \dim W \geq 6$ y tal que las inclusiones $M_0, M_1 \hookrightarrow W$ son 1-conexas, entonces existe una descomposición en asas de W sin asas de índice 0, 1, m y $m - 1$, es decir, tal que*

$$W \cong M_0 \times [0, 1] + \sum_{\mu=2}^{m-2} \sum_{k=1}^{n_\mu} \mathcal{A}_{\varphi_k^\mu}^\mu$$

Demostración. Usando el teorema anterior, podemos eliminar todas las 0 y 1-asas del cobordismo. Ahora bien, si $f : W \rightarrow [0, 1]$ es la función Morse que realiza la descomposición en asas anterior, entonces $-f$ realiza una descomposición en asas en la que cada λ -asa original queda sustituida por una única $(m - \lambda)$ -asa.

Así, la descomposición inducida por $-f$ no tiene asas en los índices m y $m - 1$. De este modo, aplicando nuevamente el teorema anterior, conseguimos eliminar las 0 y las 1-asas de la descomposición anterior y, por tanto, conseguir la descomposición deseada. ■

4.3. Demostración del teorema del h-cobordismo

4.3.1. El lema de la forma normal

La importancia de la homología Morse reside en el siguiente teorema, que concentra toda la esencia del teorema del h-cobordismo. Obsérvese que, en su demostración, resulta crucial el uso del **truco de Whitney** que es el resultado técnico fundamental para la prueba del resultado que nos ocupa.

Supongamos que tenemos un cobordismo W , sobre el que definimos un embebimiento $f : S^\lambda \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$. Gracias al homomorfismo de Hurewicz $\Delta : \pi_\lambda(M) \rightarrow H_\lambda(M)$ dado por $\Delta([f]) = f_*(S^\lambda)$ podemos definir la composición

$$\pi_\lambda(W_\lambda) \rightarrow H_\lambda(W_\lambda) \rightarrow H_\lambda(W_\lambda, M_0) \cong H_\lambda^W(C_*)$$

de manera que a cada $f : S^\lambda \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$ le podemos asociar un elemento en $H_\lambda^W(C_*)$ que denotaremos por $[f]$.

Más aún, recordemos que, por el teorema 3.3.8, a cada λ -asa $\mathcal{A}_\varphi^\lambda$ le corresponde un punto crítico de índice λ para alguna función Morse, digamos $p \in W$. Ahora bien, si suponemos que W es λ -trivial, entonces se tiene que la aplicación $\partial : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ es idénticamente nula y, por tanto $p \in \ker \partial$. En particular, pasando al cociente p define un elemento de $H_\lambda^M(C_*)$ unívocamente determinado por $\mathcal{A}_\varphi^\lambda$, que denotaremos por $[\mathcal{A}_\varphi^\lambda]$.

La relación entre $[f]$ y $[\mathcal{A}_\varphi^\lambda]$ queda plasmada en el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrar, por ejemplo, en [8].

Teorema 4.3.1. *Sea $f : S^\lambda \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$ un embebimiento sobre un h -cobordismo λ -trivial con λ -asas $\mathcal{A}_{\varphi_1}^\lambda, \dots, \mathcal{A}_{\varphi_{n_\lambda}}^\lambda$, entonces*

$$[f] = \sum_{k=1}^{n_\lambda} \left(\sum_{p \in f(S^\lambda) \cap S_t \varphi_k} \epsilon_p(\text{Im } f, S_t \varphi_k) \right) [\mathcal{A}_{\varphi_k}^\lambda]$$

Gracias a este cálculo, podemos demostrar un lema de gran importancia, conocido como el lema de homología.

Lema 4.3.2. (De homología). *Sea (W, M_0, M_1) un h -cobordismo con $\dim W \geq 6$ y sea $1 < \lambda < m - 2$ tal que W es λ -trivial. Sea $f : S^\lambda \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$ un embebimiento tal que $[f] = \pm[\mathcal{A}_{\varphi_{k_0}}^\lambda]$ para algún asa $\mathcal{A}_{\varphi_{k_0}}^\lambda$ entonces f es isotopo a una aplicación que interseca a $S_t \varphi_{k_0}$ transversamente en un solo punto y que no interseca a la esfera transversal de ninguna otra λ -asa.*

Demostración. Gracias al teorema 4.3.1 se tiene que, salvo para un punto $p_0 \in f(S^\lambda) \cap S_t \varphi_{k_0}$ para cada $k = 1, \dots, n_\lambda$, a cada punto $p \in f(S^\lambda) \cap S_t \varphi_k$ con $\epsilon_p = 1$ le corresponde otro punto p' con $\epsilon_{p'} = -1$. Mas aún, como ambos puntos pertenecen a la esfera transversal de la misma λ -asa con $1 < \lambda < m - 2$, pueden ser conectados por un par de caminos $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_{\varphi_k}^\lambda$ y $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_{\varphi_k}^\lambda$ con $\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = p$ y $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = p'$ tales que $\gamma_1 \star \gamma_2$ es contractil. Así, por el truco de Whitney (ver teorema 4.4.1) puede isotoparse f a una aplicación con los mismos puntos de corte con $S_t \varphi_k$ salvo p y p' , de donde, por inducción, se desprende el resultado. ■

Observación 4.3.3. La dimensión de W resulta crucial en la demostración al depender del truco de Whitney. Es precisamente por el incumplimiento de este lema por lo que el argumento del h -cobordismo no generaliza a dimensiones bajas.

Usando un argumento análogo mediante homología Morse, puede probarse el siguiente resultado (véase, por ejemplo, [5]).

Lema 4.3.4. (De modificación). *Sea (W, M_0, M_1) un h -cobordismo con $\dim W \geq 6$ y sea $f : S^\lambda \rightarrow \bar{\partial}^0 W_\lambda$ un embebimiento. Escojamos un borde $b \in \text{Im } \partial : C_{\lambda+1} \rightarrow C_\lambda$, entonces existe un embebimiento $g : S^\lambda \rightarrow \bar{\partial}^0 W_\lambda$ isotópico a f en $\bar{\partial} W_{\lambda+1}$ tal que*

$$[g] = [f] + b$$

Lema 4.3.5. (De la forma normal). *Sea (W, M_0, M_1) un h -cobordismo orientado con $m = \dim W \geq 6$. Entonces, para cualquier $1 < \lambda < m - 2$ existe un difeomorfismo*

$$W \cong M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mathcal{A}_{\varphi_k}^\lambda + \sum_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \mathcal{A}_{\psi_k}^{\lambda+1}$$

Demostración. Probaremos que, para cualquier $1 < n < m - 2$, podemos modificar la descomposición en asas de W para que no contenga asas de índice menor que n manteniendo inalterado el número de asas para índice mayor que $n + 1$. Una vez establecido este resultado, observemos que la prueba termina pues basta tomar $n = \lambda$ para eliminar las asas de índice menor que λ y volver a realizar el proceso en la descomposición dual (i.e. la inducida por la función de Morse $-f$) con $n = m - \lambda - 1$ para eliminar todas las asas de índice mayor que $\lambda + 1$.

Realizaremos la prueba por inducción sobre n . El caso base $n = 2$ está cubierto por el teorema 4.2.12. Para el paso de inducción, supongámonos cierto para n y demostrémoslo para $n + 1$. La clave reside en canjear todas las asas de índice n por un número igual de asas de índice $n + 2$. Para ello, encontraremos un embebimiento $f : S^n \rightarrow \bar{\partial}^0 W_n$ al que aplique el lema de cancelación de asas intermedias 4.2.7.

Sea, así \mathcal{A}_ψ^n una n -asa y sea $[\mathcal{A}_\psi^n]$ su clase de homología. Como por hipótesis de inducción W es n -trivial y $H_n(W, M_0) = 0$, entonces la aplicación $\partial : C_{n+1} \rightarrow C_n$ es un epimorfismo, luego, en particular, $[\mathcal{A}_\psi^n] \in \text{Im } \partial$.

Escojamos, ahora, un embebimiento trivial $\phi : S^n \times \bar{B}^{m-n-1} \rightarrow \bar{\partial}^0 W_n$ (basta con embeberlo en un pequeño disco alrededor de algún $p \in \bar{\partial}^0 W_n$). Entonces, aplicando el lema de modificación 4.3.4, podemos encontrar otro embebimiento engrosado $\tilde{\phi}$ isótopo a ϕ en $\bar{\partial} W_{n+1}$ tal que

$$[\tilde{\phi}|_{S^n \times \{0\}}] = [\phi|_{S^n \times \{0\}}] + [\mathcal{A}_\psi^n] = [\mathcal{A}_\psi^n]$$

puesto que $[\phi|_{S^n \times \{0\}}] = 0$ por ser homotópicamente nulo al ser trivial. De este modo, por el lema de homología 4.3.2, $\tilde{\phi}$ es isótopo a un embebimiento desentrelazado de ψ en $\bar{\partial} W_n$. En consecuencia, usando el teorema de cancelación de asas intermedias 4.2.7 aplicado mediante $\tilde{\phi}$, podemos intercambiar la n -asa inducida por ψ por una $(n + 2)$ -asa, tal y como queríamos. ■

4.3.2. Finalización de la demostración del teorema del h-cobordismo

Una vez demostrado el lema de la forma normal, nos hallamos a las puertas de la demostración del teorema del h-cobordismo. Para ello, observemos que tras pasarlo a forma normal, para cualquier $1 < \lambda < n - 1$, nuestro cobordismo queda de la forma

$$W \cong M_0 \times [0, 1] + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mathcal{A}_{\varphi_k}^\lambda + \sum_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \mathcal{A}_{\psi_k}^{\lambda+1}$$

Más aún, como $0 = H_\lambda(W, M_0) = H_\lambda(C_*)$ se tiene que $\partial : C_{\lambda+1} \rightarrow C_\lambda$ es un isomorfismo de grupos abelianos libres, esto es, de \mathbb{Z} -módulos libres. De este modo, eligiendo sendos generadores minimales de los \mathbb{Z} -módulos libres C_λ y $C_{\lambda+1}$, ∂ queda unívocamente determinada por una matriz cuadrada con coeficientes en \mathbb{Z} , llamémosla A tal que la entrada a_{ij} de A es el cardinal algebraico del móduli de líneas de flujo entre el punto crítico contenido en la $(\lambda + 1)$ -asa i -ésima y la λ -asa j -ésima.

Supongamos que A fuese diagonal. Como A tiene que ser invertible como matriz con coeficientes en \mathbb{Z} (por ser ∂ un isomorfismo) su determinante debe ser invertible en \mathbb{Z} , lo cual solo es posible si $\det A = \pm 1$. En consecuencia, todas las entradas de A deben ser ± 1 . Aplicando el truco de Whitney podemos cancelar las intersecciones hasta conseguir que cada λ -asa esté desentrelazada de una $(\lambda + 1)$ -asa y solo una. Así, por el teorema de desentrelazamiento 4.2.4 podríamos cancelar cada λ -asa con una $(\lambda + 1)$ -asa y conseguir una descomposición trivial del cobordismo.

En caso de que A no fuese diagonal, usando el método de Gauss-Jordan, A puede transformarse en una matriz diagonal mediante operaciones elementales. Ahora bien, para cada operación elemental τ sobre A puede realizarse una operación sobre las asas del h-cobordismo que hace que $\tau(A)$ sea la matriz de una descomposición en asas de W para cierto λ , a saber

- Sumar a la i -ésima fila α veces la j -ésima fila con $\alpha \in \mathbb{Z}$: Aplicar el teorema de modificación a $\mathcal{A}_{\varphi_i}^\lambda$ para isotoparla a un asa $\mathcal{A}_{\tilde{\varphi}_i}^\lambda$ con $[\mathcal{A}_{\tilde{\varphi}_i}^\lambda] = [\mathcal{A}_{\varphi_i}^\lambda] + \alpha[\mathcal{A}_{\varphi_j}^\lambda]$. De ese modo, por el lema de isotopía cambiar φ por $\tilde{\varphi}$ no altera el cobordismo, pero la matriz se modifica como deseamos.
- Multiplicar la fila i -ésima por -1 : Precomponer el embebimiento $\varphi_i^\lambda : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow \bar{\partial}W_\lambda$ con $f \times id_{\bar{B}^{m-\lambda}} : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \rightarrow S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda}$ donde $f : S^{\lambda-1} \rightarrow S^{\lambda-1}$ es un difeomorfismo de grado -1 (existe porque $\deg : \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo). Así cambia la orientación de la variedad descendente y, por tanto, se invierten los coeficientes de la i -ésima fila de A .
- Intercambiar dos filas o dos columnas: Renombrar asas.

De este modo, tras este procedimiento alcanzamos una matriz diagonal que corresponde a la matriz de $\partial : C_{\lambda+1} \rightarrow C_\lambda$ para alguna forma normal de W . Sin embargo, hemos visto que, en esa situación, W es trivial y, por tanto, hemos demostrado al fin.

Teorema 4.3.6. *(Del h-cobordismo.)* *Todo h-cobordismo (W, M_0, M_1) cumpliendo $\dim M_0 \geq 5$ es trivial.*

4.4. Truco de Whitney

Para finalizar la demostración del teorema del h-cobordismo, únicamente estamos a expensas de probar un resultado conocido como el **truco de Whitney**. Como veremos, este resultado, aunque ciertamente intuitivo, requiere un gran despliegue técnico y su demostración permite entrever por qué la topología de bajas dimensiones es esencialmente distinta que la topología de altas dimensiones entendiendo por qué 4 es el punto de inflexión.

Teorema 4.4.1. *(Truco de Whitney.)* *Sea W una variedad diferenciable de dimensión $r + s$ y sean $M_1, M_2 \subset W$ dos variedades cerradas y transversales, de dimensiones r y s respectivamente. Supongamos que M_1 y el fibrado normal a M_2 están orientados de tal forma que para todo $p \in M_1 \cap M_2$ puede definirse su número de intersección ϵ_p . Supongamos que*

- $r + s \geq 5$ y $s \geq 3$.
- Si $r = 1$ o $r = 2$, la aplicación inducida por la inclusión $\pi_1(W - M_2) \rightarrow \pi_1(W)$ es inyectiva.

Sean $x, y \in M_1 \cap M_2$ dos puntos con números de intersección opuestos ($\epsilon_x = -\epsilon_y$) y supongamos que existen dos caminos entre ellos $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M_1$ y $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M_2$ tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = x$ y $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = y$, $\gamma_2 \star \gamma_1$ es contractil en W y tanto γ_1 como γ_2 no intersecan a otros puntos de $M_1 \cap M_2$. Entonces existe una isotopía $f : M_1 \times [0, 1] \rightarrow V$ tal que

- $f_0 = id_{M_1}$
- $f_1(M_1) \cap M_2 = M_1 \cap M_2 - \{x, y\}$
- La isotopía es constante un entorno de $M_1 \cap M_2 - \{x, y\}$ y fuera de una bola abierta conteniendo a $\text{Im } \gamma_1$ y $\text{Im } \gamma_2$.

La clave de la demostración es observar que, en un caso particular, conocido como el *dibujo estándar*, la prueba es trivial y que el caso general se puede reducir a éste. El dibujo estándar consiste en dos parábolas, una cóncava y otra convexa en \mathbb{R}^2 que se intersecan dejando un disco D entre ambas, tal y como se muestra en la figura 4.4.

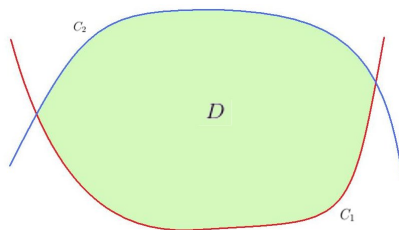


FIGURA 4.4: Dibujo estándar

Embebamos todo el dibujo en un entorno U de D . En ese caso, desplazando γ_1 hacia arriba y γ_2 hacia abajo, como se muestra en la figura 4.5, puede construirse una isotopía $H : C_1 \rightarrow U$ tal que $H_0 = id_U$, $H_1(C_1) \cap C_2 = \emptyset$ y H es constante fuera de una bola contenida en U que contiene a D .

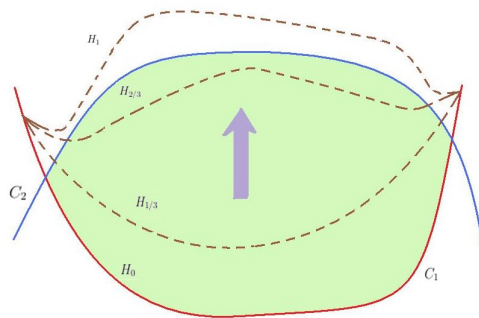


FIGURA 4.5: Aplicando el truco de Whitney al dibujo estándar

Supongamos, entonces que podemos embeber el dibujo estándar en W mediante un embebimiento $\varphi : U \hookrightarrow W$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \hookrightarrow & U & \longleftarrow & C_2 \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ \text{Im } \gamma_1 & \hookrightarrow & W & \longleftarrow & \text{Im } \gamma_2 \end{array}$$

y tal que si $B = \text{Int}(D)$ es el interior del disco D , entonces $\varphi(B) \subset W - (M_1 \cup M_2)$.

Más aún, supongamos que φ se extiende a un embebimiento abierto $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \hookrightarrow W$ tal que $\tilde{\varphi}^{-1}(M_1) = C_1 \times \mathbb{R}^{r-1} \times \{0\}$ y $\tilde{\varphi}^{-1}(M_2) = C_2 \times \{0\} \times \mathbb{R}^{s-1}$.

En esta situación la prueba es casi inmediata, pues si extendemos H_t a $\tilde{H}_t : C_1 \times \mathbb{R}^{r-1} \times \{0\}$ de manera que sea constante en la dirección de \mathbb{R}^{r-1} lejos de 0, entonces $f_t : \tilde{\varphi} \circ \tilde{H}_t \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ es la isotopía buscada.

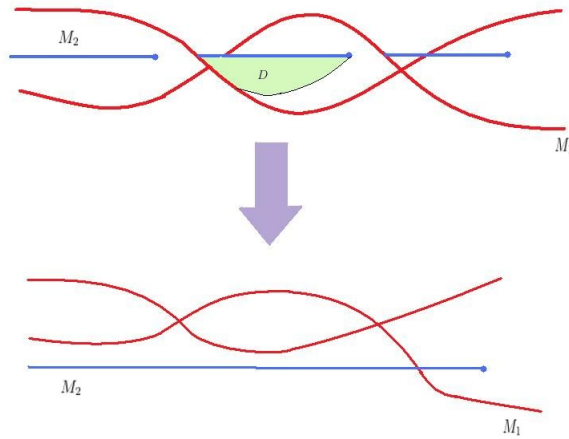


FIGURA 4.6: Ejemplo de uso del truco de Whitney

De este modo, hemos reducido el truco de Whitney a encontrar un embebimiento $\varphi : U \rightarrow W$ y a demostrar el siguiente teorema de extensión.

Lema 4.4.2. Sean $M_1, M_2 \subset W$ como en el truco de Whitney. Sean C_1 y C_2 curvas suaves en \mathbb{R}^2 acotando un disco $D \subset \mathbb{R}^2$ y un embebimiento $\varphi : C_1 \cup C_2 \rightarrow W$ tal que

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \hookrightarrow & C_1 \cup C_2 & \longleftarrow & C_2 \\ \varphi|_{C_1} \downarrow & & \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi|_{C_2} \\ \text{Im } \gamma_1 & \hookrightarrow & W & \longleftarrow & \text{Im } \gamma_2 \end{array}$$

Entonces existe un entorno U de D y una extensión $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow W$ de φ tal que

$$\tilde{\varphi}^{-1}(M_1) = C_1 \times \mathbb{R}^{r-1} \times \{0\} \qquad \tilde{\varphi}^{-1}(M_2) = C_2 \times \{0\} \times \mathbb{R}^{s-1}$$

4.4.1. Herramientas técnicas y el teorema de extensión

Para finalizar la prueba del truco de Whitney necesitaremos los siguientes resultados técnicos, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [10].

Proposición 4.4.3. *Sea $M \subset W$ una subvariedad de codimensión al menos 3, entonces la aplicación inducida $\pi_1(W - M) \rightarrow \pi_1(W)$ es un monomorfismo.*

Observación 4.4.4. En particular, este teorema afirma que, si W es simplemente conexo y M es de codimensión al menos tres, entonces $W - M$ es simplemente conexo.

Proposición 4.4.5. *En las hipótesis del truco de Whitney, supongamos que γ_1 y γ_2 acotan un disco embebido $D \subset W$. Entonces existe una base ortonormal $X_1, \dots, X_{r-1}, Y_1, \dots, Y_{s-1}$ del fibrado normal de D tal que X_1, \dots, X_{r-1} restringidos a γ_1 forman una base del fibrado normal de γ_1 en M_1 y Y_1, \dots, Y_{s-1} restringidos a γ_2 forman una base del fibrado normal de γ_2 en M_2 .*

Definición 4.4.6. Sea (W, g) una variedad riemanniana y sea $M \xrightarrow{i} W$ una subvariedad. Diremos que M **totalmente geodésico** si toda geodésica de (M, i^*g) es geodésica en W .

Observación 4.4.7. Esta condición es equivalente a que toda geodésica que parte de M paralela a M permanece en M .

Proposición 4.4.8. *Para cualquier subvariedad cerrada $M \subset W$, existe una métrica riemanniana en W que hace a M totalmente geodésico.*

Y quizá el teorema más importante, debido al cual el truco de Whitney recibe su nombre, es el siguiente. Su prueba puede encontrarse, por ejemplo, en [17].

Teorema 4.4.9. (Débil del embebimiento de Whitney.) *Sea $f : M \rightarrow W$ una función continua que es un embebimiento (y por tanto diferenciable) en un conjunto cerrado $A \subset M$. Entonces, si $\dim W \geq 2 \dim M + 1$, existe un embebimiento $g : M \rightarrow W$ homótopo a f y tal que $g|_A = f|_A$.*

Gracias a estos resultados, podemos probar un primer lema.

Lema 4.4.10. *Sean $M_1, M_2 \subset W$ con las dimensiones como en el truco de Whitney, entonces la aplicación inducida $\pi_1(W - (M_1 \cup M_2)) \rightarrow \pi_1(W)$ es un monomorfismo.*

Demostración. Aplicaremos la proposición 4.4.3 dos veces a las aplicaciones inducidas por las inclusiones $W - (M_1 \cup M_2) \hookrightarrow W - M_2 \hookrightarrow W$. Para la segunda aplicación, recordemos que, por la proposición 4.4.3, si $r \geq 3$ entonces la aplicación es un monomorfismo, mientras que, si $r = 1, 2$, era una hipótesis del teorema. Respecto a la primera inclusión, como por hipótesis $s \geq 3$ entonces la codimensión de $M_1 - M_2$ en $W - M_2$ es al menos 3 y, por tanto, el resultado se sigue nuevamente de la proposición 4.4.3. ■

Demostración de lema 4.4.2. Por el lema anterior se tiene que $\pi_1(W - (M_1 \cup M_2)) \rightarrow \pi_1(W)$ es un monomorfismo. De este modo, como $\gamma_2 \star \gamma_1$ es homotópicamente nulo en W también lo será en $W - (M_1 \cup M_2)$. Existe, por tanto, una aplicación $f : [0, 1] \times [0, 1] \cong D \rightarrow W$ tal que $f(S^1) = \text{Im } \gamma_1 \cup \text{Im } \gamma_2$. En particular, f es diferenciable en S^1 y, por tanto, como $\dim W \geq 5 = 2 \cdot \dim D + 1$ por el teorema débil del embebimiento, podemos suponer que f es un embebimiento.

Observación 4.4.11. Este es el punto crucial en el que se requiere la hipótesis de dimensión alta. Sin ella, no es posible garantizar que el disco quede embebido, sino únicamente inmerso, lo que hace fracasar al resto del argumento. Esto provoca, por ejemplo, que el teorema del h-cobordismo resulte muy complicado para $\dim M_0 = 3$ y falso en dimensión 4.

Más aún, usando un entorno tubular alrededor de S^1 , podemos extender el embebimiento f a un entorno U de D , extensión que seguiremos denotando por f . Gracias a ella, definimos la aplicación $\psi : U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow W$ mediante $\psi(u, x_1, \dots, x_{r-1}, y_1, \dots, y_{s-1}) = \exp_{f(u)}(\sum x_k X_k + \sum y_k Y_k)$, donde $\exp_p(v)$ denota la aplicación exponencial que parte de $p \in W$ con velocidad $v \in T_p W$ respecto a una métrica riemanniana en la que M_1 y M_2 sean totalmente geodésicos.

Lamentablemente, ψ puede no ser inyectiva y, por tanto, un embebimiento. Para solucionarlo, simplemente basta notar que, como la aplicación exponencial es un difeomorfismo local en 0, existe una bola de radio ϵ alrededor de $0 \in \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1}$ en la que ψ es un embebimiento (quizá restringiendo más U). Entonces, definiendo $\tilde{\psi}(u, z) = \psi(u, \frac{2\epsilon}{\pi} \text{atan}\|z\|)$ se tiene que $\tilde{\psi}$ sí es un embebimiento. Además, como M_1 y M_2 son totalmente geodésicos para la métrica riemanniana escogida se tiene que $\tilde{\psi}^{-1}(M_1) = C_1 \times \mathbb{R}^{r-1} \times \{0\}$ y $\tilde{\psi}^{-1}(M_2) = C_2 \times \{0\} \times \mathbb{R}^{s-1}$ y, por tanto, $\tilde{\psi}$ es el embebimiento deseado. ■

Apéndice A

Dualidad de Lefschetz-Poincaré

Utilizando los resultados que la teoría Morse nos ha brindado para cobordismos, junto con varias técnicas de topología algebraica, podemos extender el teorema de dualidad de Poincaré.

Recuérdese que este resultado afirma que para variedades orientables compactas sin frontera, M , se tiene la dualidad $H^k(M) \cong H_{m-k}(M)$ que emana del estudio del *cap product* con la forma de orientación de M (para todas las definiciones, véase por ejemplo [2]). Nuestro objetivo en esta sección es extender este resultado a cobordismos, lo que nos resultará de gran utilidad. Para ello, en primer lugar recordemos los teoremas clásicos de dualidad, que únicamente aplican a variedades sin frontera.

Teorema A.0.12. (Dualidad de Poincaré-Alexander.) *Sea N una variedad diferenciable orientada de dimensión m y sea $K \subset N$ un compacto. Sea $[N]$ la clase fundamental de N dada por su orientación, entonces la aplicación $f \mapsto f \cap [N]$ induce un isomorfismo.*

$$\cdot \cap [N] : H^n(K) \xrightarrow{\cong} H_{m-k}(N, N - K)$$

Gracias a este resultado, podemos probar nuevas dualidades para variedades con frontera, que son las que nos resultarán de mayor utilidad para nuestro objetivo de estudiar cobordismos.

Teorema A.0.13. (Dualidad de Lefschetz-Poincaré.) *Sea M una variedad orientada, conexa, compacta y con frontera y sea $m = \dim M$, entonces*

$$H^n(M) \cong H_{m-n}(M, \partial M) \quad H^n(M, \partial M) \cong H_{m-n}(M)$$

Más aún, si $[M] \in H_m(M, \partial M)$ es la clase fundamental de M , entonces el ambos isomorfismos vienen dados por $f \mapsto f \cap [M]$.

Demostración. En primer lugar, obsérvese que no basta con aplicar el lema de Poincaré a M porque, en su forma original, únicamente aplica a variedades compactas sin frontera. Sin embargo, con un poco de trabajo, podemos evitar las complicaciones asociadas a la frontera.

Comencemos con el isomorfismo $H^n(M) \cong H_{m-n}(M, \partial M)$. Gracias al lema del collar 2.2.10, se tiene que existe un entorno de ∂M difeomorfo a $\partial M \times [0, 1)$. Así, como $M - \partial M \times [0, 1)$ es un retracto de deformación de M se tiene que

$$H^n(M) \cong H^m(M - \partial M \times [0, 1))$$

Entonces, considerando el compacto $K = M - \partial M \times [0, 1)$ y la variedad sin frontera $N = M - \partial M$, la dualidad de Poincaré-Alexander A.0.12 dice que

$$H^m(M - \partial M \times [0, 1)) \cong H_{m-n}(M - \partial M, \partial M \times (0, 1))$$

Ahora, aplicando el axioma de escisión con el subconjunto $A = \partial M$ se tiene que

$$H_{m-n}(M - \partial M, \partial M \times (0, 1)) = H_{m-n}((M - \partial M, \partial M \times [0, 1)) - \partial M) \cong H_{m-n}(M, \partial M \times [0, 1))$$

Finalmente, como $(M, \partial M \times [0, 1))$ es un retracto de deformación de $(M, \partial M)$ se tiene que

$$H_{m-n}(M, \partial M \times [0, 1)) \cong H_{m-n}(M, \partial M)$$

Más aún, por la naturalidad del *cap product*, todos estos isomorfismos conmutan con la aplicación directa $\cdot \cap [M] : H^n(M) \rightarrow H_{m-k}(M, \partial M)$, por lo que ella también genera el isomorfismo.

Para el otro isomorfismo $H^n(M, \partial M) \cong H_{m-n}(M)$, consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{n-1}(M) & \longrightarrow & H^{n-1}(\partial M) & \xrightarrow{\partial^*} & H^n(M, \partial M) & \longrightarrow & H^n(M) & \longrightarrow & H^n(\partial M) \\ \cong \downarrow \cap [M] & & \cong \downarrow \cap [\partial M] & & \downarrow \cap [M] & & \cong \downarrow \cap [M] & & \cong \downarrow \cap [\partial M] \\ H_{m-(n-1)}(M, \partial M) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{m-n}(\partial M) & \longrightarrow & H_{m-n}(M) & \longrightarrow & H_{m-n}(M, \partial M) & \longrightarrow & H_{m-n}(\partial M) \end{array}$$

Obsérvese que, por el axioma de exactitud para las inclusiones $\partial M \hookrightarrow M \hookrightarrow (M, \partial M)$, las filas de este diagrama son exactas.

Más aún, recordando que $\partial_*[M] = [\partial M]$, se deduce de las propiedades del *cap product* y la definición del homomorfismo de borde que todos los cuadrados conmutan salvo signo. De este modo, por el lema de los cinco, se tiene que el morfismo $H^n(M, \partial M) \rightarrow H_{m-n}(M)$ es un isomorfismo. ■

Sin embargo, retorciendo un poco más el diagrama aún podemos mejorar el resultado.

Teorema A.0.14. *Sea M una variedad orientada, conexa, compacta y con frontera con $\dim M = m$. Supongamos que $\partial M = A \sqcup B$ con A y B componentes distintas. Entonces,*

$$H^n(M, A) \cong H_{m-n}(M, B)$$

Más aún, si $[M] \in H_m(M, \partial M)$ la clase fundamental de M , entonces $\cap [M] : H^n(M, A) \rightarrow H_{m-n}(M, B)$ es el isomorfismo.

Demostración. Consideremos las inclusiones $A \hookrightarrow M \hookrightarrow (M, A)$ que inducen la sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \rightarrow H^n(M, A) \rightarrow H^n(M) \rightarrow H^n(A) \xrightarrow{\partial^*} H^{n+1}(M, A) \rightarrow \cdots$$

De igual forma, las inclusiones $(\partial M, B) \hookrightarrow (M, B) \hookrightarrow (M, \partial M)$ generan la sucesión exacta larga en homología

$$\cdots \rightarrow H_l(M, B) \rightarrow H_l(M, \partial M) \xrightarrow{\partial_*} H_{l-1}(\partial M, B) \rightarrow H_{l-1}(M, B) \rightarrow \cdots$$

Así, podemos relacionar ambas sucesiones mediante el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^n(M, A) & \longrightarrow & H^n(M) & \xrightarrow{\partial^*} & H^n(A) & \longrightarrow & H^n(M, A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \cap [M] & & \downarrow \cong \cap [M] & & \cong \downarrow \cap [A] & & \downarrow \cap [M] & & \\ & & & & & & H_{m-n-1}(A) & & & & \\ & & & & & & \cong \downarrow (Escisión) & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{m-n}(M, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{m-n}(M, \partial M) & \longrightarrow & H_{m-n}(\partial M, B) & \longrightarrow & H_{m-n}(M, B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

donde $[A] = i_*[\partial M] = i_*\partial_*[M]$ es la clase fundamental de A .

Nuevamente, combinando las propiedades del *cap product*, es fácil ver que este diagrama conmuta salvo signo y, por tanto, por el lema de los cinco, la aplicación $H^n(M, A) \xrightarrow{\cap [M]} H_{m-n}(M, B)$ es un isomorfismo. ■

Corolario A.0.15. Si (W, M_0, M_1) es un cobordismo con W orientable, compacta y conexa, entonces

$$H^n(W, M_0) \cong H_{m-n}(W, M_1)$$

Bibliografía

- [1] Bott, R. *An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups*, Bulletin de la Société Mathématique de France 84: 251–281. 1956.
- [2] Bredon, G. *Topology and Geometry*. Springer. 1997.
- [3] Dodson, C.T.J., Parker, P.E. *A User's Guide to Algebraic Topology*. Kluwer Academic Publishers. 1997.
- [4] Donaldson, S. K. Kronheimer, P. B. *The geometry of four-manifolds*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1990.
- [5] Francis, J. *Lecture 13: Normal form lemma, final part*. Notas por Shen, Y. Northwestern University. 2010.
- [6] Kervaire, M. A., Milnor, J. *Groups of homotopy spheres: I*. Annals of Mathematics. 77 (3): 504–537. 1963.
- [7] Hirsch, M.W. (1976). *Differential Topology*. Springer-Verlag.
- [8] Lück, W. *A basic introduction to surgery*. 2004
- [9] Milnor, J. *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*. Annals of Mathematics. 64, 399–405. 1956.
- [10] Milnor, J. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Notas por L. Siebenmann y J. Sondow, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965. v+116 pp. 1965.
- [11] Milnor, J. *Whitehead torsion*. Bull. Amer. Math. Soc. 72, 358–426. 1966.
- [12] Schwarz M. *Morse Homology*. Progress in Mathematics, vol. 111, Birkhäuser, Basel, 1993, 235 pp.
- [13] Smale, S. *On gradient dynamical systems*. Ann. of Math., 74, 199–206. 1961.
- [14] Spivak, M. *A comprehensive introduction to differential geometry, volume I*. Publish or Perish, Inc, Houston, Texas. 1999.
- [15] Wall, C. T. C. *Surgery on compact manifolds*. Mathematical Surveys and Monographs 69 (2nd ed.), Providence, R.I.: American Mathematical Society. 1999.

-
- [16] Wall, C. T. C. *Classification of $(n - 1)$ -connected $2n$ -manifolds*. Annals of Mathematics. 75, 163–189. 1962.
- [17] Whitney, H. *Differentiable Manifolds*. Annals of Math. vol. 37, pp. 645–680. 1936.
- [18] Witten, E. *Supersymmetry and Morse theory*. J. Differential Geom. 17, no. 4, 661–692. 1982.