

Facultad de Ciencias Matemáticas



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
MADRID

---

# EL TEOREMA DE CARLESON

Juan Cavero de Carondelet Fiscowich

*Trabajo académicamente dirigido por Daniel Azagra Rueda*

Junio, 2012



# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>3</b>
<b>Recordatorio</b>	<b>5</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Los espacios $L^{2,\infty}$ y $L^{2,1}$ . . . . .	7
1.2. Distribuciones temperadas . . . . .	25
1.3. Algunos resultados útiles . . . . .	33
<b>2. Reducción del problema</b>	<b>39</b>
2.1. Transferencia de multiplicadores . . . . .	39
2.2. Descomposición diádica . . . . .	50
2.3. Discretización . . . . .	58
<b>3. Los lemas principales</b>	<b>71</b>
3.1. Aproximación a los lemas . . . . .	71
3.2. El lema de la densidad . . . . .	78
3.3. El lema del tamaño . . . . .	81
3.4. El lema del árbol . . . . .	87
<b>Bibliografía</b>	<b>97</b>



# Prólogo

Este texto forma parte de un trabajo académicamente dirigido por Daniel Azagra en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM. Tras cursar la asignatura de Análisis de Fourier durante el curso 2010-2011, surgió mi interés por el problema de la convergencia en casi todo punto de las series de Fourier. Se habían estudiado teoremas como el de Du Bois Reymond y el de Kolmogorov, que tratan la convergencia en casi todo punto de funciones continuas e integrables respectivamente, pero seguía abierto el problema en  $L^2(\mathbb{T})$ . El teorema de Carleson afirma que cualquier función de  $L^2(\mathbb{T})$  es, en casi todo punto, el límite de su expansión en serie de Fourier. El teorema debe su nombre a Lennart Carleson, quien en [C] establece como teorema la conjetura que Nikolai Luzin había planteado en 1913. Esta conjetura implicó a grandes matemáticos del siglo XX: Andrey Kolmogorov demostró en 1923 que existe una función integrable tal que su serie de Fourier diverge en casi todo punto; Calderón en 1959 demostró que si la conjetura de Luzin era cierta, entonces el más tarde llamado operador de Carleson

$$\mathbf{C}F(t) = \sup_N |S_N F(t)|$$

cumpliría una desigualdad débil de tipo (2,2). La conjetura finalmente se demuestra en 1966, y al año siguiente Richard Hunt [H] extiende el resultado a todo  $L^p$  con  $p > 1$ .

Con el paso del tiempo han aparecido nuevas demostraciones del teorema de Carleson, Charles Fefferman [Fe] en el año 1973 demuestra el teorema mediante la acotación  $L^2 \rightarrow L^1$  del operador de Carleson. Michael Lacey y Christoph Thiele demuestran en el año 2000 el teorema de Carleson en el artículo [LT], acotando débilmente el operador de Carleson, y siguiendo algunas de las ideas de la demostración de Fefferman. En su demostración no se utiliza el operador de Carleson para las series de Fourier definido anteriormente, sino que se considera una versión integral en  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\mathcal{C}f(x) = \sup_N \left| \int_{-N}^N \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right|.$$

Esto es posible gracias a ciertos resultados de transferencia de multiplicadores inicialmente descritos en el caso fuerte por Karel de Leeuw en [dL] y más tarde generalizados por Carlos E. Kenig y Peter A. Tomas en [KT], o por Pascal Auscher y María J. Carro en [AC]. En el libro de Loukas Grafakos [G1] se dedica un capítulo a desarrollar y exponer estos resultados. Michael Lacey en [La] describe cómo modificar la demostración de [LT] para todo  $L^p$  con  $p > 1$ . Además, en [La] aparecen resultados complementarios y mejoras de la prueba original. Por otra parte, Juan Arias de Reyna publica en 2002 el libro [dR], en el que desarrolla la prueba original

de Carleson [C] de una manera clara y concisa. Otros trabajos sobre el teorema de Carleson se deben a Kahane [K], a Jørsboe & Mejlbø [JM], o a Victor Lie, quien en [Li] adapta la demostración original de [LT] al caso discreto, sin tener que utilizar la transferencia de multiplicadores. Se pueden encontrar capítulos enteros dedicados al teorema de Carleson en los libros [G2] y [Fr].

En un principio Daniel y yo teníamos pensado abordar uno a uno los artículos [C], [Fe], y [La] cronológicamente, pero pronto cambiamos de opinión. La demostración original era muy difícil de entender para un alumno de licenciatura, y en cualquier caso, en seis meses no habría tiempo de entenderlas todas. Al final se decidió escoger la más reciente. Para poder abordar la demostración de que aparece en [La] ha sido necesario estudiar temas como el espacio  $L^2$  débil, la función maximal, o las distribuciones temperadas. Para esto se han utilizado libros como [G1], [SS2], o [SW] respectivamente. Teniendo en cuenta que estos temas no se tratan en la asignatura de Análisis de Fourier de la UCM, se han tenido que añadir en un capítulo de preliminares. Los preliminares necesarios para abordar [La] se han desarrollado en la justa medida, sin sacar más conclusiones que las absolutamente necesarias. En todo momento se ha intentado que el trabajo fuera autocontenido, desde la perspectiva de un alumno de último año de Licenciatura en Ciencias Matemáticas de la UCM. Así mismo, también se ha insistido mucho en que todos los pasos formales de la demostración estuvieran debidamente justificados. El trabajo pretende ser un desarrollo de la demostración expuesta en [La], en un lenguaje y con un rigor que lo convierta en accesible para alumnos de Licenciatura que hayan cursado asignaturas como Análisis de Fourier, Teoría de la Medida o Análisis Funcional. El libro [G2] ha sido muy útil para resolver ciertos problemas que iban saliendo al estudiar [La], y que yo no conseguía resolver siguiendo [LT]. En la parte donde surgía este problema, [G2] y [LT] seguían un enfoque distinto del de [La]. Por otra parte, [G2] ha sido la principal fuente de información para la parte final de la demostración. Para los resultados básicos sobre el Análisis de Fourier se han seguido libros como [D], [G1], [P], [S1], [S2] o [Fo].

Como no podía ser de otra manera quería darle las gracias a Daniel Azagra Rueda, el director del trabajo. En todo momento se ha mostrado dispuesto a que le expusiera mis razonamientos y mis dudas, resolviéndolas en muchos casos. También me ha dado pistas y consejos para abordar ciertos problemas a los que no estaba acostumbrado, así como consejos para mejorar mi  $\LaTeX$ . En definitiva, ha sido una pieza imprescindible en el trabajo. También quiero dar las gracias a Michael Lacey, al que me dirigí personalmente para preguntarle acerca de una duda y en todo momento se mostró dispuesto a echarme una mano. Me ayudó a dar otro enfoque distinto a una parte de la demostración en la que parecía haber discrepancias entre [La] y [LT]. Al ver que no había tales discrepancias conseguí entender mejor la demostración. Además de eso, Michael me ha propuesto distintas ideas para mi futuro académico, asesorándome acerca de requisitos y condiciones. También quiero agradecer a Loukas Grafakos por aconsejarme acerca de cómo abordar unos problemas sobre la transferencia de multiplicadores, a José María Martell por ayudarme con unos resultados de dualidad, y a Juan Margalef por enseñarme numerosos trucos de  $\LaTeX$ . Finalmente, quiero agradecer a todo mi entorno, familia, amigos, compañeros de universidad y profesores por estar a mi lado y apoyarme. A todos ellos va dedicado este trabajo.

# Recordatorio

Antes de empezar con el capítulo de preliminares, definiremos formalmente los objetos y herramientas básicas del análisis de Fourier. Dada  $F$  función en  $\mathbb{T}$ , se define su coeficiente de Fourier  $n$ -ésimo como

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F(t) e^{-int} dt.$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad podemos recuperar  $F$  por la fórmula

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{F}(n) e^{int}.$$

Escribamos estas fórmulas porque como ya sabemos, hay distintas maneras de definir estos objetos. Para la transformada de Fourier, y por cuestiones de notación, pondremos

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx,$$

con  $f$  definida en la recta real. Como ya sabemos, en esta situación la fórmula de inversión queda expresada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

El teorema de Plancherel afirma entonces que

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle \text{ para cada } f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

También conviene recordar la desigualdad integral de Minkowski, enunciada y demostrada en el capítulo 6.3 de **[Fo]**. Por otra parte, a lo largo del trabajo se usarán símbolos como  $\lesssim$ ,  $\simeq$ , o  $\gtrsim$ . Diremos que  $A \lesssim B$  cuando existe una constante  $K$  tal que  $A \lesssim KB$ . Si  $A \geq KB$  diremos que  $A \gtrsim B$ . Finalmente, si se cumple

$$B \lesssim A \lesssim B$$

escribiremos  $A \simeq B$ . La razón por la que usamos estas abreviaturas es porque estamos tratando asuntos de convergencia. Siempre que las constantes  $K$  estén controladas y sean uniformes, podremos traspasar la información de  $B$  a  $A$ .





# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Los espacios $L^{2,\infty}$ y $L^{2,1}$

† A lo largo de esta sección estudiaremos un espacio relacionado con  $L^2$ , al que llamaremos  $L^{2,\infty}$ . En ocasiones se le llama espacio  $L^2$  débil, ya que contiene a  $L^2$ . Para el teorema de Carleson será importante conocer este espacio así como su predual  $L^{2,1}$ . Definiremos estos dos espacios sobre un espacio de medida  $\sigma$ -finita  $X$  que jugará el papel de  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{T}$ .

**Definición 1.1.1.** Decimos que  $f \in L^{2,\infty}(X)$  si  $f$  es una función medible en  $X$  y existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C^2}{\lambda^2} \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Diremos que dos funciones de  $L^{2,\infty}(X)$  son iguales si coinciden en casi todo punto.

Para simplificar la notación escribiremos

$$\{f > \lambda\} = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}.$$

Es fácil ver que  $L^2(X) \subseteq L^{2,\infty}(X)$  ya que para toda  $f \in L^2(X)$  y todo  $\lambda > 0$  se tiene

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \geq \int_{\{f > \lambda\}} |f|^2 \geq \lambda^2 |\{f > \lambda\}|.$$

Poniendo  $C = \|f\|_2$  en la definición anterior se concluye que  $f \in L^{2,\infty}(X)$  y por lo tanto  $L^2$  está contenido en  $L^{2,\infty}$ . En la figura 1.1 podemos observar la geometría de las bolas de ambos espacios cuando consideramos el espacio  $X = \{0, 1\}$  de medida de contar.

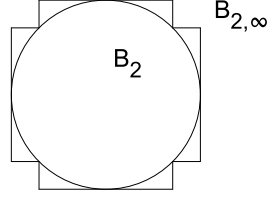
Por ahora no sabemos que el espacio  $L^{2,\infty}$  sea normable, pero si que podemos dotarle de una cuasinorma, que definiremos como la aplicación

$$\|f\|_{2,\infty} = \inf \left\{ C > 0 : d_f(\lambda) \leq \frac{C^2}{\lambda^2} \text{ para todo } \lambda > 0 \right\}.$$

---

†Para la primera sección he seguido principalmente los libros [G1] y [dR]. La parte de distribuciones temperadas está basada en [SW] y [G1]. Para la tercera sección he utilizado [SS2], [dR] [G1] y [G2].

Figura 1.1



Antes de comprobar que es una cuasinorma recordaremos un par de propiedades de la función de distribución  $d_f$  definida para cada  $f$  como

$$d_f(\lambda) = |\{f > \lambda\}| \text{ para todo } \lambda \geq 0.$$

**Ejemplo 1.1.2.** Para entender el comportamiento de este objeto, computaremos la función de distribución de una función simple positiva. Consideremos una función simple

$$f(x) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{1}_{E_j}(x)$$

con  $a_1 > \dots > a_N > 0$  y los  $E_j$  disjuntos dos a dos. Si  $\lambda > a_1$  entonces claramente  $d_f(\lambda) = 0$ . Supongamos que  $a_{j+1} \leq \lambda < a_j$ , entonces  $|f(x)| > \lambda$  exactamente cuando  $x \in F_j$  siendo  $F_j = E_1 \cup \dots \cup E_j$ . Ponemos

$$B_j = |F_j| = |E_1 \cup \dots \cup E_j| = \sum_{k=1}^j |E_k|.$$

Por lo tanto, la función de distribución de  $f$  queda expresada como

$$d_f(\lambda) = \sum_{j=1}^N B_j \mathbf{1}_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda)$$

donde hemos puesto  $B_0 = a_{N+1} = 0$ . ■

**Proposición 1.1.3.** Sean  $f, g$  funciones medibles en  $X$ . Para cada  $\alpha$  y  $\beta$  números positivos se tiene

- 1)  $d_f$  es decreciente y continua por la derecha,
- 2) Si  $|g| \leq |f|$  en casi todo punto, entonces  $d_g \leq d_f$ ,
- 3)  $d_{cf}(\alpha) = d_f(\alpha/|c|)$  para todo  $c \in \mathbb{C}$  no nulo,
- 4)  $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$ ,
- 5)  $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$ .

**Demostración.** Supongamos que  $\alpha \leq \beta$ , es claro que

$$\{x \in X : |f(x)| > \beta\} \subseteq \{x \in X : |f(x)| > \alpha\},$$

por lo que  $d_f(\alpha) \geq d_f(\beta)$  y  $d_f$  es decreciente. Para ver que  $d_f$  es continua por la derecha, para cada  $\lambda > 0$  definimos

$$E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}.$$

Los conjuntos  $E_\lambda$  decrecen a medida que  $\lambda$  crece, y de hecho

$$E_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{\lambda+1/n}.$$

Como la medida es continua, podemos concluir

$$d_f(\lambda + 1/n) = |E_{\lambda+1/n}| \longrightarrow |E_\lambda| = d_f(\lambda),$$

por lo que  $d_f$  es continua por la derecha. Utilizando la definición de la función de distribución, la segunda y tercera afirmación son inmediatas. Para la cuarta basta con ver

$$\{f + g > \alpha + \beta\} \subseteq \{f > \alpha\} \cup \{g > \beta\}.$$

Probaremos el contrarrecíproco, supongamos que  $x \in X$  es tal que  $|f(x)| \leq \alpha$  y  $|g(x)| \leq \beta$ , entonces

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \alpha + \beta.$$

La quinta afirmación es análoga a la cuarta, aunque en este caso  $|f(x)g(x)| \leq \alpha\beta$ . ■

Muchos teoremas de esta sección se probarán para funciones simples, y necesitaremos un resultado que garantice que se puede extender a funciones medibles cualesquiera. Normalmente esto se consigue con el lema de Fatou, a partir del cual se demuestra el teorema de la convergencia monótona. Recordemos que para toda función medible positiva existe una sucesión creciente de funciones simples que converge en casi todo punto a la función original. En la siguiente proposición veremos cómo adaptar esta técnica a las funciones de distribución.

**Proposición 1.1.4.** Sean  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  funciones medibles y supongamos que  $f$  es una función medible tal que

$$|f(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \text{ para casi todo } x \in X,$$

entonces para todo  $\lambda > 0$  se verifica la siguiente desigualdad

$$d_f(\lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_{f_n}(\lambda).$$

**Demostración.** Fijado  $\lambda$  positivo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos los conjuntos

$$E_n = \{x \in X : |f_n(x)| > \lambda\}.$$

Por hipótesis, y por definición de límite inferior

$$|f(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq m} |f_n(x)|.$$

Esto significa que para todo  $x \in X$  tal que  $|f(x)| > \lambda$  existe un natural  $m$  tal que si  $n \geq m$  entonces  $|f_n(x)| > \lambda$ . Por lo tanto, para cada  $\lambda > 0$  se tiene

$$E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\} \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} E_n.$$

Sea ahora  $m \in \mathbb{N}$ , obviamente

$$\left| \bigcap_{n \geq m} E_n \right| \leq \inf_{n \geq m} |E_n| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq m} |E_n| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |E_n|.$$

Como la sucesión de conjuntos  $(\bigcap_{n \geq m} E_n)_m$  es decreciente, juntando las dos estimaciones anteriores podemos escribir para cada  $\lambda > 0$

$$d_f(\lambda) = |E_\lambda| \leq \left| \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} E_n \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \bigcap_{n \geq m} E_n \right| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_{f_n}(\lambda)$$

como queríamos demostrar. ■

Con este resultado podemos demostrar que si una sucesión de funciones medibles  $(f_n)$  cumple  $|f_n| \uparrow |f|$ , entonces también  $d_{f_n} \uparrow d_f$ . En efecto, utilizando la proposición 1.1.3 es claro que la sucesión  $(d_{f_n})$  es creciente, y además por la proposición 1.1.4 para cada  $n$

$$d_{f_n}(\lambda) \leq d_f(\lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_{f_n}(\lambda).$$

Tomando supremos en  $n$  llegamos a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{f_n}(\lambda) = \sup_{n \in \mathbb{N}} d_{f_n}(\lambda) \leq d_f(\lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_{f_n}(\lambda).$$

Las desigualdades se convierten en igualdades, y se concluye

$$d_f(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{f_n}(\lambda) \tag{1.1}$$

para todo  $\lambda > 0$ . Más adelante sacaremos más partido a este hecho, pero por ahora seguiremos estudiando la función  $d_f$ . Una propiedad importante de la función de distribución es que nos permite recuperar la norma  $\|f\|_p$ . Demostraremos esta propiedad en el caso  $p = 2$ .

**Proposición 1.1.5.** *Sea  $f \in L^2(X)$ , entonces se verifica la igualdad*

$$\|f\|_2^2 = 2 \int_0^\infty \lambda d_f(\lambda) d\lambda.$$

**Demostración.** En efecto, poniendo  $E_\lambda = \{f > \lambda\}$  podemos escribir

$$2 \int_0^\infty \lambda d_f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \int_X 2\lambda \mathbb{1}_{E_\lambda}(x) dx d\lambda.$$

Además, teniendo en cuenta que  $\mathbb{1}_{E_\lambda}(x) = 1$  si  $\lambda < |f(x)|$  y 0 en otro caso, podemos utilizar el teorema de Fubini para concluir

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \lambda d_f(\lambda) d\lambda &= \int_X \int_0^\infty 2\lambda \mathbb{1}_{E_\lambda}(x) d\lambda dx \\ &= \int_X \int_0^{|f(x)|} 2\lambda d\lambda dx \\ &= \int_X |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

con lo que tenemos caracterizada  $\|\cdot\|_2$  en función de  $d_f$ . ■

En la siguiente proposición se comprueba que  $L^{2,\infty}$  es un espacio cuasinormado, y se dan dos definiciones equivalentes de  $\|\cdot\|_{2,\infty}$ .

**Proposición 1.1.6.** *Para cada  $f \in L^{2,\infty}(X)$  tenemos*

$$\|f\|_{2,\infty} = \inf \left\{ C > 0 : d_f(\lambda) \leq \frac{C^2}{\lambda^2} \text{ para todo } \lambda > 0 \right\}.$$

*Esta aplicación es una cuasinorma y de hecho*

$$\|f\|_{2,\infty} = \sup \{ \lambda d_f(\lambda)^{1/2} : \lambda > 0 \}.$$

**Demostración.** Dos funciones en  $L^{2,\infty}(X)$  son iguales si difieren en un conjunto de medida nula. Utilizando la proposición 1.1.3 es claro que  $\|kf\|_{2,\infty} = |k|\|f\|_{2,\infty}$  para todo  $k \in \mathbb{C}$  no nulo. Sean ahora  $f, g \in L^{2,\infty}(X)$ , para todo  $\lambda > 0$  se tiene

$$d_{f+g}(\lambda) \leq d_f(\lambda/2) + d_g(\lambda/2) = d_{2f}(\lambda) + d_{2g}(\lambda)$$

y por definición

$$d_{f+g}(\lambda) \leq 2 \left( \frac{\|f\|_{2,\infty}^2}{\lambda^2} + \frac{\|g\|_{2,\infty}^2}{\lambda^2} \right).$$

Lo anterior implica que  $\|f+g\|_{2,\infty} \leq 2(\|f\|_{2,\infty} + \|g\|_{2,\infty})$ , así que  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  es efectivamente una cuasinorma. Para completar la demostración tomaremos  $C > 0$  tal que  $d_f(\lambda) \leq \lambda^{-2}C^2$ . Tenemos entonces

$$\lambda d_f(\lambda)^{1/2} \leq C \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Tomando supremos en  $\lambda > 0$  e ínfimos en  $C$ , se obtiene

$$\sup \{ \lambda d_f(\lambda)^{1/2} : \lambda > 0 \} \leq \|f\|_{2,\infty}.$$

La otra desigualdad se prueba análogamente: para cada  $\lambda > 0$  escribimos

$$d_f(\lambda) = \frac{(\lambda d_f(\lambda)^{1/2})^2}{\lambda^2} \leq \frac{(\sup \{ \lambda d_f(\lambda)^{1/2} : \lambda > 0 \})^2}{\lambda^2}$$

y por definición de  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  se concluye el resultado. ■

Como hemos visto, la aplicación  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  es una cuasinorma, ya que la desigualdad

triangular se cumple salvo una constante. Más adelante demostraremos que  $L^{2,\infty}$  admite estructura de espacio normado. Para demostrar la equivalencia de normas será conveniente conocer algunas propiedades básicas de los reordenamientos decrecientes. Partiendo de una función medible  $f$  en  $X$ , conseguiremos otra función medible  $f^*$  equidistribuida con  $f$ , es decir

$$d_f(\lambda) = d_{f^*}(\lambda) \text{ para todo } \lambda > 0.$$

**Definición 1.1.7.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible, se define el reordenamiento decreciente de  $f$  como la función  $f^* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tal que

$$f^*(t) = \inf \{ \lambda > 0 : d_f(\lambda) \leq t \}.$$

Por definición, claramente  $f^*$  es una función decreciente, y su soporte está contenido en el intervalo  $[0, |X|]$ . Además, es fácil ver que  $f^*(t) > \lambda$  si y sólo si  $d_f(\lambda) > t$ , lo que demostraremos en la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.8.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible, entonces para todo  $t > 0$  se tiene  $d_f(f^*(t)) \leq t$ . De hecho  $f^*(t) > \lambda$  si y sólo si  $t < d_f(\lambda)$ , es decir

$$\{t \geq 0 : f^*(t) > \lambda\} = [0, d_f(\lambda))$$

y por lo tanto  $f$  y  $f^*$  están equidistribuidas.

**Demostración.** Por definición,  $f^*(t)$  es el ínfimo de los  $\lambda > 0$  tales que  $d_f(\lambda) \leq t$ . Podemos escoger una sucesión  $(\lambda_n)$  tal que  $d_f(\lambda_n) \leq t$  y además  $\lambda_n \downarrow f^*(t)$ . Como  $d_f$  es continua por la derecha, tomando límites podemos concluir

$$d_f(f^*(t)) \leq t \text{ para todo } t > 0.$$

Demostremos la segunda parte. Sea  $t \geq 0$  y sea  $\lambda < f^*(t)$ , por definición de  $f^*$  sabemos que  $d_f(\lambda) > t$ . Para la otra implicación supongamos que  $t < d_f(\lambda)$  cumple  $f^*(t) \leq \lambda$ . Aplicando  $d_f$  a ambos lados y el apartado anterior

$$d_f(\lambda) \leq d_f(f^*(t)) \leq t$$

que contradice nuestra hipótesis, y por lo tanto  $f^*(t) > \lambda$ . Gracias a esto último podemos concluir que  $f$  y  $f^*$  están equidistribuidas ya que

$$d_{f^*}(\lambda) = |\{t \geq 0 : f^*(t) > \lambda\}| = |[0, d_f(\lambda))| = d_f(\lambda).$$

■

**Ejemplo 1.1.9.** Como antes, calcularemos el reordenamiento decreciente de una función simple positiva

$$f(x) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{E_j}(x) \text{ con } a_1 > \dots > a_N > 0 \text{ y } E_j \text{ disjuntos.}$$

Como ya vimos en el ejemplo 1.1.2, poniendo  $|B_0| = |a_{N+1}| = 0$  la función de distribución de  $f$  venía dada por

$$d_f(\lambda) = \sum_{j=1}^N B_j \mathbb{1}_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda) \text{ donde } B_j = \sum_{k=1}^j |E_k|.$$

Si  $B_0 \leq t < B_1$ , el menor  $\lambda > 0$  tal que  $d_f(\lambda) \leq t$  es claramente  $\lambda = a_1$ . En general, para  $B_{j-1} \leq t < B_j$  el menor  $\lambda$  cumpliendo  $d_f(\lambda) \leq t$  es  $a_j$ . Por lo tanto, el reordenamiento decreciente de  $f$  es de la forma

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{[B_{j-1}, B_j)}(t).$$

■

**Proposición 1.1.10.** *La cuasinorma  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  se puede calcular con el reordenamiento decreciente, se cumple*

$$\|f\|_{2,\infty} = \sup \{t^{1/2} f^*(t) : t > 0\}.$$

**Demostración.** Bastará con demostrar que se verifica

$$\sup \{\lambda d_f(\lambda)^{1/2} : \lambda > 0\} = \sup \{t^{1/2} f^*(t) : t > 0\}.$$

Empezaremos por la desigualdad  $\geq$ , tomamos  $t > 0$  y  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon < f^*(t)$ . Ponemos  $\lambda = f^*(t) - \varepsilon$  y la proposición anterior garantiza que  $d_f(f^*(t) - \varepsilon) > t$ . Tomando supremos en  $\lambda > 0$

$$\sup \{\lambda d_f(\lambda)^{1/2} : \lambda > 0\} \geq (f^*(t) - \varepsilon) d_f(f^*(t) - \varepsilon)^{1/2} > t^{1/2} (f^*(t) - \varepsilon).$$

Primero hacemos tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  y luego tomamos supremos en  $t > 0$  para concluir

$$\sup \{\lambda d_f(\lambda)^{1/2} : \lambda > 0\} \geq \sup \{t^{1/2} f^*(t) : t > 0\}.$$

Para la otra desigualdad tomamos  $\lambda > 0$  y  $0 < \varepsilon < \lambda$ . Definiendo  $t = d_f(\lambda) - \varepsilon$  llegamos a  $f^*(d_f(\lambda) - \varepsilon) > \lambda$ , y por lo tanto

$$\sup \{t^{1/2} f^*(t) : t > 0\} \geq (d_f(\lambda) - \varepsilon)^{1/2} f^*(d_f(\lambda) - \varepsilon) > \lambda (d_f(\lambda) - \varepsilon)^{1/2}.$$

Razonando análogamente al otro caso, se demuestra la proposición. ■

**Proposición 1.1.11.** *Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  medibles tales que existe  $f$  medible con*

$$|f_n| \uparrow |f| \text{ en casi todo punto.}$$

*Entonces se verifica*

$$f_n^*(t) \uparrow f^*(t) \text{ para todo } t.$$

**Demostración.** Como la sucesión de las  $f_n$  es creciente, sabemos que  $(d_{f_n})$  es también una sucesión creciente. Por lo tanto para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\{\lambda > 0 : d_{f_n}(\lambda) \leq t\} \supseteq \{\lambda > 0 : d_{f_{n+1}}(\lambda) \leq t\},$$

y tomando ínfimos llegamos a

$$f_n^*(t) \leq f_{n+1}^*(t) \leq \dots \leq f^*(t)$$

para todo  $t$ . Hemos comprobado que  $(f_n^*)$  es una sucesión creciente. Para ver que su límite es  $f^*$  empezamos definiendo  $h = \lim f_n^*$ . Obviamente  $h \leq f^*$ , para la otra desigualdad tendremos que usar la proposición 1.1.8. Como  $f_n^* \leq h$  y la función  $d_{f_n}$  es decreciente, por 1.1.8

$$d_{f_n}(h(t)) \leq d_{f_n}(f_n^*(t)) \leq t.$$

Tomando límites y recordando la ecuación (1.1) llegamos a  $d_f(h(t)) \leq t$  y por lo tanto  $f^*(t) \leq h(t)$ . ■

**Proposición 1.1.12.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible, entonces

$$\int_X |f(x)| dx = \int_0^\infty f^*(t) dt.$$

**Demostración.** Para la primera expresión tomamos  $f$  función simple positiva como en el ejemplo 1.1.9. Como ya vimos

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{1}_{[B_{j-1}, B_j)}(t).$$

Para esta  $f$  el resultado es trivial ya que podemos escribir

$$\int_X |f(x)| dx = \sum_{j=1}^N a_j |E_j| = \sum_{j=1}^N a_j (B_j - B_{j-1}) = \int_0^\infty f^*(t) dt.$$

Para extender el resultado a toda  $f$  medible, aproximamos  $f$  por una sucesión creciente de funciones simples. Podemos aplicar el teorema de la convergencia monótona gracias a la proposición 1.1.11. ■

Podemos sacar una consecuencia importante de esta proposición. Empezaremos definiendo para cada  $E$  conjunto medible la función  $h(x) = f(x)\mathbf{1}_E(x)$  Obviamente  $\text{sop}(h^*) \subseteq [0, |E|]$ , y además como  $|h| \leq |f|$ , sabemos que  $h^* \leq f^*$ . Por lo tanto utilizando la proposición 1.1.12

$$\int_E |f(x)| dx = \int_X |h(x)| dx = \int_0^{|E|} h^*(t) dt \leq \int_0^{|E|} f^*(t) dt. \quad (1.2)$$

Gracias a esta cuenta podemos enunciar la siguiente proposición, que será muy útil para demostrar cuál es el predual de  $L^{2,\infty}(X)$



**Proposición 1.1.13.** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones medibles, se verifica la siguiente desigualdad

$$\int_X |f(x)||g(x)| dx \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t) dt.$$

**Demostración.** Empezaremos tomando  $f$  función simple positiva de la forma  $f(x) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{E_j}(x)$ . Definiendo  $F_j$  como en el ejemplo 1.1.2, podemos reescribir  $f$  como

$$f(x) = \sum_{j=1}^N (a_j - a_{j+1}) \mathbb{1}_{F_j}(x).$$

Por la desigualdad (1.2) aplicada a  $g$  obtenemos

$$\int_X |f(x)||g(x)| dx = \sum_{j=1}^N (a_j - a_{j+1}) \int_{F_j} |g(x)| dx \leq \sum_{j=1}^N (a_j - a_{j+1}) \int_0^{B_j} g^*(t) dt$$

donde hemos puesto  $B_j = |F_j|$ . Reagrupando adecuadamente los sumandos y recordando el ejemplo 1.1.9 llegamos a

$$\int_X |f(x)||g(x)| dx \leq \sum_{j=1}^N a_j \int_{B_{j-1}}^{B_j} g^*(t) dt = \int_0^\infty f^*(t)g^*(t) dt.$$

Aplicando el teorema de la convergencia monótona y la proposición 1.1.11 se concluye el resultado general para  $f$  medible. ■

Ya tenemos las herramientas necesarias para probar que  $L^{2,\infty}(X)$  admite estructura de espacio normado. Empezaremos definiendo la aplicación

$$\|g\|_{2,\infty} = \sup_{0 < |E| < \infty} |E|^{-1/2} \int_E |g(x)| dx. \quad (1.3)$$

Es claro que  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  es una norma, ya que en este caso la desigualdad triangular se cumple sin constantes. El resto de propiedades son inmediatas. De hecho, puede demostrarse que con esta norma toda sucesión de Cauchy es convergente, y por lo tanto  $L^{2,\infty}(X)$  es un espacio completo.

**Proposición 1.1.14.** Para toda función  $g \in L^{2,\infty}(X)$  se cumplen las desigualdades

$$\|g\|_{2,\infty} \leq \|g\|_{2,\infty} \leq 2 \|g\|_{2,\infty},$$

y por lo tanto  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  y  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  definen la misma topología.

**Demostración.** Empecemos por la primera desigualdad. Para cada  $\lambda > 0$  tomamos  $E = \{g > \lambda\}$ , que cumple las condiciones requeridas, y además

$$\|g\|_{2,\infty} \geq |\{g > \lambda\}|^{-1/2} \int_{\{g < \lambda\}} \lambda dx \geq \lambda |\{g > \lambda\}|^{1/2},$$

lo que implica que  $|\{g > \lambda\}| \leq \lambda^{-2} \|g\|_{2,\infty}^2$  y consecuentemente  $\|g\|_{2,\infty} \leq \|g\|_{2,\infty}$ . Para la otra desigualdad haremos uso de la proposición 1.1.13. Dado un conjunto  $|E|$  de medida no trivial podemos escribir

$$\int_E |g(x)| dx = \int_X |g(x)| \mathbf{1}_E(x) dx \leq \int_0^\infty g^*(t) \mathbf{1}_E^*(t) dt.$$

El soporte de  $\mathbf{1}_E^*$  está contenido en  $[0, |E|]$ . Intercalamos  $t^{1/2}$  y su inverso, tomamos supremos en  $t > 0$ , y utilizamos la proposición 1.1.6:

$$\int_E |g(x)| dx \leq \left( \sup_{t>0} t^{1/2} g^*(t) \right) \int_0^{|E|} t^{-1/2} dt = 2 \|g\|_{2,\infty} |E|^{1/2}.$$

Pasamos  $|E|^{1/2}$  al otro lado y tomamos supremos en  $0 < |E| < \infty$ . Hemos demostrado que  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  y  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  son equivalentes, y por lo tanto  $L^{2,\infty}(X)$  es un espacio normado. A partir de ahora trataremos a  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  como si fuera una norma. Por lo que acabamos de demostrar, esto no supondrá ningún problema. ■

En el segundo capítulo nos interesará intercambiar las normas  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  con integrales, para poder traspasar el problema de acotar un operador al de acotar otro más manejable. Las siguientes proposiciones jugarán un papel muy importante.

**Proposición 1.1.15.** *Sea  $(f_y)_{y \in \mathbb{R}}$  una familia de funciones de  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces se verifica la desigualdad*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f_y(\cdot) dy \right\|_2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|f_y(\cdot)\|_2 dy$$

y se dice que la norma  $\|\cdot\|_2$  es convexa.

**Demostración.** En efecto, es claro que se cumple

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} f_y(\cdot) dy \right\|_2 &= \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_y(x) dy \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f_y(x)| dy \right)^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad integral de Minkowski (ver [Fo]) obtenemos

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f_y(\cdot) dy \right\|_2 \leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f_y(x)|^2 dx \right)^{1/2} dy = \int_{\mathbb{R}} \|f_y(\cdot)\|_2 dy$$

como queríamos probar. ■

**Proposición 1.1.16.** *Sea  $(f_y)_{y \in \mathbb{R}}$  una familia de funciones de  $L^{2,\infty}(\mathbb{R})$ , entonces se verifica la desigualdad*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f_y(\cdot) dy \right\|_{2,\infty} \lesssim \int_{\mathbb{R}} \|f_y(\cdot)\|_{2,\infty} dy$$

y se dice que la norma  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  es convexa.

**Demostración.** Usaremos la norma  $\| \cdot \|_{2,\infty}$  definida en (1.3). Por una parte podemos escribir

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} f_y(\cdot) dy \right\|_{2,\infty} &= \sup_{0 < |E| < \infty} |E|^{-1/2} \int_E \left| \int_{\mathbb{R}} f_y(x) dy \right| dx \\ &\leq \sup_{0 < |E| < \infty} |E|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_E |f_y(x)| dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{0 < |E| < \infty} |E|^{-1/2} \int_E |f_y(x)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f_y(\cdot)\|_{2,\infty} dy \end{aligned}$$

Como las normas  $\| \cdot \|_{2,\infty}$  y  $\| \cdot \|_{2,\infty}$  son equivalentes, podemos concluir la demostración.  $\blacksquare$

**Proposición 1.1.17.** Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones medibles  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ , se cumple

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \right\|_{2,\infty} \leq b \text{ si y sólo si } \sup_{\substack{F \subseteq \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sup_{n \in F} |f_n| \right\|_{2,\infty} \leq b.$$

**Demostración.** La implicación a derechas es inmediata, ya que para cualquier subconjunto  $F \subseteq \mathbb{N}$  finito se tiene

$$\left\| \sup_{n \in F} |f_n| \right\|_{2,\infty} \leq \left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \right\|_{2,\infty}.$$

Para la otra implicación definiremos el número

$$a = \sup_{\substack{F \subseteq \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sup_{n \in F} |f_n| \right\|_{2,\infty} \leq b.$$

Es obvio que existe una sucesión de conjuntos finitos  $F_k \subseteq \mathbb{N}$  tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sup_{n \in F_k} |f_n| \right\|_{2,\infty} = a.$$

De hecho, y sin pérdida de generalidad, podemos escoger los  $F_k$  de modo que  $F_k \subseteq F_{k+1}$  y que  $\cup F_k = \mathbb{N}$ . Como estamos usando una norma, podemos acotar

$$\left\| \sup_{n \in F_k} |f_n| \right\|_{2,\infty} - \left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \right\|_{2,\infty} \leq \left\| \sup_{n \in F_k} |f_n| - \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \right\|_{2,\infty}. \quad (1.4)$$

Por elección de los  $F_k$ , la sucesión de funciones  $g_k = \sup_{n \in F_k} |f_n|$  es creciente y está mayorada por

$$g = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \in F_k} |f_n| = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k.$$

Para demostrar que el lado derecho de la ecuación (1.4) tiende a 0, utilizando el teorema de la convergencia dominada bastará con ver que  $\|g\|_{2,\infty} \leq a$ . Esto es fácil de comprobar ya que por definición cada  $\|g_k\|_{2,\infty} \leq a$ , luego

$$\|g\|_{2,\infty} = \left\| \lim_k g_k \right\|_{2,\infty} \leq \lim_k \|g_k\|_{2,\infty} \leq a$$

■

Cuando estamos ante un espacio normado es común preguntarse cuál será su espacio dual, o si dicho espacio es el dual de otro. En este caso responderemos a la segunda pregunta, y para ello introduciremos el espacio  $L^{2,1}(X)$ . Supongamos que  $f \in L^{2,\infty}(X)$  induce un funcional  $\mathbf{F}_f$  definido por

$$\mathbf{F}_f g = \int_X g(x) \overline{f(x)} dx \quad (1.5)$$

para ciertas  $g$  medibles. Utilizando la proposición 1.1.13 e intercalando  $t^{1/2}$  y su inverso, podemos acotar

$$|\mathbf{F}_f g| \leq \int_X |f(x)| |g(x)| dx \leq \left( \sup_{t>0} t^{1/2} f^*(t) \right) \int_0^\infty t^{-1/2} g^*(t) dt. \quad (1.6)$$

El primer factor es la norma  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  de  $f$ , y parece razonable pensar que el candidato a predual de  $L^{2,\infty}(X)$  sea un espacio cuya norma venga dada por

$$\|g\|_{2,1} := \int_0^\infty t^{-1/2} g^*(t) dt. \quad (1.7)$$

Definimos el espacio  $L^{2,1}(X)$  como el conjunto de funciones medibles  $g$  tales que  $\|g\|_{2,1} < \infty$ . Identificaremos dos funciones medibles que coincidan en casi todo punto. Sustituyendo  $g$  por  $f$  en la ecuación (1.6) se obtiene

$$\|f\|_2^2 = \mathbf{F}_f f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \|f\|_{2,\infty} \|f\|_{2,1}.$$

Como vimos al principio del capítulo,  $\|f\|_{2,\infty} \leq \|f\|_2$ , y por lo tanto  $\|f\|_2 \leq \|f\|_{2,1}$  por lo que el espacio  $L^{2,1}(X)$  está contenido en  $L^2(X)$ . Como ocurría con  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  la aplicación  $\|\cdot\|_{2,1}$  es una cuasinorma.

**Proposición 1.1.18.** Sean  $f$  y  $g$  funciones de  $L^{2,1}(X)$ , para cada  $k \in \mathbb{C}$  se cumple que  $\|kf\|_{2,1} = |k| \|f\|_{2,1}$  y también

$$\|f + g\|_{2,1} \leq \sqrt{2} (\|f\|_{2,1} + \|g\|_{2,1}).$$

**Demostración.** Utilizando la proposición 1.1.3 y mediante un cambio de variable, podemos deducir que para todo  $k \in \mathbb{C}$

$$(kf)^*(t) = \inf \{ |k|\lambda > 0 : d_f(\lambda) \leq t \} = |k| f^*(t).$$

Aplicando la definición de  $\|\cdot\|_{2,1}$  se sigue el resultado. Por otra parte, dadas  $f, g \in L^{2,1}(X)$  se verifica la desigualdad

$$(f + g)^*(t) \leq f^*(t/2) + g^*(t/2). \quad (1.8)$$

Para probarla, para cada  $t > 0$  definiremos los conjuntos

$$A_1 = \{ \lambda_1 > 0 : d_f(\lambda_1) \leq t/2 \} \quad A_2 = \{ \lambda_2 > 0 : d_g(\lambda_2) \leq t/2 \}$$

así como  $S = \{\lambda > 0 : d_{f+g}(\lambda) \leq t\}$ . Utilizando la proposición 1.1.3 podemos deducir que  $A_1 + A_2 \subseteq S$  y por lo tanto

$$\inf_{\lambda>0} S \leq \inf_{\lambda_1>0} A_1 + \inf_{\lambda_2>0} A_2,$$

con lo que (1.17) queda probada. Realizando un cambio de variable podemos concluir la demostración, escribiendo

$$\|f + g\|_{2,1} = \int_0^\infty t^{-1/2} (f^*(t/2) + g^*(t/2)) dt = \sqrt{2} (\|f\|_{2,1} + \|g\|_{2,1}).$$

■

**Proposición 1.1.19.** *Las funciones simples son densas en  $L^{2,1}(X)$ . Es decir, dada  $g \in L^{2,1}(X)$  existe una sucesión de funciones simples  $(g_n)$  tal que  $\|g - g_n\|_{2,1} \rightarrow 0$ .*

**Demostración.** Sea  $g \in L^{2,1}(X)$ , como ya hemos visto  $g \in L^2(X)$  y por lo tanto para cada  $n \in \mathbb{N}$  el conjunto

$$E_n = \{x \in X \text{ tales que } g(x) > 1/n\}$$

tiene medida finita. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos las funciones  $G_n = g \mathbb{1}_{E_n}$  y escogemos una sucesión creciente  $(G_n^k)_k$  de funciones simples  $G_n^k : E_n \rightarrow \mathbb{C}$  que converja en casi todo punto de  $E_n$  a  $G_n$ . Por el teorema de Egorov con  $\varepsilon = 1/n$  existe  $E_n^0 \subseteq E_n$  tal que  $E_n - E_n^0$  tiene medida menor que  $1/n$  y tal que  $G_n^k \rightarrow G_n$  uniformemente en  $E_n^0$ . Por lo tanto existe  $k_n > n$  tal que

$$g(x) - \frac{1}{n} < g(x) - \frac{1}{k_n} \leq G_n^{k_n}(x) \leq g(x)$$

para  $x \in E_n^0$ . Definimos  $g_n(x) = 0$  si  $x \notin E_n$  y  $g_n(x) = G_n^{k_n}(x)$  si  $x \in E_n$ .

Recapitulando, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una función simple  $g_n \geq 0$  tal que  $g_n(x) = 0$  si  $g(x) \leq 1/n$  y tal que

$$g(x) - \frac{1}{n} \leq g_n(x) \leq g(x)$$

cuando  $g(x) > 1/n$ , excepto en un conjunto de medida menor que  $1/n$ . Podemos escribir entonces

$$|\{x \in X : |g(x) - g_n(x)| > 1/n\}| < \frac{1}{n}.$$

Utilizando lo anterior, dado  $t \geq 1/n$  por definición se tiene  $(g - g_n)^*(t) \leq 1/n$ . Tomando límites en  $n$  llegamos a  $\lim(g - g_n)^*(t) = 0$ . Además, como  $g_n^*(t) \leq g^*(t)$  para todo  $t > 0$ , utilizando la proposición 1.1.3 obtenemos

$$(g^* - g_n^*)(t) \leq 2g^*(t/2).$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada se concluye  $\|g - g_n\|_{2,1} \rightarrow 0$ , por lo que las funciones simples son densas en  $L^{2,1}(X)$ . ■

**Proposición 1.1.20.** Dada  $g \in L^{2,1}(X)$  se verifica la igualdad

$$\|g\|_{2,1} = 2 \int_0^\infty d_g(\lambda)^{1/2} d\lambda.$$

**Demostración.** Como ya vimos en el ejemplo 1.1.9, dada  $f = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{E_j}$  función simple,  $f^*$  se expresaba como

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{[B_{j-1}, B_j)}(t).$$

Por definición de  $\|f\|_{2,1}$ , es decir (1.7), y recordando que  $B_0 = a_{N+1} = 0$ , podemos escribir

$$\|f\|_{2,1} = \sum_{j=1}^N a_j \int_0^\infty t^{-1/2} \mathbb{1}_{[B_{j-1}, B_j)}(t) dt = 2 \sum_{j=1}^N a_j (B_j^{1/2} - B_{j-1}^{1/2}).$$

Como antes, hemos puesto  $B_j = |F_j| = |E_1 \cup \dots \cup E_j|$ . En el ejemplo 1.1.2 se vio que la función de distribución venía dada por

$$d_f(\lambda) = \sum_{j=1}^N B_j \mathbb{1}_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda).$$

Los sumandos tienen soporte disjunto, y por lo tanto podemos descomponer

$$2 \int_0^\infty d_f(\lambda)^{1/2} d\lambda = 2 \sum_{j=1}^N \int_{a_{j+1}}^{a_j} B_j^{1/2} d\lambda = 2 \sum_{j=1}^N B_j^{1/2} (a_j - a_{j+1}).$$

Expandiendo la suma y reagrupando, llegamos a

$$2 \int_0^\infty d_f(\lambda)^{1/2} d\lambda = 2 \sum_{j=1}^N a_j (B_j^{1/2} - B_{j-1}^{1/2}) = \|f\|_{2,1}.$$

Esta igualdad se cumple para funciones simples positivas. Dada una función positiva  $g \in L^{2,1}(X)$ , existe una sucesión crecientes de funciones simples que convergen en casi todo punto a  $g$ . Utilizando el teorema de la convergencia monótona junto a las proposiciones 1.1.11 y 1.1.19, podemos concluir

$$\|g\|_{2,1} = 2 \int_0^\infty d_g(\lambda)^{1/2} d\lambda$$

para toda  $g \in L^{2,1}(X)$ . ■

**Teorema 1.1.21.** La aplicación  $\mathbf{F} : L^{2,\infty}(X) \longrightarrow L^{2,1}(X)'$  con  $\mathbf{F}_f$  definida como en (1.5) es un isomorfismo. Por lo tanto, el dual de  $L^{2,1}(X)$  es  $L^{2,\infty}(X)$ .

**Demostración.** Por una parte está claro que  $\mathbf{F}$  está bien definida y es continua ya que

$$|\mathbf{F}_f g| \leq \|f\|_{2,\infty} \|g\|_{2,1},$$

y por lo tanto  $\|\mathbf{F}_f\| \leq \|f\|_{2,\infty}$ . Para ver que  $\mathbf{F}$  es sobreyectiva, para cada  $S \in (L^{2,1}(X))'$  definiremos la medida  $\sigma$  por  $\sigma(E) = S(\mathbf{1}_E)$ . Como  $S$  es continuo, tenemos la acotación

$$|\sigma(E)| = |S(\mathbf{1}_E)| \lesssim \|\mathbf{1}_E\|_{2,1} \simeq |E|^{1/2}$$

y consecuentemente  $\sigma$  es absolutamente continua respecto de la medida de  $X$ . Aplicando el teorema de Radon-Nikodym, existe una función medible  $f$  tal que

$$S(\mathbf{1}_E) = \sigma(E) = \int_X \mathbf{1}_E(x) \overline{f(x)} dx.$$

Por linealidad, para toda función simple  $g$  se verifica  $Sg = \int_X g \overline{f}$ , y utilizando el teorema de la convergencia monótona junto con la proposición 1.1.19 podemos concluir

$$Sg = \int_X g(x) \overline{f(x)} dx = \mathbf{F}_f g$$

para toda  $g \in L^{2,1}(X)$ . Si demostramos que  $f \in L^{2,\infty}(X)$  podremos deducir que  $\mathbf{F}$  es sobreyectiva. Para cada  $\lambda > 0$  consideremos la función  $g = \frac{f}{|f|} \mathbf{1}_{\{|f|>\lambda\}}$ . Aplicando  $\mathbf{F}$  obtenemos

$$\mathbf{F}_f g = \int_X |f(x)| \mathbf{1}_{\{|f|>\lambda\}}(x) dx \geq \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)| dx \geq \lambda d_f(\lambda)$$

y consecuentemente  $\lambda d_f(\lambda) \leq \|\mathbf{F}_f\| \|g\|_{2,1}$ . Por otra parte, teniendo en cuenta que  $|g| = \mathbf{1}_{\{|f|>\lambda\}}$ , la función de distribución de  $g$  viene dada por  $d_g(\alpha) = d_f(\lambda)$  si  $0 \leq \alpha < \lambda$  y  $d_g(\alpha) = 0$  en caso contrario. Tenemos entonces

$$\|g\|_{2,1} = 2 \int_0^\lambda d_g(\alpha)^{1/2} d\alpha = 2d_f(\lambda)^{1/2}. \quad (1.9)$$

Juntando lo anterior se obtiene la desigualdad

$$\lambda d_f(\lambda) \leq 2 \|\mathbf{F}_f\| d_f(\lambda)^{1/2} \quad \text{que implica que} \quad |\{|f| > \lambda\}| \leq \frac{4\|\mathbf{F}_f\|^2}{\lambda^2}.$$

Por definición  $f \in L^{2,\infty}(X)$  y por lo tanto  $\mathbf{F}$  es sobreyectiva. Gracias a la última ecuación podemos deducir fácilmente que la inversa de  $\mathbf{F}$  es continua, ya que  $\|f\|_{2,\infty} \leq 2\|\mathbf{F}_f\|$ . Hemos demostrado que el dual de  $L^{2,1}(X)$  se identifica con  $L^{2,\infty}(X)$ . Salvo constante, la norma en el dual se puede recuperar como

$$\|f\|_{2,\infty} \simeq \sup_{\|g\|_{2,1} \leq 1} \left| \int_X f(x) \overline{g(x)} dx \right|. \quad (1.10)$$

Se ha cambiado el orden a la conjugación, pero esto no es relevante debido a que estamos tomando módulos. ■

Hasta ahora hemos estado tratando espacios de funciones medibles con valores complejos, pero también podemos hacer la misma construcción para funciones con valores vectoriales. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  y cada  $X$  espacio de medida  $\sigma$  finita se puede definir el espacio

$$L^{2,\infty}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_\infty))$$

como el conjunto de funciones  $h = (h_1, \dots, h_k)$  con  $h_j$  medibles tales que  $H \in L^{2,\infty}(X)$  siendo

$$H(x) = \sup_{j=1, \dots, k} |h_j(x)|. \quad (1.11)$$

Denotaremos su norma como  $\|h\|_{2,\infty}^{(\infty)} = \|H\|_{2,\infty} < \infty$ . De la misma manera se puede definir el espacio

$$L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$$

como el conjunto de funciones  $g = (g_1, \dots, g_k)$  con  $g_j$  medibles tales que  $G \in L^{2,1}(X)$  siendo

$$G(x) = \sum_{j=1}^k |g_j(x)|. \quad (1.12)$$

Como antes, pondremos  $\|g\|_{2,1}^{(1)} = \|G\|_{2,1} < \infty$ . Para este tipo de funciones vectoriales  $g$ , sus componentes pertenecen a  $L^{2,1}(X)$  ya que

$$\|g_j\|_{2,1} \leq \left\| \sum_{j=1}^k |g_j| \right\|_{2,1} = \|g\|_{2,1}^{(1)} < \infty.$$

También se puede probar algo análogo para el espacio  $L^{2,\infty}(X)$ . Como ocurría antes, parece razonable pensar que

$$L^{2,\infty}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_\infty)) = L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))'.$$

Definiremos la aplicación  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} : L^{2,\infty}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_\infty)) \longrightarrow L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))'$$

para cada  $h \in L^{2,\infty}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_\infty))$  como

$$\mathbf{R}_h g = \int_X \langle g_j(x) | h_j(x) \rangle_{\mathbb{C}^k} dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^k g_j(x) \overline{h_j(x)} dx$$

actuando sobre  $g \in L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$ . Veamos que esta aplicación identifica ambos espacios.

**Proposición 1.1.22.** *La aplicación  $\mathbf{R}$  definida anteriormente es un isomorfismo, y por lo tanto podemos identificar*

$$L^{2,\infty}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_\infty)) = L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))'.$$



**Demostración.** Por una parte es fácil ver que  $\mathbf{R}$  está bien definida ya que  $\mathbf{R}_h$  es un funcional continuo

$$|\mathbf{R}_h g| \leq \int_X \sum_{j=1}^k |g_j(x) \overline{h_j(x)}| dx \leq \int_X |H(x)| |G(x)| dx \leq \int_0^\infty H^*(t) G^*(t) dt,$$

y razonando como en (1.6) se tiene

$$|\mathbf{R}_h g| \leq \|H\|_{2,\infty} \|G\|_{2,1} = \|h\|_{2,\infty}^{(\infty)} \|g\|_{2,1}^{(1)}.$$

En particular, hemos demostrado que  $\|\mathbf{R}_h\| \leq \|h\|_{2,\infty}^{(\infty)}$ . Falta demostrar que  $\mathbf{R}$  es sobreyectiva y que su inversa es continua. Empezamos tomando  $S$  un funcional continuo definido en  $L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$ , para cada  $j = 1, \dots, k$  definimos las medidas

$$\sigma_j(E) = S(0 \dots \mathbf{1}_E \dots 0)$$

donde  $\mathbf{1}_E$  aparece en la posición  $j$ -ésima. Como  $S$  es un elemento del dual, es obvio que  $\sigma_j$  es absolutamente continua respecto de la medida de  $X$  ya que

$$|\sigma_j(E)| = |S(0 \dots \mathbf{1}_E \dots 0)| \lesssim \|(0 \dots \mathbf{1}_E \dots 0)\|_{2,1}^{(1)} = \|\mathbf{1}_E\|_{2,1} \simeq |E|^{1/2}.$$

Utilizando el teorema de Radon-Nikodym para cada  $j$  existe  $h_j$  medible tal que

$$S(0 \dots \mathbf{1}_E \dots 0) = \sigma_j(E) = \int_E \overline{h_j(x)} dx = \int_X \mathbf{1}_E(x) \overline{h_j(x)} dx.$$

Por linealidad, podemos extender lo anterior para cada función simple  $g_j$ , es decir

$$S(0 \dots g_j \dots 0) = \int_X g_j(x) \overline{h_j(x)} dx.$$

De nuevo por linealidad, tomando  $g = (g_1, \dots, g_k)$  una  $k$ -upla de funciones simples, se tiene

$$S(g_1, \dots, g_k) = \int_X \sum_{j=1}^k g_j(x) \overline{h_j(x)} dx.$$

Para que esta igualdad se verifique para toda  $g \in L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$  necesitamos un resultado de densidad. Sea  $g = (g_1, \dots, g_k) \in L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$ , como ya sabemos cada  $g_j \in L^{2,1}(X)$  así que podemos escoger sucesiones de funciones simples  $(g_j^n)$  que aproximen a  $g_j$  en norma. Consideramos la sucesión de los  $g^n = (g_1^n, \dots, g_k^n)$ , podemos escribir

$$\|g^n - g\|_{2,1}^{(1)} = \left\| \sum_{j=1}^k |g_j^n - g_j| \right\|_{2,1} \lesssim \sum_{j=1}^k \|g_j^n - g_j\|_{2,1} \longrightarrow 0.$$

Hemos demostrado que el producto cartesiano de  $k$  veces el conjunto de funciones simples es denso en  $L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$ . Utilizando el teorema de la convergencia monótona se concluye

$$S(g_1, \dots, g_k) = \int_X \sum_{j=1}^k g_j(x) \overline{h_j(x)} dx = \mathbf{R}_h g$$

para toda  $g \in L^{2,1}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$ , con lo que tenemos caracterizado  $S = \mathbf{R}_h$ . Veamos que de hecho  $h$  pertenece a  $L^{2,\infty}(X, (\mathbb{C}, \|\cdot\|_\infty))$ . Para cada  $\lambda > 0$  definimos la función

$$g(x) = \left( \frac{h_1(x)}{|h_1(x)|} \mathbf{1}_{\{H>\lambda\}}(x), \dots, \frac{h_k(x)}{|h_k(x)|} \mathbf{1}_{\{H>\lambda\}}(x) \right).$$

Teniendo en cuenta que  $|h_j|^2 = h_j \overline{h_j}$ , por construcción al aplicarle  $\mathbf{R}_h$  queda

$$\mathbf{R}_h g = \int_X \left( \sum_{j=1}^k |h_j(x)| \right) \mathbf{1}_{\{H>\lambda\}}(x) dx$$

y por definición de  $H$ , es decir (1.11), obtenemos

$$\mathbf{R}_h g \geq \int_X |H(x)| \mathbf{1}_{\{H>\lambda\}}(x) dx \geq \lambda |\{H > \lambda\}| = \lambda d_H(\lambda).$$

Hemos llegado a la desigualdad  $\lambda d_H(\lambda) \leq \|\mathbf{R}\| \|g\|_{2,1}^{(1)}$ . Por otra parte, recordando (1.12) tenemos

$$|G(x)| = \sum_{j=1}^k |g_j(x)| = k \mathbf{1}_{\{H>\lambda\}}(x),$$

con lo que podemos computar la norma  $\|\cdot\|_{2,1}^{(1)}$  de la función  $g$

$$\|g\|_{2,1}^{(1)} = \|k \mathbf{1}_{\{H>\lambda\}}\|_{2,1} = 2k \int_0^\infty |\{\mathbf{1}_{\{H>\lambda\}} > \alpha\}|^{1/2} d\alpha.$$

Razonando análogamente a como se hizo en (1.9) se concluye

$$\|g\|_{2,1}^{(1)} = 2k \int_0^1 |\{H > \lambda\}|^{1/2} d\alpha = 2k d_H(\lambda)^{1/2}.$$

Podemos terminar la demostración juntando las dos estimaciones que hemos conseguido

$$\lambda d_H(\lambda) \leq 2k \|\mathbf{R}_h\| d_H(\lambda)^{1/2} \text{ y por lo tanto } d_H(\lambda) \leq \frac{4k^2 \|\mathbf{R}_h\|^2}{\lambda^2}.$$

Con esto,  $h \in L^{2,\infty}(X, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_\infty))$  y de hecho la inversa es continua ya que

$$\|h\|_{2,\infty}^{(\infty)} = \|H\|_{2,\infty} \leq 2k \|\mathbf{R}_h\|.$$

■

## 1.2. Distribuciones temperadas

A lo largo de este capítulo desarrollaremos la teoría necesaria para caracterizar los operadores acotados de  $L^2(\mathbb{R})$  que conmutan con las traslaciones. Denotaremos el operador traslación por

$$\text{Tr}_y f(x) = f(x - y) \text{ para cada } y \in \mathbb{R}.$$

Se demostrará que estos operadores vienen dados por la convolución con una distribución temperada. Las distribuciones temperadas son una especie de distribuciones, pero en vez de actuar sobre funciones de soporte compacto actúan sobre funciones de Schwarz  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . El dual de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  es el espacio de distribuciones temperadas. Todas las funciones diferenciables de soporte compacto pertenecen a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , pero no son las únicas. El ejemplo más claro de función de Schwarz es la función  $e^{-x^2}$ , que aunque no tenga soporte compacto, decrece muy rápido en el infinito.

**Definición 1.2.1.** *Se dice que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  si  $f$  es una función infinitamente diferenciable tal que para cualesquiera  $n, m$  enteros no negativos se tiene*

$$\rho_{n,m}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n| |\partial^m f(x)| = C_{n,m} < \infty.$$

La siguiente caracterización de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  será muy útil a lo largo de todo el trabajo. Supongamos que  $f$  es una función diferenciable tal que para cualesquiera  $n, m$  se tiene

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^n |\partial^m f(x)| < \infty. \quad (1.13)$$

Si se cumple (1.13) es claro que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , y de hecho el recíproco también es cierto. Tomamos  $x \in \mathbb{R}$  y  $n, m$  enteros no negativos, por el binomio de Newton existen constantes  $K_j$  simétricas tales que

$$(1 + |x|)^n = 1 + K_1|x| + K_2|x|^2 + \cdots + K_{n-1}|x|^{n-1} + |x|^n.$$

Multiplicando la expresión anterior por  $|\partial^m f(x)|$  y tomando supremos en  $x \in \mathbb{R}$  obtenemos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^n |\partial^m f(x)| = \sum_{j=0}^n K_j C_{j,m} < \infty$$

por lo que las dos definiciones son equivalentes. Sea ahora  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , poniendo  $n = M$  y  $m = 0$ , existe  $C_M$  tal que

$$|f(x)| \leq \frac{C_M}{(1 + |x|)^M} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

El lado izquierdo de la desigualdad es una función integrable, cuya integral podemos calcular fácilmente

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x|)^M} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + x)^M} dx = 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{s^M} ds = \frac{2}{M-1}.$$

Este hecho implica que la clase de Schwartz está contenida en  $L^1(\mathbb{R})$ , y por un razonamiento análogo también está contenida en todos los  $L^p(\mathbb{R})$  con  $p \geq 1$ .

Recordemos que la transformada de Fourier se relaciona con las derivadas por

$$\widehat{\partial^m f}(\xi) = (i\xi)^m \widehat{f}(\xi) \quad (1.15)$$

y si definimos  $g(x) = (-ix)^m f(x)$  entonces

$$\widehat{g}(\xi) = \partial^m \widehat{f}(\xi). \quad (1.16)$$

Estos hechos elementales nos permiten probar que la inversión de Fourier funciona en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , entonces  $\widehat{f}$  y  $f^\vee$  también pertenecen a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*

**Demostración.** Teniendo en cuenta que  $f^\vee(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$  sólo hará falta comprobar el resultado para  $\widehat{f}$ . Es claro que  $\widehat{f}$  es diferenciable, y de hecho

$$\widehat{g}(\xi) = \partial^m \widehat{f}(\xi) \text{ para cada } m$$

con  $g$  definida como antes. Para cada  $n$  definiremos  $G(x) = i^{-n} \partial^n g(x)$ . Por construcción, es claro que  $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  y además utilizando (1.15) y (1.16)

$$\widehat{G}(\xi) = \frac{1}{i^n} \widehat{\partial^n g}(\xi) = \frac{1}{i^n} (i\xi)^n \widehat{g}(\xi) = \xi^n \partial^m \widehat{f}(\xi).$$

Por lo tanto  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ya que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi^n| |\partial^m \widehat{f}(\xi)| = \|\widehat{G}\|_\infty \leq \|G\|_1 < \infty,$$

y lo mismo ocurre para la transformada inversa. ■

Con esto, hemos obtenido que

$$\wedge : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Antes de seguir con las distribuciones temperadas tenemos que ser capaces de dotar a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  de una topología. Dada una sucesión  $(f_k) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$  diremos que  $f_k$  converge a  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  si para cualesquiera  $n, m$  se cumple que

$$\rho_{n,m}(f_k - f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n| |\partial^m (f_k - f)(x)| \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Esta noción de convergencia es compatible con una topología en la cual la suma, el producto, y la derivación son funciones continuas en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Una subbase para los abiertos que contienen al 0 en esta topología es

$$\{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \rho_{n,m}(f) < r \text{ para todo } n, m \text{ y todo } r \in \mathbb{Q}\}.$$

El origen tiene una base numerable de entornos y podemos dotar  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  de una distancia. Definimos para cada  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  la aplicación

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(f - g)}{1 + \rho_j(f - g)},$$

donde  $j$  es una enumeración de las  $\rho_{n,m}$ . Es fácil comprobar que  $d$  es una distancia que genera una topología equivalente a la dada, y que de hecho el espacio métrico  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  es completo.

**Definición 1.2.3.** Diremos que  $u$  es una distribución temperada si  $u$  es una aplicación lineal y continua

$$u : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Para definir una distribución, utilizaremos la notación

$$\langle u, g \rangle = u(g) \text{ para cada } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Antes de seguir recordemos el operador de reflexión, que venía dado por

$$\tilde{f}(y) = f(-y).$$

**Definición 1.2.4.** Sea  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$  y sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , se definen  $\tilde{u}$  y  $f * u$  como las distribuciones temperadas tales que

$$\langle \tilde{u}, g \rangle = \langle u, \tilde{g} \rangle$$

$$\langle f * u, g \rangle = \langle u, \tilde{f} * g \rangle$$

para cada  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Observación 1.2.5.** Sea  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$  y sean  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , por definición

$$\langle f * u, g \rangle = \langle u, \tilde{f} * g \rangle = u\left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\cdot - y)g(y) dy\right) = u\left(\int_{\mathbb{R}} \text{Tr}_y \tilde{f}(\cdot)g(y) dy\right).$$

Para poder meter  $u$  dentro de la integral, tenemos que demostrar que las sumas de Riemann convergen en la topología del espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Para cada  $N \in \mathbb{N}$  dividimos el intervalo  $[-N, N]$  en  $2N^2$  intervalos  $I_m$  de longitud  $1/N$ . Sea  $y_m$  el centro del intervalo  $I_m$ , definimos las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \text{Tr}_y \tilde{f}(x)g(y) dy$$

$$F_N(x) = \sum_{m=1}^{2N^2} \text{Tr}_{y_m} \tilde{f}(x)g(y_m)|I_m|.$$

Queremos ver que  $F_N \rightarrow F$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , es decir que para cualesquiera  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\rho_{\alpha, \beta}(F_N - F) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha| |\partial^\beta (F_N - F)(x)| \longrightarrow 0$$

cuando  $N$  tiende a infinito. Escribiremos

$$\partial^\beta (F_N - F)(x) = \sum_{m=1}^{2N^2} \partial_x^\beta \tilde{f}(x - y_m)g(y_m)|I_m| - \int_{\mathbb{R}} \partial_x^\beta \tilde{f}(x - y)g(y) dy.$$

Separando la integral en dos y tomando valores absolutos, llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} |\partial^\beta (F_N - F)(x)| &= \sum_{m=1}^{2N^2} \int_{I_m} |\partial_x^\beta \tilde{f}(x - y_m)g(y_m) - \partial_x^\beta \tilde{f}(x - y)g(y)| dy \\ &\quad + \int_{[-N, N]^c} |\partial_x^\beta \tilde{f}(x - y)g(y)| dy \end{aligned} \tag{1.17}$$

Empezaremos acotando el integrando del primer sumando de (1.17). Por el teorema del valor medio existe  $\xi = y + \theta(y_m - y)$  con  $\theta \in [0, 1]$  tal que dicho integrando coincide con

$$|y_m - y| |\partial_y (\partial_x^\beta \tilde{f}(x - y)g(y))(\xi)|.$$

Teniendo en cuenta que  $y \in I_m$  es claro que el primer factor está acotado por  $1/N$ . Utilizando la regla de Leibniz para el segundo factor y teniendo en cuenta que aparecen funciones de Schwarz, para  $M > 2\alpha$  tenemos

$$|\partial_y (\partial_x^\beta \tilde{f}(x - y)g(y))(\xi)| \lesssim \frac{1}{(1 + |x - \xi|)^M} \frac{1}{(2 + |\xi|)^M}.$$

De hecho, por elección de  $|\xi|$  se ve que  $|y| \leq |\xi| + 1$  y por lo tanto

$$|y_m - y| |\partial_y (\partial_x^\beta \tilde{f}(x - y)g(y))(\xi)| \lesssim \frac{1}{N} \frac{1}{(1 + |x|)^{M/2}} \frac{1}{(1 + |y|)^{M/2}}.$$

Para el segundo sumando de (1.17) basta con usar la regla de Leibniz para obtener

$$|\partial_x^\beta \tilde{f}(x - y)g(y)| \lesssim \frac{1}{(1 + |x - y|)^M} \frac{1}{(1 + |y|)^M} \lesssim \frac{1}{(1 + |x|)^{M/2}} \frac{1}{(1 + |y|)^{M/2}}.$$

Juntando las estimaciones de cada sumando llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} |x^\alpha| |\partial^\beta (F_N - F)(x)| &\lesssim \frac{1}{N} \frac{|x|^\alpha}{(1 + |x|)^{M/2}} \int_{-N}^N \frac{1}{(1 + |y|)^{M/2}} dy \\ &\quad + \frac{|x|^\alpha}{(1 + |x|)^{M/2}} \int_{[-N, N]^c} \frac{1}{(1 + |y|)^{M/2}} dy. \end{aligned}$$

Por elección de  $M$  y teniendo en cuenta que los integrandos son funciones de Schwarz, es fácil concluir que  $\rho_{\alpha, \beta}(F_N - F) \rightarrow 0$ . Con lo que hemos demostrado, podemos identificar

$$\langle f * u, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(\text{Tr}_y \tilde{f})g(y) dy$$

y como  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  es arbitrario, obtenemos

$$(f * u)(y) = u(\text{Tr}_y \tilde{f}) = \langle u, \text{Tr}_y \tilde{f} \rangle. \quad \blacksquare$$

**Lema 1.2.6.** *Sea  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  un operador acotado que conmuta con las traslaciones. Para cada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , las derivadas distribucionales de  $Tf$  son funciones de  $L^2(\mathbb{R})$  tales que*

$$\partial^m (Tf) = T(\partial^m f) \text{ para todo } m \text{ entero no negativo.}$$

**Demostración.** Empezamos tomando  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Por una parte es claro que

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \partial g(x) \rightarrow 0$$

en  $L^2(\mathbb{R})$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Por definición de  $\partial(Tf)$ , sabemos que

$$\langle \partial(Tf), g \rangle = - \int_{\mathbb{R}} Tf(x) \partial g(x) dx = - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} Tf(x) \left( \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) dx.$$

Haciendo un cambio de variable en el primer sumando y reordenando obtenemos

$$\langle \partial(Tf), g \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{Tf(x)g(x) - Tf(x-h)g(x)}{h} dx.$$

Por hipótesis  $T$  conmuta con las traslaciones, y por lo tanto

$$Tf(x-h) = \text{Tr}_h(Tf)(x) = T(\text{Tr}_h f)(x).$$

Utilizando lo anterior y sacando factor común  $g(x)$  podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle \partial(Tf), g \rangle &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left[ T \circ \left( \frac{f - \text{Tr}_h f}{h} \right) \right] (x) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} T(\partial f)(x) g(x) dx \\ &= \langle T(\partial f), g \rangle. \end{aligned}$$

Como  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  es arbitraria, hemos deducido que para toda  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  se verifica  $\partial(Tf) = T(\partial f)$ . Para demostrar el caso general basta con razonar recursivamente

$$\partial^m(Tf) = \partial^{m-1}(\partial(Tf)) = \partial^{m-1}(T(\partial f)) = \dots = T(\partial^m f).$$

Como  $\partial^m(Tf) = T(\partial^m f)$  es evidente que las derivadas distribucionales de  $Tf$  pertenecen a  $L^2(\mathbb{R})$ . ■

**Lema 1.2.7.** *Sea  $h \in L^2(\mathbb{R})$  tal que todas sus derivadas distribucionales  $\partial^m h$  pertenecen a  $L^2(\mathbb{R})$ . Entonces existe una función continua  $H$  cumpliendo*

$$|H(0)| \lesssim \sum_{m=0}^2 \|\partial^m h\|_2$$

y tal que  $h(x) = H(x)$  en casi todo punto.

**Demostración.** Para cada  $R \geq 1$  definimos una función meseta  $\varphi_R$  soportada en  $[-2R, 2R]$  y tal que  $\varphi_R \equiv 1$  en el intervalo  $[-R, R]$ . Como  $h \in L^2(\mathbb{R})$  es evidente que  $\varphi_R h \in L^1(\mathbb{R})$  ya que

$$\|\varphi_R h\|_1 \leq \|\varphi_R\|_2 \|h\|_2 < \infty.$$

Para poder aplicar la inversión de Fourier a  $\varphi_R h$ , necesitamos que  $\widehat{\varphi_R h}$  también pertenezca a  $L^1(\mathbb{R})$ . Por una parte es fácil ver que

$$(1 + |\xi|)^2 \leq 2 \sum_{m=0}^2 |(i\xi)^m|.$$

Multiplicando por  $|\widehat{\varphi_R h}(\xi)|$  y despejando, llegamos a

$$|\widehat{\varphi_R h}(\xi)| \lesssim \frac{1}{(1+|\xi|)^2} \sum_{m=0}^2 |(i\xi)^m \widehat{\varphi_R h}(\xi)|. \quad (1.18)$$

Utilizando (1.15) podemos reescribir (1.18) como

$$|\widehat{\varphi_R h}(\xi)| \lesssim \frac{1}{(1+|\xi|)^2} \sum_{m=0}^2 |\partial^m(\widehat{\varphi_R h})(\xi)|.$$

Tomando supremos y utilizando que la norma  $\|\cdot\|_\infty$  de la transformada está acotada por la norma  $\|\cdot\|_1$  de la función original

$$|\widehat{\varphi_R h}(\xi)| \lesssim \frac{1}{(1+|\xi|)^2} \sum_{m=0}^2 \|\partial^m(\varphi_R h)\|_1.$$

Por hipótesis  $\text{sop}(\varphi_R) \subseteq [-2R, 2R]$ , y utilizando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi_R h}(\xi)| &\lesssim \frac{1}{(1+|\xi|)^2} \sum_{m=0}^2 \|\mathbb{1}_{[-2R, 2R]}\|_2 \|\partial^m(\varphi_R h)\|_2 \\ &\lesssim \frac{\sqrt{R}}{(1+|\xi|)^2} \sum_{m=0}^2 \|\partial^m(\varphi_R h)\|_2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Por la regla de Leibniz, se tiene que

$$\partial^m(\varphi_R h) = \partial^m \varphi_R h + m \partial^{m-1} \varphi_R \partial h + \cdots + m \partial \varphi_R \partial^{m-1} h + \varphi_R \partial^m h$$

y por construcción, todas las derivadas  $\partial^m \varphi_R$  están acotadas por cierta  $C_{m,R}$ . Como tenemos una cantidad finita de sumandos, podemos deducir que

$$\sum_{m=0}^2 \|\partial^m(\varphi_R h)\|_2 \lesssim \sum_{m=0}^2 \|\partial^m h\|_2.$$

Sustituyendo en (1.19) e integrando, se concluye que

$$\|\widehat{\varphi_R h}\|_1 \lesssim \sum_{m=0}^2 \|\partial^m h\|_2 < \infty,$$

ya que por hipótesis  $\partial^m h \in L^2(\mathbb{R})$  para todo  $m$ . Hemos demostrado que  $\widehat{\varphi_R h} \in L^1(\mathbb{R})$  para todo  $R$ , y ya podemos aplicar la fórmula de inversión. Por una parte sabemos que

$$\varphi_R(x)h(x) = (\widehat{\varphi_R h})^\vee(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}$$

y como  $\varphi_R \equiv 1$  en  $[-R, R]$ ,  $h$  coincide en casi todo  $x \in [-R, R]$  con una función continua. Como  $R$  es arbitrario, podemos deducir que existe  $H$  continua tal que

$$h(x) = H(x) \text{ en casi todo punto.}$$



De hecho, se cumple la condición del enunciado ya que tomando  $R = 1$

$$|H(0)| \leq \|\varphi_1 h\|_\infty \leq \|\widehat{\varphi_1 h}\|_1 \lesssim \sum_{m=0}^2 \|\partial^m h\|_2.$$

En la segunda desigualdad hemos usado la fórmula de inversión.  $\blacksquare$

**Teorema 1.2.8.** *Sea  $T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$  un operador acotado que conmuta con las traslaciones. Existe una única distribución temperada  $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$  tal que  $Tf = f * v$ .*

**Demostración.** Utilizando el lema 1.2.6, sabemos que las derivadas distribucionales de  $Tf$  son funciones de  $L^2(\mathbb{R})$ . Empezamos definiendo la aplicación

$$u : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad \langle u, f \rangle = Tf(0) \quad \text{para cada } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

La definición anterior tiene sentido ya que el lema 1.2.7 nos asegura que  $Tf$  coincide en casi todo punto con una función continua. Poniendo  $H = Tf$  en el lema 1.2.7 llegamos a

$$|\langle u, f \rangle| = |Tf(0)| \lesssim \sum_{m=0}^2 \|\partial^m (Tf)\|_2.$$

Podemos utilizar de nuevo el lema 1.2.6, junto con la acotación de  $T$ , para concluir

$$|\langle u, f \rangle| \lesssim \sum_{m=0}^2 \|T(\partial^m f)\|_2 \lesssim \sum_{m=0}^2 \|\partial^m f\|_2 \leq \sum_{|n|, |m| \leq 2} \rho_{n,m}(f),$$

por lo que efectivamente  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ . Definiremos  $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  como  $v = \tilde{u}$ , usando la observación 1.2.5 podemos escribir

$$(f * v)(x) = (f * \tilde{u})(x) = \langle \tilde{u}, \text{Tr}_x f \rangle = \langle u, \text{Tr}_{-x} f \rangle = T(\text{Tr}_{-x} f)(0).$$

Como  $T$  conmuta con las traslaciones, se deduce que

$$(f * v)(x) = \text{Tr}_{-x}(Tf)(0) = Tf(x),$$

como queríamos demostrar.  $\blacksquare$

**Corolario 1.2.9.** *En las condiciones del teorema anterior se cumple que  $\widehat{v} \in L^\infty(\mathbb{R})$ .*

**Demostración.** Para cada  $R$  definimos funciones meseta  $\varphi_R$  soportadas en  $[-2R, 2R]$  y tales que  $\varphi_R \equiv 1$  en  $[-R, R]$ . Es obvio que en esta situación tenemos

$$\varphi_R \widehat{v} = (\varphi_R^\vee * v)^\wedge = (T(\varphi_R^\vee))^\wedge \in L^2(\mathbb{R}).$$

Por construcción, para cada  $R$  se tiene  $\varphi_R \widehat{v} = \widehat{v}$  en  $[-R, R]$ . Por lo tanto  $\widehat{v} \in L^2([-R, R])$  para todo  $R$ , es decir  $\widehat{v} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Supongamos que  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  tiene soporte compacto, por una parte es evidente que

$$\langle \widehat{v} f | \widehat{v} f \rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\widehat{v}(x)|^2 dx < \infty. \quad (1.20)$$

Por otra parte, utilizando el teorema de Plancherel dos veces y teniendo en cuenta que al final desaparecen las constantes

$$\langle \widehat{v}f | \widehat{v}f \rangle = 2\pi \langle v * f^\vee | v * f^\vee \rangle \leq \|T\|^2 \|f\|_2^2. \quad (1.21)$$

Juntando las expresiones (1.20) y (1.21) podemos deducir que

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \|T\|^2 - |\widehat{v}(x)|^2 \right) |f(x)|^2 dx \geq 0. \quad (1.22)$$

Para cada  $y \in \mathbb{R}$  y cada  $r > 0$  elegimos  $f$  tal que se cumpla

$$|f(x)|^2 = \frac{\mathbb{1}_{B(y,r)}(x)}{|B(y,r)|}.$$

Esta función es acotada y de soporte compacto. Sustituyendo  $f$  en la expresión (1.22) obtenemos

$$0 \leq \frac{1}{|B(y,r)|} \int_{B(y,r)} \left( \|T\|^2 - |\widehat{v}(x)|^2 \right) dx.$$

Tomando límites en  $r \rightarrow 0$  y utilizando el teorema de diferenciación de Lebesgue podemos concluir que  $0 \leq \|T\|^2 - |\widehat{v}(y)|^2$  para casi todo  $y$ . Es fácil comprobar que entonces

$$|\widehat{v}(y)| \leq \|T\| \text{ para casi todo } y \in \mathbb{R},$$

por lo que  $\widehat{v} \in L^\infty(\mathbb{R})$  y el corolario queda demostrado. ■

### 1.3. Algunos resultados útiles

Sea  $f$  una función localmente integrable, definimos el operador maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma en todas las bolas que contienen al punto  $x$ . Es fácil ver que el operador  $M$  es sublineal, es decir que para cualesquiera  $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  se cumple

$$M(f + g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x).$$

Empezamos enunciando el lema del recubrimiento de Vitali, cuya demostración se puede encontrar en cualquier libro elemental de teoría de la medida.

**Lema 1.3.1.** *Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto no vacío de medida finita y sea  $\mathcal{U}$  un recubrimiento de  $E$  por bolas abiertas. Existe una subfamilia finita de bolas disjuntas  $B_1, \dots, B_m$  tal que*

$$|E| \lesssim \sum_{j=1}^m |B_j|.$$

**Proposición 1.3.2.** *El operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil  $(1, 1)$ , es decir*

$$|\{Mf > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$$

para cada  $\lambda > 0$ .

**Demostración.** Sea  $\lambda > 0$ , definimos los conjuntos

$$E = \{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > \lambda\} \text{ y } E_n = E \cap (-n, n).$$

Por definición de  $M$ , dado  $x \in E_n$  existe una bola  $B$  que contiene a  $x$  tal que

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy > \lambda.$$

Aplicamos el lema de recubrimiento de Vitali para obtener una familia de bolas disjuntas  $B_1, \dots, B_m$  para las que se cumple la desigualdad anterior y tales que

$$|E_n| \lesssim \sum_{j=1}^m |B_j| \leq \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda} \int_{B_j} |f(y)| dy.$$

Como las bolas son disjuntas llegamos a

$$|E_n| \lesssim \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 \text{ y tomando límites } |E| \lesssim \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$$

como queríamos demostrar. ■

**Teorema 1.3.3.** *El operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado en  $L^2(\mathbb{R})$ . Es decir, para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se tiene*

$$\|Mf\|_2 \lesssim \|f\|_2.$$

**Demostración.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , descomponemos  $f = f_1 + f_2$  donde hemos definido

$$f_1 = f \mathbf{1}_{\{f \geq \frac{\lambda}{2}\}} \quad \text{y} \quad f_2 = f \mathbf{1}_{\{f < \frac{\lambda}{2}\}}.$$

Como  $M$  es sublineal, sabemos que  $Mf \leq Mf_1 + Mf_2$ . Además, por definición de  $f_2$  podemos escribir

$$Mf_2(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_{B \cap \{f < \frac{\lambda}{2}\}} |f(y)| dy \leq \frac{\lambda}{2} \sup_{x \in B} \frac{|B \cap \{f < \frac{\lambda}{2}\}|}{|B|} \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Por lo tanto  $Mf \leq Mf_1 + \lambda/2$ , y dado  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $Mf(x) > \lambda$  se verifica que  $Mf_1(x) > \lambda/2$ . Por otra parte, la función  $f_1$  es integrable, ya que utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|f_1\|_1 = \int_{\{f \geq \frac{\lambda}{2}\}} |f(x)| dx \leq \|f\|_2 |\{f \geq \frac{\lambda}{2}\}|^{1/2}.$$

La última cantidad es finita ya que  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Podemos utilizar ahora el hecho de que  $Mf$  es de tipo débil  $(1, 1)$ , que implica

$$|\{Mf > \lambda\}| \leq |\{Mf_1 > \frac{\lambda}{2}\}| \lesssim \frac{1}{\lambda} \|f_1\|_1 = \frac{1}{\lambda} \int_{\{f \geq \frac{\lambda}{2}\}} |f(x)| dx. \quad (1.23)$$

Utilizando la proposición 1.1.5 expresamos  $\|Mf\|_2^2$  como

$$\|Mf\|_2^2 = 2 \int_0^\infty \lambda |\{Mf > \lambda\}| d\lambda.$$

La expresión (1.23) nos permite acotar  $\|Mf\|_2^2$  por

$$\begin{aligned} \|Mf\|_2^2 &\lesssim \int_0^\infty \int_{\{f > \frac{\lambda}{2}\}} |f(x)| dx d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f > \frac{\lambda}{2}\}}(x) d\lambda dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \int_0^{2|f(x)|} d\lambda dx \\ &\simeq \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

y por lo tanto  $Mf$  es acotado en  $L^2(\mathbb{R})$  como queríamos demostrar.  $\blacksquare$

Consideremos ahora una versión centrada del operador maximal de Hardy-Littlewood, es decir

$$\mathbf{M}f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |f(y)| dy$$

Es inmediato comprobar que  $\mathbf{M} \leq M \leq 2\mathbf{M}$ , y por lo tanto el operador  $\mathbf{M}$  también es acotado. De hecho, podemos ver  $\mathbf{M}$  como un operador de convolución. Para ello definiremos

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]} \quad \text{y} \quad K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{para cada } \varepsilon > 0.$$

Con esta familia de  $K_\varepsilon$  podemos escribir

$$|f| * K_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x-y) |f(y)| dy = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |f(y)| dy.$$

Tomando supremos en  $\varepsilon > 0$  se concluye que

$$\mathbf{M}f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |f| * K_\varepsilon(x)$$

Hemos elegido una función radial  $K$  de soporte compacto, pero podemos refinar aún más el argumento. Lo anterior puede extenderse a funciones radiales  $K$  de decrecimiento rápido. En la siguiente proposición mostraremos cómo hacerlo en un contexto más general. En vez de tomar el supremo en  $\varepsilon > 0$  lo tomaremos en  $\varepsilon > \varepsilon_0$  para  $\varepsilon_0 \geq 0$ .

**Proposición 1.3.4.** *Sea  $M$  un número natural y sea  $\varepsilon > 0$ , definimos*

$$K(x) = \frac{1}{(1+|x|)^M} \quad \text{y también} \quad K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

*Existe  $C_M > 0$  tal que para todo  $\varepsilon_0 \geq 0$  se verifica*

$$\sup_{\varepsilon > \varepsilon_0} (|f| * K_\varepsilon)(x) \leq C_M \sup_{\varepsilon > \varepsilon_0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |f(t)| dt$$

**Demostración.** Sea  $x \in \mathbb{R}$  y definamos  $g(y) = f(x+y)$ , entonces por una parte

$$(|g| * K_\varepsilon)(0) = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| K_\varepsilon(y) dy = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| K_\varepsilon(x-y) dy = (|f| * K_\varepsilon)(x).$$

y por otra parte podemos escribir

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g(t)| dt = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x+t)| dt = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |f(t)| dt.$$

Gracias a esas observaciones, sin pérdida de generalidad sólo hará falta probar el resultado cuando  $x = 0$ . Tomamos  $\varepsilon_0 \geq 0$  y  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , por simetría de  $K$

$$(|f| * K_\varepsilon)(0) = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| K_\varepsilon(y) dy = \int_0^{\infty} F(y) K_\varepsilon(y) dy$$

siendo  $F(y) = |f(y)| + |f(-y)|$ . Ponemos  $(f * K_\varepsilon)(0) = I_1 + I_2$  donde

$$I_1 = \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} |f(y)| K_\varepsilon(y) dy \quad \text{y} \quad I_2 = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} F(y) K_\varepsilon(y) dy.$$

Empezamos acotando  $I_1$ , teniendo en cuenta que  $\varepsilon > \varepsilon_0$  y que  $K$  es una función acotada

$$I_1 \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(y)| K_{\varepsilon}(y) dy \simeq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(y)| K\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy \lesssim \sup_{\varepsilon > \varepsilon_0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(y)| dy.$$

Para demostrar la proposición bastará con ver que

$$I_2 \lesssim \sup_{\varepsilon > \varepsilon_0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(y)| dy.$$

Llamaremos  $\Delta$  al lado derecho de la última desigualdad. Integrando por partes, con  $G(y) = \int_{\varepsilon_0}^y F(t) dt$  podemos escribir

$$I_2 = \left[ G(y) K_{\varepsilon}(y) \right]_{\varepsilon_0}^{\infty} + \int_{\varepsilon_0}^{\infty} G(y) (-K'_{\varepsilon}(y)) dy. \quad (1.24)$$

Por definición de  $G$  y utilizando que  $K$  decrece rápidamente en el infinito, el primer sumando se anula. Además, el integrando del segundo sumando es positivo ya que  $K_{\varepsilon}$  es decreciente en el semieje positivo. Podemos acotar  $G$  por

$$G(y) = \int_{\varepsilon_0}^y F(t) dt \leq \int_{-y}^y |f(t)| dt \leq 2y \sup_{\varepsilon > \varepsilon_0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(t)| dt = 2y\Delta.$$

Sustituyendo en (1.24) obtenemos

$$I_2 \leq \Delta \int_{\varepsilon_0}^{\infty} 2y (-K'_{\varepsilon}(y)) dy \leq \Delta \int_0^{\infty} 2y (-K'_{\varepsilon}(y)) dy.$$

Sólo queda volver a integrar por partes para concluir

$$I_2 \leq \Delta \left( \left[ -2yK_{\varepsilon}(y) \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} K_{\varepsilon}(y) dy \right) = \Delta \|K\|_1 \lesssim \Delta,$$

donde hemos utilizado que  $\|K_{\varepsilon}\|_1 = \|K\|_1$  es un valor fijo. ■

Como ya sabemos, dada  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  y  $M \in \mathbb{N}$  podemos acotar

$$|\psi(x)| \lesssim \frac{1}{(1+|x|)^M}$$

así que podemos extender el resultado anterior a funciones de Schwarz. Sea  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  y para cada  $\varepsilon > 0$  definimos

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Con la función  $K$  que definimos anteriormente, se verifica la acotación

$$|\psi_{\varepsilon}(x)| \lesssim \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = K_{\varepsilon}(x)$$

y por lo tanto tenemos

$$\sup_{\varepsilon > \varepsilon_0} (|f| * |\psi_{\varepsilon}|)(x) \lesssim \sup_{\varepsilon > \varepsilon_0} (|f| * K_{\varepsilon})(x) \lesssim \sup_{\varepsilon > \varepsilon_0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |f(t)| dt. \quad (1.25)$$

Este resultado se utilizará en la última sección del tercer capítulo. También será útil conocer la siguiente acotación de operadores maximales. En este caso impondremos que las bolas tengan un radio acotado inferiormente.

**Proposición 1.3.5.** *Sea  $J$  un intervalo, y sea  $4J$  el intervalo de centro  $c(J)$  y de longitud  $4|J|$ . Para toda  $h$  se tiene*

$$\sup_{x \in J} \sup_{\delta \geq 4|J|} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |h(t)| dt \leq 2 \inf_{x \in J} \sup_{\delta \geq 4|J|} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |h(t)| dt.$$

**Demostración.** Para probar el enunciado, basta con ver que dados  $x_1, x_2 \in J$  cualesquiera, se tiene

$$\sup_{\delta \geq 4|J|} \frac{1}{2\delta} \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} |h(t)| dt \leq 2 \sup_{\delta \geq 4|J|} \frac{1}{2\delta} \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} |h(t)| dt.$$

Tomando supremos e ínfimos se tiene el resultado general. Aún podemos simplificar más el problema, veamos que para cualesquiera  $x_1, x_2 \in J$  y  $\delta_1 \geq 4|J|$ , existe  $\delta_2 \geq 4|J|$  tal que

$$I_1 = \frac{1}{2\delta_1} \int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1} |h(t)| dt \leq 2 \frac{1}{2\delta_2} \int_{x_2-\delta_2}^{x_2+\delta_2} |h(t)| dt = 2I_2.$$

Tomamos  $x_1, x_2 \in J$  y  $\delta_1 \geq 4|J|$  y definimos  $\delta_2 = x_2 - x_1 + \delta_1$ . Hemos supuesto sin pérdida de generalidad que  $x_1 \leq x_2$ , el otro caso es análogo.

$$I_2 = \frac{1}{2\delta_2} \int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1} |h(t)| dt + \frac{1}{2\delta_2} \int_{x_1+\delta_1}^{x_2+\delta_2} |h(t)| dt,$$

y por lo tanto la diferencia  $I_1 - 2I_2$  es igual a

$$I_1 - 2I_2 = \int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1} \left( \frac{1}{2\delta_1} |h(t)| - 2 \frac{1}{2\delta_2} |h(t)| \right) dt - 2 \frac{1}{2\delta_2} \int_{x_1+\delta_1}^{x_2+\delta_2} |h(t)| dt.$$

Por elección de  $\delta_2$ , es obvio que  $x_1 + \delta_1 \leq x_2 + \delta_2$ , y por lo tanto podemos acotar

$$I_1 - 2I_2 \leq \left( \frac{1}{2\delta_1} - \frac{2}{2\delta_2} \right) \int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1} |h(t)| dt.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que  $\delta_1 \geq 4|J|$

$$\frac{1}{2\delta_1} - \frac{2}{2\delta_2} = \frac{\delta_2 - 2\delta_1}{2\delta_1\delta_2} = \frac{x_2 - x_1 - \delta_1}{2\delta_1\delta_2} \leq \frac{|J| - 4|J|}{32|J|^2} \leq 0,$$

de donde se deduce que  $I_1 - 2I_2 \leq 0$  y la proposición queda demostrada. ■





## Capítulo 2

# Reducción del problema

### 2.1. Transferencia de multiplicadores

† El teorema de Carleson afirma que dada cualquier función  $F \in L^2(\mathbb{T})$ , la sucesión de sumas parciales de Fourier de  $F$  converge en casi todo punto a la propia función. Es decir

$$F(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N F(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{F}(n) e^{int} \text{ para casi todo } t \in \mathbb{T}.$$

Como ya sabemos, el núcleo de Dirichlet para las series está definido por

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} \text{ para } t \in \mathbb{T}.$$

Este núcleo está íntimamente relacionado con las sumas parciales de Fourier, recordemos que se tiene la igualdad  $S_N F(t) = F * D_N(t)$ . Así, el teorema de Carleson se puede formular como

$$F(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} F * D_N(t) \text{ para casi todo } t \in \mathbb{T}.$$

Este hecho se verifica en un subconjunto denso de  $L^2(\mathbb{T})$ , como pueden ser las funciones de  $C^\infty(\mathbb{T})$ , pero eso no es suficiente para probar el teorema. Para ello, tenemos que introducir un operador maximal al que llamaremos operador de Carleson. Buscaremos obtener una desigualdad de tipo débil para dicho operador. Definiremos el operador de Carleson para  $F \in L^2(\mathbb{T})$  según la expresión

$$\mathbf{C}F(t) = \sup_N |F * D_N(t)| = \sup_N \left| \sum_{n=-N}^N \widehat{F}(n) e^{int} \right|.$$

**Teorema 2.1.1.** *Supongamos que  $\mathbf{C} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^{2,\infty}(\mathbb{T})$  cumple  $\|\mathbf{C}F\|_{2,\infty} \lesssim \|F\|_2$ . Entonces, dada  $F \in L^2(\mathbb{T})$  se tiene*

$$F(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{F}(n) e^{int}$$

---

†La transferencia de multiplicadores se ha tratado según [KT] y [G1], el resto de secciones se han basado en los artículos [LT] y [La], con algunas contribuciones de [G2].

para casi todo  $t \in \mathbb{T}$ , y el teorema de Carleson queda probado.

**Demostración.** Consideremos la aplicación  $\mathcal{L}$  definida para cada  $F \in L^2(\mathbb{T})$  por

$$\mathcal{L}F(t) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| F(t) - \sum_{n=-N}^N \widehat{F}(n) e^{int} \right|.$$

Basta con demostrar que para cada  $\varepsilon > 0$  se cumple  $|\{\mathcal{L}F > \varepsilon\}| \lesssim \varepsilon$ . Sea  $G$  una función  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$  tal que  $\|F - G\|_2 \leq \varepsilon^{3/2}$ . Sabemos que  $G$  verifica en todo punto la fórmula del enunciado, así que utilizando la desigualdad triangular

$$|\mathcal{L}F(t)| \leq |F(t) - G(t)| + \sup_N \left| \sum_{n=-N}^N (\widehat{F}(n) - \widehat{G}(n)) e^{int} \right|.$$

Por definición el segundo sumando es el operador de Carleson actuando sobre  $F - G$ , por lo tanto utilizando la proposición 1.1.3

$$|\{\mathcal{L}F > \varepsilon\}| \leq |\{F - G > \varepsilon/2\}| + |\{\mathbf{C}(F - G) > \varepsilon/2\}|.$$

Nuestra hipótesis es equivalente a que para todo  $\lambda > 0$  se cumple

$$|\{\mathbf{C}F > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda^2} \|F\|_2^2,$$

lo que se traduce en que

$$|\{\mathbf{C}(F - G) > \varepsilon/2\}| \lesssim \frac{4}{\varepsilon^2} \|F - G\|_2^2 \lesssim \varepsilon.$$

Falta acotar el primer sumando, lo que se puede hacer utilizando la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{T}} |F(t) - G(t)|^2 dt \geq \int_{\{F - G > \varepsilon/2\}} |F(t) - G(t)|^2 dt \geq \frac{\varepsilon^2}{4} |\{F - G > \varepsilon/2\}|,$$

de la que obtenemos  $|\{F - G > \varepsilon/2\}| \lesssim \varepsilon^{-2} \|F - G\|_2^2 \leq \varepsilon$  y el teorema queda demostrado. ■

En el artículo [LT] se demuestra el teorema de Carleson en el contexto de la transformada. Se prueba que el operador

$$\mathcal{C}f(x) := \sup_N \left| \int_{-N}^N \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right|$$

cumple  $\|\mathcal{C}f\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2$  para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Un razonamiento análogo al del teorema anterior permitiría deducir

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ . La transferencia de multiplicadores asegura que ambas desigualdades débiles son equivalentes, aunque nosotros sólo nos fijaremos en una implicación, que establecemos como teorema.

**Teorema 2.1.2.** *Supongamos que el operador de Carleson para la transformada verifica*

$$\|\mathcal{C}f\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2 \text{ para } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

*Entonces el operador de Carleson para las series verifica*

$$\|\mathbf{C}F\|_{2,\infty} \lesssim \|F\|_2 \text{ para } F \in L^2(\mathbb{T}).$$

A lo largo de esta sección vamos a estudiar la demostración del teorema 2.1.2. Empezaremos introduciendo un núcleo de Dirichlet  $\tilde{D}_N$  que jugará en  $\mathcal{C}$  el mismo papel que  $D_N$  en  $\mathbf{C}$ . Definimos

$$\tilde{D}_N(x) = \frac{\text{sen}(Nx)}{\pi x} \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

**Proposición 2.1.3.** *Para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se verifica la igualdad*

$$f * \tilde{D}_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

*y por lo tanto tenemos definido  $\mathcal{C}f(x) \simeq \sup_N |f * \tilde{D}_N(x)|$ .*

**Demostración.** Comenzaremos reescribiendo la expresión que define a  $\tilde{D}_N$

$$\tilde{D}_N(x) = \frac{\text{sen}(Nx)}{\pi x} = \frac{e^{ixN} - e^{-ixN}}{2\pi ix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{ix\xi} d\xi.$$

Sólo falta hacer una sencilla comprobación, utilizando el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-N}^N f(s) e^{i(x-s)\xi} d\xi \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(s) \left( \int_{-N}^N e^{i(x-s)\xi} d\xi \right) ds \\ &= f * \tilde{D}_N(x). \end{aligned}$$

Tomando valores absolutos y supremos en  $N$ , salvo constante recuperamos el operador de Carleson. ■

A continuación introduciremos el concepto de multiplicadores de Fourier, empezando por el caso de las series. Sea  $b = (b_n)$  una sucesión de números reales, definimos en  $L^2(\mathbb{T})$  el operador

$$S_b F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n) b(n) e^{int}$$

con la notación  $b(n) = b_n$ . Diremos que  $(b_n)$  es un multiplicador de Fourier en el toro asociado al operador  $S_b$ . Podemos hacer algo parecido con la transformada, pero en este caso no bastará con una sucesión. Sea  $b$  una función acotada integrable y regulada, es decir que todo  $x \in \mathbb{R}$  es punto de Lebesgue de  $b$ . Recordemos que esto significa que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{|t| \leq \varepsilon} (b(x-t) - b(x)) dt = 0.$$

Con esta función  $b$  podemos definir

$$T_b f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) b(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Como antes, diremos que  $b$  es un multiplicador de Fourier en la recta asociado al operador  $T_b$ . Utilizaremos la palabra multiplicador para referirnos a  $b$  o bien a cualquiera de los operadores inducidos. Pasando por la transformada, a veces denotaremos los multiplicadores como  $\widehat{T}f = \widehat{f}b$ .

Hay teoremas de transferencia para cualesquiera  $b$  acotadas integrables y reguladas, pero nosotros nos centraremos en una en concreto. Para el teorema de Carleson bastará con considerar la función  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 1/2 & \text{si } |x| = 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

La función  $b$  cumple las condiciones requeridas, en lo que sigue veremos cómo se relaciona con los operadores de Carleson. Empezamos definiendo para cada  $N \in \mathbb{N}$

$$T_{b,N} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) b(\xi/N) e^{ix\xi} d\xi.$$

Por definición de  $b$  sabemos que  $b(\xi/N) = 0$  si  $|\xi| > N$ , y que es idénticamente 1 para los  $|\xi| < N$  lo que implica que

$$T_{b,N} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f * \widetilde{D}_N(x).$$

Tomando supremos en  $N$  recuperamos el operador de Carleson para la transformada, es decir

$$N_b f(x) := \sup_N |T_{b,N} f(x)| = \sup_N |f * \widetilde{D}_N(x)| \simeq \mathcal{C}f(x). \quad (2.1)$$

Algo similar ocurre para las sumas de Fourier, aunque en este caso se definirá

$$S_{b,N} F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{F}(n) b(n/N) e^{int}.$$

Al tomar supremos pondremos

$$M_b F(t) := \sup_N |S_{b,N} F(t)|.$$

Utilizando información acerca de  $b$  podemos escribir

$$\begin{aligned} S_{b,N} F(t) &= \sum_{|n| < N} \widehat{F}(n) e^{int} + \frac{1}{2} \left( \widehat{F}(N) e^{iNt} + \widehat{F}(-N) e^{-iNt} \right) \\ &= F * D_{N-1}(t) + Q_N F(t). \end{aligned}$$

El primer sumando es la suma parcial de Fourier  $S_{N-1} F$ , por lo que no deberíamos confundir las notaciones. El segundo sumando es una combinación de operadores de

proyección, y es trivialmente acotado en  $L^2(\mathbb{T})$ . De hecho, es fácil comprobar que se tiene

$$\left\| \sup_N |Q_N F| \right\|_2 \lesssim \|F\|_2.$$

El siguiente lema nos da una condición suficiente para probar que  $\mathbf{C}$  es de tipo débil  $(2, 2)$ , es decir que  $\|\mathbf{C}F\|_{2,\infty} \lesssim \|F\|_2$ .

**Lema 2.1.4.** *Supongamos que  $\|M_b F\|_{2,\infty} \lesssim \|F\|_2$  para toda  $F \in L^2(\mathbb{T})$ , entonces  $\|\mathbf{C}F\|_{2,\infty} \lesssim \|F\|_2$  para toda  $F \in L^2(\mathbb{T})$ .*

**Demostración.** Para cada  $N \in \mathbb{N}$  escribimos

$$|F * D_{N-1}| - |Q_N F| \leq |F * D_{N-1} + Q_N F| = |S_{b,N} F|.$$

Tomando supremos en  $N$  y utilizando las definiciones de  $M_b$  y  $\mathbf{C}$  queda

$$\mathbf{C}F = \sup_N |F * D_N| \leq M_b F + \sup_N |Q_N F|.$$

El sumando de la derecha es un operador acotado en  $L^2(\mathbb{R})$ , así que tomando normas

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}F\|_{2,\infty} &\lesssim \|M_b F\|_{2,\infty} + \left\| \sup_N |Q_N F| \right\|_{2,\infty} \\ &\lesssim \|F\|_2 + \left\| \sup_N |Q_N F| \right\|_2 \\ &\lesssim \|F\|_2 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Como ya adelantamos, a partir de ahora supondremos que  $\mathcal{C} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^{2,\infty}(\mathbb{R})$  es acotado. Por (2.1) esto es equivalente a suponer que

$$\|N_b f\|_{2,\infty} = \left\| \sup_N |T_{b,N} f| \right\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2$$

lo que a su vez equivale, utilizando la proposición 1.1.17, a

$$\left\| \sup_{N_j \in \mathcal{F}} |T_{b,N_j} f| \right\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2 \tag{2.2}$$

uniformemente en la elección del subconjunto finito  $\mathcal{F} = \{N_1, \dots, N_k\}$  de números naturales. Fijamos  $\mathcal{F}$  y definimos el operador

$$\Gamma^* : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^{2,\infty}(\mathbb{R}, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_\infty))$$

donde

$$\Gamma^* f(x) = (T_{b,N_1} f(x), \dots, T_{b,N_k} f(x)).$$

La expresión (2.2) se traduce en que el operador  $\Gamma^*$  es acotado, es decir que se verifica  $\|\Gamma^* f\|_{2,\infty}^{(\infty)} \lesssim \|f\|_2$  uniformemente respecto de  $\mathcal{F}$ .

**Proposición 2.1.5.** *El operador  $\Gamma^*$  es el dual de  $\Gamma$  definido por*

$$\Gamma g(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_j(\xi) b(\xi/N_j) e^{ix\xi} d\xi$$

para cada  $g = (g_1, \dots, g_k) \in L^{2,1}(\mathbb{R}, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$ .

**Demostración.** Veremos que dadas  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $g \in L^{2,1}(\mathbb{R}, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$  se cumple

$$\langle \Gamma g | f \rangle = \langle g | \Gamma^* f \rangle.$$

Empezaremos desarrollando el primer término de la igualdad

$$\begin{aligned} \langle \Gamma g | f \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_j(\xi) b(\xi/N_j) e^{ix\xi} d\xi \right) \overline{f(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} g_j(t) e^{-it\xi} dt \right) b(\xi/N_j) e^{ix\xi} \overline{f(x)} d\xi dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_j(t) \overline{f(x)} b(\xi/N_j) e^{i(x-t)\xi} dt d\xi dx. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $b$  toma valores reales, para el segundo término podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle g | \Gamma^* f \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^k g_j(x) \overline{T_{b, N_j} f(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^k g_j(x) \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(\xi)} b(\xi/N_j) e^{-ix\xi} d\xi \right) dx \quad (2.3) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_j(x) \overline{f(t)} b(\xi/N_j) e^{i(t-x)\xi} dt d\xi dx. \end{aligned}$$

Intercambiando  $t$  por  $x$  se concluye que  $\Gamma^*$  es el operador dual de  $\Gamma$ . Es importante darse cuenta de que en (2.3) hemos usado que dada  $h \in L^{2,\infty}(\mathbb{R}, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_\infty))$  el funcional de Riesz sobre  $g \in L^{2,1}(\mathbb{R}, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$  está definido por

$$\mathbf{R}_h g = \int_{\mathbb{R}} \langle g_j(x) | h_j(x) \rangle_{\mathbb{C}^k} dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^k g_j(x) \overline{h_j(x)} dx.$$

■

Un hecho elemental es que un operador es acotado si y sólo si lo es su dual, por lo tanto nuestra suposición implica que  $\|\Gamma g\|_2 \lesssim \|g\|_{2,1}^{(1)}$ . Reescribiendo lo anterior, hemos llegado a que para cualesquiera  $g_1, \dots, g_k$  se tiene

$$\left\| \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_j(\xi) b(\xi/N_j) e^{i\xi \cdot} d\xi \right\|_2 \lesssim \left\| \sum_{j=1}^k |g_j| \right\|_{2,1}. \quad (2.4)$$

En el lema 2.1.4 se vio que para demostrar el teorema de Carleson para las series bastaba con probar la desigualdad débil

$$\|M_b F\|_{2,\infty} \lesssim \|F\|_2 \text{ para toda } F \in L^2(\mathbb{T}). \quad (2.5)$$

Utilizando un razonamiento de dualidad análogo al anterior podemos demostrar que la desigualdad para  $M_b F$  es equivalente a una más manejable. Sea  $\mathcal{F} = \{N_1, \dots, N_k\}$  un subconjunto de números naturales, definimos

$$\Lambda^* : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^{2,\infty}(\mathbb{T}, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_\infty))$$

donde para cada  $F \in L^2(\mathbb{T})$

$$\Lambda^* F(t) = (S_{b,N_1} F(t), \dots, S_{b,N_k} F(t)).$$

Como antes, utilizando la proposición 1.1.17 podemos ver que (2.5) equivale a  $\|\Lambda^* F\|_{2,\infty}^{(\infty)} \lesssim \|F\|_2$  uniformemente en  $\mathcal{F}$ . Por unas cuentas similares a las que hicimos con  $\Gamma$  se ve que  $\Lambda^*$  es el operador dual de  $\Lambda$  definido por

$$\Lambda : L^{2,1}(\mathbb{T}, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1)) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$$

donde para cada  $G = (G_1, \dots, G_k) \in L^{2,1}(\mathbb{T}, (\mathbb{C}^k, \|\cdot\|_1))$  ponemos

$$\Lambda G(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(n) b(n/N_j) e^{int}.$$

El operador  $\Lambda$  es acotado si se cumple

$$\left\| \sum_{j=1}^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(n) b(n/N_j) e^{in\cdot} \right\|_2 \lesssim \left\| \sum_{j=1}^k |G_j| \right\|_{2,1}. \quad (2.6)$$

Podemos comenzar la demostración del teorema 2.1.2. Gracias al lema 2.1.4 y a las observaciones que hemos hecho, bastará con demostrar que la desigualdad (2.4) implica (2.6). Por dualidad podemos escribir

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(n) b(n/N_j) e^{in\cdot} \right\|_2 &= \sup_{\|Q\|_2 \leq 1} \left| \int_{\mathbb{T}} \left( \sum_{j=1}^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(n) b(n/N_j) e^{int} \right) \overline{Q(t)} dt \right| \\ &= \sup_{\|Q\|_2 \leq 1} \left| \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{T}} S_j G_j(t) \overline{Q(t)} dt \right| \end{aligned}$$

donde  $S_j$  es el multiplicador asociado a  $b(n/N_j)$ . Por densidad será suficiente comprobar (2.6) para  $G_j, Q$  polinomios trigonométricos. El siguiente lema técnico acotará el lado derecho de la última igualdad utilizando funciones Gaussianas. En lo que sigue definiremos

$$L_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon\pi x^2} \text{ para cada } \varepsilon > 0.$$

**Lema 2.1.6.** Sean  $P$  y  $Q$  polinomios trigonométricos en  $\mathbb{T}$ , y sean  $S_b$  y  $T_b$  los operadores asociados a  $b$ , se verifica

$$\int_{\mathbb{T}} S_b P(t) \overline{Q(t)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} T_b(P L_{\varepsilon/2})(x) \overline{Q(x) L_{\varepsilon/2}(x)} dx.$$

**Demostración.** Por linealidad, basta con demostrar la fórmula del enunciado para monomios  $P(t) = e^{ikt}$  y  $Q(t) = e^{ijt}$ . Utilizando la identidad de Parseval, podemos escribir

$$\int_{\mathbb{T}} S_b P(t) \overline{Q(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{S_b P}(n) \overline{\widehat{Q}(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{P}(n) b(n) \overline{\widehat{Q}(n)}.$$

Por elección de  $P$  y  $Q$  llegamos a que el primer término de la igualdad del enunciado es igual a  $b(k)$  si  $k = j$  y 0 en caso contrario. Nos centraremos ahora en el segundo término. Utilizando el teorema de Plancherel

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} T_b(P L_{\varepsilon/2})(x) \overline{Q(x) L_{\varepsilon/2}(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}} T_b(\widehat{P L_{\varepsilon/2}})(\xi) \overline{\widehat{Q L_{\varepsilon/2}}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} b(\xi) \widehat{P L_{\varepsilon/2}}(\xi) \overline{\widehat{Q L_{\varepsilon/2}}(\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Recordando cómo se calcula la transformada de Fourier de una Gaussiana podemos escribir

$$\widehat{P L_{\varepsilon/2}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi \varepsilon x^2}{2}} e^{-i(\xi-k)x} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\pi(k-\xi)^2}{\varepsilon/2}},$$

así como

$$\widehat{Q L_{\varepsilon/2}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi \varepsilon x^2}{2}} e^{-i(\xi-j)x} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\pi(j-\xi)^2}{\varepsilon/2}}.$$

Multiplicando por  $\sqrt{\varepsilon}$  la expresión (2.7) y sustituyendo, el segundo término de la igualdad del enunciado queda expresado como

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} b(\xi) e^{-\frac{\pi(k-\xi)^2}{\varepsilon/2}} e^{-\frac{\pi(j-\xi)^2}{\varepsilon/2}} d\xi. \quad (2.8)$$

Para completar el lema empezaremos tomando  $k = j$ , de modo que

$$\frac{-\pi(k-\xi)^2}{\varepsilon/2} + \frac{-\pi(j-\xi)^2}{\varepsilon/2} = \frac{-\pi(k-\xi)^2}{\varepsilon/4}.$$

Sustituimos en (2.8) y tomamos límites en  $\varepsilon \rightarrow 0$ , con lo que

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} b(\xi) e^{-\frac{\pi(k-\xi)^2}{\varepsilon/4}} d\xi \longrightarrow b(k)$$

donde hemos usado que  $b$  es una función regulada y que la que le acompaña es una aproximación de la identidad. Como  $k$  y  $j$  son enteros el caso  $k \neq j$  se traduce en  $|k-j| \geq 1$ , así que para todo  $\xi \in \mathbb{R}$  o bien  $|\xi-k| \geq \frac{1}{2}$  o bien  $|\xi-j| \geq \frac{1}{2}$ . Separando la integral en dos, acotamos (2.8) por

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \int_{|k-\xi| \geq \frac{1}{2}} b(\xi) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} e^{-\frac{\pi(j-\xi)^2}{\varepsilon/2}} d\xi + \int_{|j-\xi| \geq \frac{1}{2}} b(\xi) e^{-\frac{\pi(k-\xi)^2}{\varepsilon/2}} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} d\xi \right) &\leq \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \left( e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \sqrt{\pi} + e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \sqrt{\pi} \right) \\ &= 2\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \end{aligned}$$



que es arbitrariamente pequeño cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y por lo tanto el límite coincide  $b(k)$  para  $k \neq j$ . ■

Volvemos a la demostración del teorema 2.1.2. Sean  $G_j, Q$  polinomios trigonométricos con  $\|Q\| \leq 1$ , utilizando el lema anterior podemos escribir

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{T}} S_j G_j(t) \overline{Q(t)} dt \right| = \\ & = \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} T_j(G_j|_{L_{\varepsilon/2}})(x) \overline{Q(x)} L_{\varepsilon/2}(x) dx \right| \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{G_j|_{L_{\varepsilon/2}}}(\xi) b(\xi/N_j) e^{i\xi x} d\xi \right| |Q(x) L_{\varepsilon/2}(x)| dx \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} \left\| \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{G_j|_{L_{\varepsilon/2}}}(\xi) b(\xi/N_j) e^{i\xi \cdot} d\xi \right\|_2 \|Q|_{L_{\varepsilon/2}}\|_2. \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis (2.4), lo anterior queda acotado salvo constante por

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \varepsilon^{1/4} \sum_{j=1}^k |G_j|_{L_{\varepsilon/2}} \right\|_{2,1} \left( \sqrt{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |Q(x)|^2 L_{\varepsilon}(x) dx \right)^{1/2}.$$

En ambos factores estamos considerando las extensiones periódicas de funciones inicialmente definidas en  $\mathbb{T}$ . Dada  $g$  función en  $\mathbb{T}$  llamaremos  $Pg$  a su extensión periódica. Empezaremos por el segundo factor, para el que habrá que usar la fórmula de sumación de Poisson.

**Lema 2.1.7.** *Sea  $g$  una función continua en  $\mathbb{T}$ , entonces se verifica*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} Pg(x) L_{\varepsilon}(x) dx = \int_{\mathbb{T}} g(x) dx.$$

**Demostración.** Partimos la recta en intervalos

$$\dots, [-3\pi, -\pi], [-\pi, \pi], [\pi, 3\pi], \dots$$

es decir  $[(2n-1)\pi, (2n+1)\pi]$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . En cada sumando efectuamos el cambio de variable  $s = x - 2\pi n$

$$A_{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} Pg(x) L_{\varepsilon}(x) dx = \sqrt{\varepsilon} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} Pg(s+2\pi n) L_{\varepsilon}(s+2\pi n) ds.$$

Por definición  $Pg(s+2\pi n) = g(s)$  y utilizando la fórmula de sumación de Poisson para  $L_{\varepsilon}$  llegamos a

$$A_{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_{\varepsilon}(s+2\pi n) ds = \sqrt{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{L_{\varepsilon}}(n) e^{ins} ds$$

donde  $\widehat{L}_\varepsilon(n) = \varepsilon^{-1/2} e^{-\pi n^2/\varepsilon}$  es la transformada de Fourier de  $L_\varepsilon$  en  $n$ . Queremos comprobar que  $A_\varepsilon$  tiende a  $\int_{\mathbb{T}} g$ , por lo que restaremos ambos términos.

$$A_\varepsilon - \int_{\mathbb{T}} g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \left( \sum_{|n| \geq 1} e^{\frac{-\pi n^2}{\varepsilon}} e^{inx} \right) dx.$$

Tomando valores absolutos se obtiene

$$\left| A_\varepsilon - \int_{\mathbb{T}} g(x) dx \right| \lesssim \|g\|_\infty \sum_{|n| \geq 1} e^{\frac{-\pi n^2}{\varepsilon}} \rightarrow 0$$

cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. ■

Como estamos hallando un límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , podemos restringirnos al caso  $0 < \varepsilon < 1$ . Para el primer factor tomaremos  $0 < \varepsilon < 1$  y veremos que la cota del operador no depende del  $\varepsilon$  escogido.

**Lema 2.1.8.** Sea  $S : L^{2,1}(\mathbb{T}) \rightarrow L^{2,1}(\mathbb{R})$  definido por

$$Sg(x) = \varepsilon^{1/4} Pg(x)L_{\varepsilon/2}(x)$$

donde  $Pg$  es la periodización de  $g$ . Existe una constante tal que para toda función  $g \in L^{2,1}(\mathbb{T})$  y todo  $0 < \varepsilon < 1$  se tiene  $\|Sg\|_{2,1} \lesssim \|g\|_{2,1}$ .

**Demostración.** Por densidad bastará ver el resultado para  $g$  función simple de la forma  $g = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{1}_{E_j}$  con  $a_1 > \dots > a_N > 0$ . Ponemos  $a_{N+1} = 0$  y para cada  $j$  definimos  $F_j = E_1 \cup \dots \cup E_j$ , se puede reescribir  $g$  como

$$g = \sum_{j=1}^N (a_j - a_{j+1}) \mathbf{1}_{F_j}.$$

Salvo constante, acotamos la norma  $\|\cdot\|_{2,1}$  de  $S(g)$  por

$$\|Sg\|_{2,1} \lesssim \sum_{j=1}^N (a_j - a_{j+1}) \|S(\mathbf{1}_{F_j})\|_{2,1}.$$

Supongamos por un momento que hemos probado la desigualdad de tipo débil restringido

$$\|S(\mathbf{1}_E)\|_{2,1} \lesssim |E|^{1/2} \text{ para todo } E \subseteq \mathbb{T} \text{ medible.} \quad (2.9)$$

Podríamos concluir la demostración ya que poniendo  $F_0 = \emptyset$  se tiene

$$\|Sg\|_{2,1} \lesssim \sum_{j=1}^N (a_j - a_{j+1}) |F_j|^{1/2} = \sum_{j=0}^{N-1} a_{j+1} (|F_{j+1}|^{1/2} - |F_j|^{1/2}) = \|g\|_{2,1}$$

como ya vimos en la proposición 1.1.20. Ahora nos centraremos en probar (2.9), teniendo en cuenta que  $\|S(\mathbf{1}_E)\|_\infty = \varepsilon^{1/4}$  podemos escribir

$$\|S(\mathbf{1}_E)\|_{2,1} = 2 \int_0^{\varepsilon^{1/4}} |\{S(\mathbf{1}_E) > \lambda\}|^{1/2} d\lambda.$$

Por simetría de  $L_\varepsilon$  tenemos

$$|\{S(\mathbb{1}_E) > \lambda\}| = \left| B\left(0, \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\varepsilon^{1/4}}{\lambda}\right)}\right) \cap \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k + E) \right|.$$

Sea  $R$  el radio de la bola, en  $B(0, R)$  hay menos de  $2R + 1$  valores enteros. Para cada entero a lo sumo hay un trasladado de  $E$  en la intersección, luego

$$|\{S(\mathbb{1}_E) > \lambda\}| \leq (2R + 1)|E|.$$

Teniendo en cuenta que  $\varepsilon < 1$ , tomando raíces cuadradas y sustituyendo

$$\begin{aligned} \|S(\mathbb{1}_E)\|_{2,1} &\leq 2 \int_0^{\varepsilon^{1/4}} (\sqrt{2R} + 1) |E|^{1/2} d\lambda \\ &\lesssim |E|^{1/2} + \sqrt{2} \int_0^{\varepsilon^{1/4}} \sqrt{R} |E|^{1/2} d\lambda \\ &= |E|^{1/2} + \sqrt{2} \int_0^1 \varepsilon^{1/4} \left(\frac{2}{\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{1/4} |E|^{1/2} d\alpha. \end{aligned}$$

Cancelamos los  $\varepsilon^{1/4}$  y llegamos a la desigualdad buscada ya que el logaritmo que aparece es integrable.  $\blacksquare$

Gracias a los dos últimos lemas podemos acotar

$$\left| \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{T}} S_j G_j(t) \overline{Q(t)} dt \right| \lesssim \left\| \sum_{j=1}^k |G_j| \right\|_{2,1} \|Q\|_2.$$

Tomando el supremo en  $\|Q\|_2 \leq 1$  se obtiene (2.6) es decir

$$\left\| \sum_{j=1}^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(n) b(n/N_j) e^{in} \right\|_2 \lesssim \left\| \sum_{j=1}^k |G_j| \right\|_{2,1}$$

con lo que hemos demostrado el teorema 2.1.2.

## 2.2. Descomposición diádica

La sección anterior se dedicó a probar el teorema 2.1.2, que nos da una condición suficiente para demostrar el teorema de Carleson. Basta con demostrar la desigualdad débil  $\|\mathcal{C}f\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2$ . Para ello, tenemos que introducir varios operadores que nos simplificarán el camino. Para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  definimos los operadores de traslación, modulación, y dilatación como

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_y f(x) &= f(x - y) \quad \text{con } y \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Mod}_\xi f(x) &= e^{ix\xi} f(x) \quad \text{con } \xi \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Dil}_\lambda^2 f(x) &= \lambda^{-1/2} f(x/\lambda) \quad \text{con } \lambda > 0.\end{aligned}$$

**Proposición 2.2.1.** *Para cualesquiera  $y, \xi \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ , los operadores  $\mathrm{Tr}_y$ ,  $\mathrm{Mod}_\xi$  y  $\mathrm{Dil}_\lambda^2$  están bien definidos, y de hecho  $\|\mathrm{Tr}_y f\|_2 = \|\mathrm{Mod}_\xi f\|_2 = \|\mathrm{Dil}_\lambda^2 f\|_2 = \|f\|_2$ .*

**Demostración.** Por definición, es obvio que  $\|\mathrm{Mod}_\xi f\|_2 = \|f\|_2$ . Para las traslaciones podemos hacer el cambio de variable  $s = x - y$

$$\|\mathrm{Tr}_y f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(s)|^2 ds = \|f\|_2^2.$$

Las mismas ideas valen para demostrar que  $\mathrm{Mod}$  y  $\mathrm{Tr}$  conservan la norma  $\|\cdot\|_p$ . Para las dilataciones el razonamiento es parecido, aunque en este caso usaremos el cambio de variable  $s = x/\lambda$

$$\|\mathrm{Dil}_\lambda^2 f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{-1} |f(x/\lambda)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(s)|^2 ds = \|f\|_2^2.$$

■

Para que la dilatación conserve la norma  $p$  tendremos que extender la definición a  $\mathrm{Dil}_\lambda^p f(x) = \lambda^{-1/p} f(x/\lambda)$  con  $p \geq 1$ , y la demostración es análoga. Estos operadores se relacionan bien con la transformada, como se puede ver en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.2.** *Dada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se verifican  $\widehat{\mathrm{Tr}_y f} = \mathrm{Mod}_{-y} \widehat{f}$ ,  $\widehat{\mathrm{Mod}_\xi f} = \mathrm{Tr}_\xi \widehat{f}$ , y  $\widehat{\mathrm{Dil}_\lambda^2 f} = \mathrm{Dil}_{1/\lambda}^2 \widehat{f}$  para todo  $y, \xi \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ .*

**Demostración.** Las tres igualdades anteriores son inmediatas. Para la traslación hacemos el cambio de variable  $s = t - y$

$$\widehat{\mathrm{Tr}_y f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t - y) e^{-ixt} dt = e^{-ixy} \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-ixs} ds = \mathrm{Mod}_{-y} \widehat{f}(x).$$

Para el operador de modulación no hará falta ningún cambio de variable, simplemente aplicaremos la definición

$$\widehat{\mathrm{Mod}_\xi f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i(x-\xi)t} dt = \widehat{f}(x - \xi) = \mathrm{Tr}_\xi \widehat{f}(x).$$

El caso de la dilatación es similar al de la traslación, ponemos  $s = t/\lambda$

$$\widehat{\mathrm{Dil}_\lambda^2 f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{-1/2} f(t/\lambda) e^{-ixt} dt = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{1/2} f(s) e^{-i\lambda xs} ds = \mathrm{Dil}_{1/\lambda}^2 \widehat{f}(x)$$

y la proposición queda demostrada.  $\blacksquare$

Al componer cada uno de estos operadores con otro de su misma clase llegamos a un operador de la misma clase, es decir

$$\begin{aligned}\text{Mod}_\xi \text{Mod}_\eta f(x) &= e^{ix\xi} e^{ix\eta} f(x) = \text{Mod}_{\xi+\eta} f(x) \\ \text{Tr}_y \text{Tr}_z f(x) &= f(x-y-z) = \text{Tr}_{y+z} f(x) \\ \text{Dil}_\lambda^2 \text{Dil}_\mu^2 f(x) &= \lambda^{-1/2} \mu^{-1/2} f\left(\frac{x}{\lambda\mu}\right) = \text{Dil}_{\lambda\mu}^2 f(x).\end{aligned}$$

Además, si componemos operadores de tipos diferentes, obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Dil}_\lambda^2 \text{Mod}_\xi f(x) &= \lambda^{-1/2} e^{\frac{ix\xi}{\lambda}} f(x/\lambda) = \text{Mod}_{\xi/\lambda} \text{Dil}_\lambda^2 f(x) \\ \text{Dil}_\lambda^2 \text{Tr}_y f(x) &= \lambda^{-1/2} f\left(\frac{x}{\lambda} - y\right) = \text{Tr}_{\lambda y} \text{Dil}_\lambda^2 f(x) \\ \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y f(x) &= e^{iy\xi} e^{i(x-y)\xi} f(x-y) = e^{iy\xi} \text{Tr}_y \text{Mod}_\xi f(x).\end{aligned}$$

Otro resultado fácil de probar es que para cada  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  y cada  $\lambda, y, \xi$ , se tiene

$$\begin{aligned}\langle f | \text{Tr}_y g \rangle &= \langle \text{Tr}_{-y} f | g \rangle \\ \langle f | \text{Mod}_\xi g \rangle &= \langle \text{Mod}_{-\xi} f | g \rangle \\ \langle f | \text{Dil}_\lambda^2 g \rangle &= \langle \text{Dil}_{1/\lambda}^2 f | g \rangle.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Estos operadores también se comportan bien con la norma  $\|\cdot\|_{2,\infty}$ , como se puede ver en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.3.** *Los operadores de traslación, modulación, y dilatación son isometrías en  $\|\cdot\|_{2,\infty}$ .*

**Demostración.** Para la traslación, podemos escribir

$$|\{x \in \mathbb{R} : |f(x-y)| > \alpha\}| = |\{t+y \in \mathbb{R} : |f(t)| > \alpha\}| = |\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| > \alpha\}|$$

ya que la medida es invariante por traslaciones. Aplicando la definición de norma  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  se tiene el resultado. El resultado relativo a la modulación es trivial, ya que

$$|\text{Mod}_\xi f(x)| = |f(x)|.$$

Para la dilatación, tendremos que probar dos desigualdades. Por una parte

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R} : |\text{Dil}_\lambda^2 f(x)| > \alpha\}| &= |\{\lambda s \in \mathbb{R} : |f(s)| > \alpha\lambda^{1/2}\}| \\ &= \lambda |\{s \in \mathbb{R} : |f(s)| > \alpha\lambda^{1/2}\}| \\ &\leq \alpha^{-2} \|f\|_{2,\infty}^2\end{aligned}$$

y por lo tanto  $\|\text{Dil}_\lambda^2 f\|_{2,\infty} \leq \|f\|_{2,\infty}$ . La otra desigualdad se prueba fácilmente poniendo  $x = s/\lambda$

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \alpha\}| &= |\{x \in \mathbb{R} : \lambda^{-1/2} |f(x)| > \alpha\lambda^{-1/2}\}| \\ &= \lambda^{-1} |\{s \in \mathbb{R} : |\text{Dil}_\lambda^2 f(s)| > \alpha\lambda^{-1/2}\}| \\ &\leq \alpha^{-2} \|\text{Dil}_\lambda^2 f\|_{2,\infty}^2,\end{aligned}$$

por lo que la dilatación también es una isometría en  $\|\cdot\|_{2,\infty}$ . ■

Para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se define el operador  $P_-$  según la fórmula

$$P_- f(x) = \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

A continuación veremos cómo se relacionan  $P_-$  y el operador  $\mathcal{C}$ . Empezaremos escribiendo para cada  $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_{-N}^N \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right| \leq \left| \int_{-\infty}^N \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right| + \left| \int_{-\infty}^{-N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right|.$$

Tomando supremos a ambos lados en  $N \in \mathbb{N}$  se obtiene  $\mathcal{C}f \leq \mathcal{C}_1 f + \mathcal{C}_2 f$ , donde hemos definido

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 f(x) &= \sup_N \left| \int_{-\infty}^N \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right| \\ \mathcal{C}_2 f(x) &= \sup_N \left| \int_{-\infty}^{-N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right|. \end{aligned}$$

Podemos caracterizar  $\mathcal{C}_1$  en términos de  $P_-$ , poniendo  $s = \xi + N$  se tiene

$$P_- \text{Mod}_{-N} f(x) = \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi + N) e^{ix\xi} d\xi = e^{-ixN} \int_{-\infty}^N \widehat{f}(s) e^{ixs} ds.$$

Como  $e^{-ixN}$  tiene módulo 1, tomando módulos y supremos en  $N$  llegamos a la igualdad

$$\mathcal{C}_1 f(x) = \sup_N |P_- \text{Mod}_{-N} f(x)|.$$

De manera análoga se demuestra que  $\mathcal{C}_2 f(x) = \sup_N |P_- \text{Mod}_N f(x)|$  y por lo tanto

$$\mathcal{C}f(x) \leq \sup_N |P_- \text{Mod}_{-N} f(x)| + \sup_N |P_- \text{Mod}_N f(x)|. \quad (2.11)$$

Para demostrar el teorema de Carleson bastará con probar que cada sumando es de tipo débil (2,2). Probaremos este hecho en el próximo capítulo, utilizando fuertemente la siguiente caracterización.

**Teorema 2.2.4.** *Salvo constante multiplicativa,  $P_-$  es el único operador acotado en  $L^2(\mathbb{R})$  tal que*

- 1) *conmuta con las traslaciones,*
- 2) *conmuta con las dilataciones,*
- 3) *su núcleo contiene a las funciones  $f$  tales que  $\text{sop}(\widehat{f}) \subseteq (0, +\infty)$ .*

**Demostración.** Primero comprobaremos que el operador  $P_-$  cumple las condiciones requeridas, por una parte

$$P_- f(x) = \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Poniendo  $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\xi)$ , la fórmula de inversión garantiza que

$$P_- f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \widehat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \simeq g(x),$$

donde el límite se considera en  $L^2(\mathbb{R})$  (y no en casi todo punto). Utilizando la identidad de Plancherel, podemos concluir que  $P_-$  es un operador acotado ya que

$$\|P_- f\|_2 \simeq \|g\|_2 \simeq \|\widehat{f}\mathbf{1}_{(-\infty,0)}\|_2 \leq \|\widehat{f}\|_2 \simeq \|f\|_2.$$

El operador  $P_-$  conmuta con traslaciones, lo que se comprueba de manera rutinaria utilizando la proposición 2.2.2

$$P_-(\text{Tr}_y f(x)) = \int_{-\infty}^0 \text{Mod}_{-y} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{i(x-y)\xi} d\xi = \text{Tr}_y(P_- f(x)).$$

Para comprobar que conmuta con dilataciones volvemos a utilizar la proposición 2.2.2, y efectuamos el cambio de variable  $s = \lambda\xi$

$$P_-(\text{Dil}_\lambda^2 f(x)) = \int_{-\infty}^0 \text{Dil}_{1/\lambda}^2 \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{-\infty}^0 \lambda^{-1/2} \widehat{f}(s) e^{i\frac{x}{\lambda}s} ds = \text{Dil}_\lambda^2(P_- f(x)).$$

Es evidente que si  $\text{sop}(\widehat{f}) \subseteq (0, +\infty)$ , entonces  $P_- f(x) = 0$  para cualquier  $x$ , por lo que  $f \in \ker(P_-)$ .

Falta comprobar la unicidad salvo constante multiplicativa, para ello consideramos un operador acotado  $T$  que cumpla las restricciones del enunciado. Como ya sabemos, por el teorema 1.2.8, la primera condición implica que  $T(f) = \psi * f$  para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  donde  $\psi$  es una distribución. De hecho, podemos asegurar que  $\widehat{T(f)} = \tau \widehat{f}$  siendo  $\tau = \widehat{\psi}$  una función acotada. La segunda condición asegura que

$$(T \circ \text{Dil}_\lambda^2)(f) = (\text{Dil}_\lambda^2 \circ T)(f),$$

lo que pasando por la transformada se convierte en  $\tau(x)(\widehat{\text{Dil}_\lambda^2 f})(x) = \text{Dil}_{1/\lambda}^2(\widehat{Tf})(x)$ . Utilizando la proposición 2.2.2, esto último implica que

$$\tau(x)\lambda^{1/2}\widehat{f}(\lambda x) = \lambda^{1/2}\tau(\lambda x)\widehat{f}(\lambda x) \text{ para todo } \lambda > 0, x \in \mathbb{R}, f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Hemos demostrado que para cada  $\lambda > 0$  y cada  $x \in \mathbb{R}$ , se verifica  $\tau(x) = \tau(\lambda x)$ , es decir que  $\tau$  es constante en cada semieje, aunque la constante no sea necesariamente la misma. Utilizando la tercera condición, vamos a demostrar que  $Z(\tau) \supseteq (0, +\infty)$ , donde definimos

$$Z(\tau) = \{x \in \mathbb{R} : \tau(x) = 0\}.$$

Sea  $x > 0$  y supongamos que  $x \notin Z(\tau)$ , entonces  $\tau(x) \neq 0$  y podemos escoger  $\widehat{f}$  función meseta tal que  $x \in \text{sop}(\widehat{f}) \subseteq (0, +\infty)$ . Sabemos entonces que  $f$  pertenece a  $\ker(T)$ , sin embargo  $\widehat{T(f)}(x) = \tau(x)\widehat{f}(x) \neq 0$ , que contradice lo anterior. Por lo tanto, necesariamente  $(0, +\infty) \subseteq Z(\tau)$  y esto último nos permite escribir

$$Tf(x) = (\tau \widehat{f})^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = C \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \simeq P_- f(x),$$

por lo que la proposición queda demostrada. ■

**Definición 2.2.5.** Llamaremos intervalo diádico a un intervalo de la forma

$$[j2^k, (j+1)2^k) \text{ con } j, k \in \mathbb{Z}.$$

El conjunto de todos los intervalos diádicos es entonces

$$\mathcal{D} = \left\{ [j2^k, (j+1)2^k) : j, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Denotaremos la longitud de un intervalo  $I$  como  $|I|$ , y su centro como  $c(I)$ .

Vamos a trabajar en el plano de tiempo-frecuencia, diremos que un rectángulo  $s = I \times w \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$  es una baldosa cuando  $|I||w| = 1$ . Para mejorar la notación, normalmente escribiremos  $s = I_s \times w_s$ . Al conjunto de todas las baldosas lo llamaremos  $\mathcal{T}$ , y jugará un papel clave a lo largo de toda la demostración. Para cada  $w \in \mathcal{D}$  llamaremos  $w_-$  y  $w_+$  a sus mitades inferior y superior respectivamente.

Como la inversión de Fourier funciona en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , podemos elegir  $\varphi$  función de Schwarz tal que

$$\mathbb{1}_{[\frac{-1}{9}, \frac{1}{9}]} \leq \widehat{\varphi} \leq \mathbb{1}_{[\frac{-1}{8}, \frac{1}{8}]}.$$

Esta condición implica que el soporte de  $\widehat{\varphi}$  está contenido en  $[\frac{-1}{8}, \frac{1}{8}]$ . Con esta  $\varphi$  que se ha construido, se obtendrán distintas  $\varphi_s$  para cada  $s \in \mathcal{T}$ :

$$\varphi_s(x) = \text{Mod}_{c(w_s^-)} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi(x) = |I_s|^{-1/2} \varphi\left(\frac{x - c(I_s)}{|I_s|}\right) e^{ic(w_s^-)x}.$$

Consecuentemente, aplicando la transformada

$$\widehat{\varphi}_s(\xi) = \text{Tr}_{c(w_s^-)} \text{Mod}_{-c(I_s)} \text{Dil}_{|w_s|}^2 \widehat{\varphi}(\xi) = |w_s|^{-1/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi - c(w_s^-)}{|w_s|}\right) e^{i(c(w_s^-) - \xi)c(I_s)}.$$

Podemos localizar el soporte de  $\widehat{\varphi}_s$  dentro del intervalo  $w_s^-$  ya que

$$\frac{|\xi - c(w_s^-)|}{|w_s|} \leq \frac{1}{8} \text{ implica } c(w_s^-) - \frac{|w_s|}{8} \leq \xi \leq c(w_s^-) + \frac{|w_s|}{8}.$$

De hecho el soporte está estrictamente contenido en  $w_s^-$ . Si además usamos la igualdad  $c(w_s) = c(w_s^-) + \frac{|w_s|}{4}$ , tenemos controlada la distancia de  $\text{sop}(\widehat{\varphi}_s)$  a  $c(w_s)$ , hecho que será crucial en la siguiente sección. Antes de nada, demostraremos un par de desigualdades relacionadas con las funciones  $\varphi_s$  que acabamos de definir. Empezaremos con un resultado útil que a primera vista no parece relacionado con nuestra situación.

**Proposición 2.2.6.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $M > 1$ , y  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2^\mu}{(1 + 2^\mu|x - a|)^M} \frac{2^\nu}{(1 + 2^\nu|x - b|)^M} dx \lesssim \frac{2^{\min(\mu, \nu)}}{(1 + 2^{\min(\mu, \nu)}|a - b|)^M}.$$

**Demostración.** Por una parte, es claro que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x|)^M} dx = 2 \int_1^\infty \frac{1}{s^M} ds = \frac{2}{M-1} < \infty.$$



Sin pérdida de generalidad supondremos que  $\min(\mu, \nu) = \nu$ . Distinguiremos dos casos en función de  $2^\nu |a - b|$ . En el primer caso se supondrá que  $2^\nu |a - b| \leq 1$ , y por lo tanto

$$1 \leq \frac{2}{1 + 2^\nu |a - b|} \leq \frac{2^M}{(1 + 2^\nu |a - b|)^M}.$$

Esto último implica que

$$\frac{2^\nu}{(1 + 2^\nu |x - b|)^M} \leq 2^\nu \leq \frac{2^\nu 2^M}{(1 + 2^\nu |a - b|)^M}.$$

Integrando, la expresión inicial del enunciado queda acotada por

$$\frac{2^\nu 2^M}{(1 + 2^\nu |a - b|)^M} \int_{\mathbb{R}} \frac{2^\mu}{(1 + 2^\mu |x - a|)^M} dx \lesssim \frac{2^\nu}{(1 + 2^\nu |a - b|)^M},$$

y se concluye el primer caso. Ahora supondremos que  $2^\nu |a - b| \geq 1$  y partiremos la recta en  $\mathbb{R} = H_a \cup H_b$ , siendo

$$H_a = \{x \in \mathbb{R} : 2x \leq a + b\} \text{ y } H_b = \{x \in \mathbb{R} : 2x \geq a + b\}.$$

Sin pérdida de generalidad  $a \leq b$ , así que se tendrá  $a \in H_a$  y  $b \in H_b$ . Si tomamos  $x \in H_a$  podemos ver que  $|x - b| \geq \frac{1}{2} |a - b|$  y consecuentemente

$$1 + 2^\nu |x - b| \geq 1 + \frac{1}{2} 2^\nu |a - b|.$$

Con esta desigualdad podemos acotar la integral inicial (en  $H_a$ ) por

$$\begin{aligned} \int_{H_a} \frac{2^\mu}{(1 + 2^\mu |x - a|)^M} \frac{2^\nu}{(1 + 2^\nu |x - b|)^M} dx &\leq \\ &\leq \frac{2^\nu}{(1 + \frac{1}{2} 2^\nu |a - b|)^M} \int_{H_a} \frac{2^\mu}{(1 + 2^\mu |x - a|)^M} \\ &\lesssim \frac{2^\nu}{(1 + 2^\nu |a - b|)^M}. \end{aligned}$$

Algo parecido ocurre cuando  $x \in H_b$ , aunque en este caso usaremos

$$1 + 2^\mu |x - a| \geq 1 + \frac{1}{2} 2^\mu |a - b| \geq \frac{1}{2} 2^\mu |a - b|.$$

Para la integral en  $H_b$  habrá que trabajar algo más. Por un razonamiento parecido al anterior

$$\int_{H_b} \frac{2^\mu}{(1 + 2^\mu |x - a|)^M} \frac{2^\nu}{(1 + 2^\nu |x - b|)^M} dx \lesssim \frac{2^\mu}{(\frac{1}{2} 2^\mu |a - b|)^M},$$

pero esta cota no es suficiente. Estamos en el caso en el que  $2^\nu |a - b| \geq 1$ , y por lo tanto  $\frac{1}{2} |a - b| \geq \frac{1}{2^{\nu+1}}$ . Podemos escribir

$$\frac{1}{|a - b|^M} \leq \frac{1}{(\frac{1}{2^{\nu+1}} + \frac{1}{2} |a - b|)^M} = \frac{2^{(\nu+1)M}}{(1 + 2^\nu |a - b|)^M}.$$

Esta desigualdad se traduce en

$$\begin{aligned} \frac{2^\mu}{\left(\frac{1}{2} 2^\mu |a-b|\right)^M} &= \frac{2^M 2^{\mu(1-M)}}{|a-b|^M} \\ &\leq \frac{2^M 2^{\mu(1-M)} 2^{(\nu+1)M}}{(1+2^\nu |a-b|)^M} \\ &= \frac{4^M 2^{(\mu-\nu)(1-M)} 2^\nu}{(1+2^\nu |a-b|)^M}. \end{aligned}$$

Como  $\mu \geq \nu$  y  $M$  es mayor que 1, podemos quitar las constantes del numerador. Juntándolo todo obtenemos

$$\int_{H_b} \frac{2^\mu}{(1+2^\mu |x-a|)^M} \frac{2^\nu}{(1+2^\nu |x-b|)^M} dx \lesssim \frac{2^\nu}{(1+2^\nu |a-b|)^M},$$

y sumando las integrales en  $H_a$  y  $H_b$  el resultado queda probado. ■

Dentro de poco haremos uso de este resultado, pero en este capítulo sólo trataremos el caso  $\mu = \nu = 0$ , es decir

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x-a|)^M} \frac{1}{(1+|x-b|)^M} dx \lesssim \frac{1}{(1+|a-b|)^M}. \quad (2.12)$$

El caso de  $\mu$  y  $\nu$  generales no lo explotaremos hasta el tercer capítulo, para el que serán decisivas las siguientes proposiciones.

**Proposición 2.2.7.** Sean  $s, s' \in \mathcal{T}$ , para las funciones  $\varphi_s$  definidas anteriormente se tiene

$$|\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \frac{\min\left(\frac{|I_s|}{|I_{s'}|}, \frac{|I_{s'}|}{|I_s|}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{|c(I_s) - c(I_{s'})|}{\max(|I_s|, |I_{s'}|)}\right)^M}.$$

**Demostración.** Supongamos que  $|I_s| = 2^i$ ,  $|I_{s'}| = 2^j$ , y pongamos  $a = c(I_s)$ ,  $b = c(I_{s'})$ . Por definición de  $\varphi_s$  y utilizando que  $\varphi$  es función de Schwarz tenemos

$$|\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \lesssim 2^{\frac{i+j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{2^{-i}}{(1+2^{-i}|x-a|)^M} \frac{2^{-j}}{(1+2^{-j}|x-b|)^M} dx.$$

Podemos aplicar la proposición anterior, tomando  $\mu = -i$  y  $\nu = -j$ , y queda

$$|\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \frac{2^{\min(\frac{i-j}{2}, \frac{j-i}{2})}}{(1+2^{\min(-i, -j)} |a-b|)^M}.$$

A falta de sustituir, la proposición está demostrada. ■

**Proposición 2.2.8.** Supongamos que  $|I_{s'}| \leq |I_s|$ , entonces se tiene

$$|\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \left(\frac{|I_s|}{|I_{s'}|}\right)^{1/2} \int_{I_{s'}} \frac{|I_s|^{-1}}{\left(1 + \frac{|x-c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} dx.$$

**Demostración.** En este caso  $\min(|I_s|, |I_{s'}|) = |I_{s'}|$ , así que si aplicamos la proposición anterior

$$|\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \left( \frac{|I_{s'}|}{|I_s|} \right)^{1/2} \frac{1}{\left( 1 + \frac{|c(I_s) - c(I_{s'})|}{|I_s|} \right)^M}.$$

Fijémonos en el denominador del segundo factor, utilizando la desigualdad triangular y tomando  $x \in I_{s'}$  queda

$$\frac{|c(I_s) - c(I_{s'})|}{|I_s|} \geq \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|} - \frac{|x - c(I_{s'})|}{|I_s|} \geq \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|} - \frac{1}{2} \frac{|I_{s'}|}{|I_s|}.$$

Teniendo en cuenta que  $|I_{s'}| \leq |I_s|$  podemos escribir

$$\frac{1}{\left( 1 + \frac{|c(I_s) - c(I_{s'})|}{|I_s|} \right)^M} \leq \frac{1}{\left( \frac{1}{2} + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|} \right)^M} \lesssim \frac{1}{\left( 1 + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|} \right)^M}.$$

Pero el  $x \in I_{s'}$  es arbitrario, y por el teorema del valor medio para integrales sabemos que

$$\frac{1}{\left( 1 + \frac{|c(I_s) - c(I_{s'})|}{|I_s|} \right)^M} \lesssim \frac{1}{|I_{s'}|} \int_{I_{s'}} \frac{1}{\left( 1 + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|} \right)^M} dx.$$

Finalmente, podemos concluir

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| &\lesssim \left( \frac{|I_{s'}|}{|I_s|} \right)^{1/2} \frac{1}{|I_{s'}|} \int_{I_{s'}} \frac{1}{\left( 1 + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|} \right)^M} dx \\ &= \left( \frac{|I_s|}{|I_{s'}|} \right)^{1/2} \int_{I_{s'}} \frac{|I_s|^{-1}}{\left( 1 + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|} \right)^M} dx. \end{aligned}$$

■

## 2.3. Discretización

**Definición 2.3.1.** Dado  $\xi \in \mathbb{R}$ , se define el operador  $Q_\xi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  por la fórmula

$$Q_\xi f(x) = \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{w_s^+}(\xi) \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(x).$$

Para cada  $\xi \in \mathbb{R}$ , existe una sucesión de intervalos diádicos encajados tal que  $\xi$  pertenece a la mitad superior de cada uno de ellos. Dependiendo de la expansión en base 2 del número  $\xi$ , los intervalos involucrados tendrán distintas longitudes. Llamaremos a cada uno de estos intervalos  $w(n)$ , donde impondremos que  $|w(n)| = 2^{-n}$  con  $n$  entero. Definimos el conjunto  $\mathcal{T}(n)$  según la expresión

$$\mathcal{T}(n) = \{s \in \mathcal{T} : w_s = w(n), \xi \in w_s^+\}.$$

Esto significa que para cada  $s \in \mathcal{T}(n)$ , se tiene  $|w_s| = 2^{-n}$ , y consecuentemente  $|I_s| = 2^n$ . Dado  $n$  entero arbitrario, es posible que no exista ningún intervalo diádico  $w_s = w(n)$  de longitud  $2^{-n}$  tal que  $\xi \in w_s^+$ , en ese caso  $\mathcal{T}(n) = \emptyset$ . Además, es claro que si  $n \neq m$ , entonces  $\mathcal{T}(n) \cap \mathcal{T}(m) = \emptyset$ . Gracias a esta construcción, podemos descomponer el operador  $Q_\xi$  en una suma infinita de operadores  $Q_{(n)}$  definidos por

$$Q_{(n)}f = \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \text{ con } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

En el caso  $\mathcal{T}(n) = \emptyset$ , definimos  $Q_{(n)}f = 0$ . Con todo lo anterior, es inmediato comprobar que  $Q_\xi f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Q_{(n)}f$ , hecho que nos permitirá demostrar que  $Q_\xi$  es un operador acotado con cota independiente de  $\xi$ . Antes de eso, tenemos que conocer algunas propiedades de los operadores  $Q_{(n)}$ . A no ser que se diga lo contrario, siempre consideraremos operadores  $Q_{(n)} \neq 0$ , es decir con  $\mathcal{T}(n) \neq \emptyset$ .

**Proposición 2.3.2.** Sean  $n$  y  $m$  enteros distintos y  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , entonces se verifica  $\langle Q_{(n)}f | Q_{(m)}f \rangle = 0$ .

**Demostración.** En efecto, por construcción  $\xi \in w(n)^+ \cap w(m)^+$ , y por las propiedades de los intervalos diádicos que hemos estudiado, necesariamente  $w(n)^- \cap w(m)^- = \emptyset$ . Computemos el producto escalar:

$$\begin{aligned} \langle Q_{(n)}f | Q_{(m)}f \rangle &= \left\langle \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \middle| \sum_{r \in \mathcal{T}(m)} \langle f | \varphi_r \rangle \varphi_r \right\rangle \\ &= \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \sum_{r \in \mathcal{T}(m)} \langle f | \varphi_s \rangle \overline{\langle f | \varphi_r \rangle} \langle \varphi_s | \varphi_r \rangle. \end{aligned}$$

Dados  $s \in \mathcal{T}(n)$  y  $r \in \mathcal{T}(m)$  cualesquiera, es evidente que  $s \neq r$ . Por lo tanto, utilizando que  $\text{sop}(\widehat{\varphi}_s) \subseteq w(n)^-$  y que  $\text{sop}(\widehat{\varphi}_r) \subseteq w(m)^-$  obtenemos  $\langle \varphi_s | \varphi_r \rangle \simeq \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_s \overline{\widehat{\varphi}_r} = 0$ , y el resultado queda probado. ■

**Proposición 2.3.3.** Sean  $n, m \in \mathbb{Z}$  y sean  $Q_{(n)}, Q_{(m)}$  sus operadores asociados, entonces existen  $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$  tales que

$$Q_{(m)} = \text{Mod}_\eta \text{Dil}_\lambda^2 Q_{(n)} \text{Dil}_{1/\lambda}^2 \text{Mod}_{-\eta}.$$

**Demostración.** Tenemos fijado  $\xi \in \mathbb{R}$  tal que  $\xi \in w(n)^+ \cap w(m)^+$ . Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , por definición de  $Q_{(n)}$  y utilizando (2.10) podemos escribir

$$\begin{aligned} \text{Mod}_\eta \text{Dil}_\lambda^2 Q_{(n)} \text{Dil}_{1/\lambda}^2 \text{Mod}_{-\eta} f &= \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle \text{Dil}_{1/\lambda}^2 \text{Mod}_{-\eta} f \mid \varphi_s \rangle \text{Mod}_\eta \text{Dil}_\lambda^2 \varphi_s \\ &= \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle f \mid \text{Mod}_\eta \text{Dil}_\lambda^2 \varphi_s \rangle \text{Mod}_\eta \text{Dil}_\lambda^2 \varphi_s. \end{aligned}$$

Tomamos  $\lambda = |w(n)|/|w(m)|$  y  $\eta = c(w(m)^-) - c(w(n)^-)/\lambda$ . Recordando las propiedades estudiadas antes de la proposición 2.2.3 y aplicando la definición de  $\varphi_s$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Mod}_\eta \text{Dil}_\lambda^2 \varphi_s &= \text{Mod}_\eta \text{Dil}_\lambda^2 \text{Mod}_{c(w_s^-)} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi \\ &= \text{Mod}_{\eta+c(w_s^-)/\lambda} \text{Tr}_{\lambda c(I_s)} \text{Dil}_{\lambda|I_s|}^2 \varphi \\ &= \text{Mod}_{c(w_r^-)} \text{Tr}_{c(I_r)} \text{Dil}_{|I_r|}^2 \varphi. \end{aligned}$$

Poniendo  $I_r = \lambda I_s$  y  $w_r = w(m)$ , la última expresión coincide con  $\varphi_r$ . Con esto, podemos concluir

$$Q_{(m)} f = \sum_{r \in \mathcal{T}(m)} \langle f \mid \varphi_r \rangle \varphi_r = \text{Mod}_\eta \text{Dil}_\lambda^2 Q_{(n)} \text{Dil}_{1/\lambda}^2 \text{Mod}_{-\eta} f.$$

■

**Proposición 2.3.4.** Para cada  $\xi \in \mathbb{R}$  los operadores  $Q_{(n)} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  están acotados uniformemente, es decir  $\|Q_{(n)} f\|_2 \lesssim \|f\|_2$  con la constante independiente de  $n \in \mathbb{Z}$  y de  $\xi$ .

**Demostración.** Por la proposición anterior, basta con que lo comprobemos para un  $Q_{(n)}$  fijo, ya que los operadores  $\text{Mod}$  y  $\text{Dil}^2$  son isometrías en  $L^2(\mathbb{R})$ . En efecto, si para dicho  $n$  se cumpliera que  $\|Q_{(n)} f\|_2 \lesssim \|f\|_2$ , para otro  $m$  tendríamos

$$\|Q_{(m)} f\|_2 = \|\text{Mod}_\eta \text{Dil}_\lambda^2 Q_{(n)} \text{Dil}_{1/\lambda}^2 \text{Mod}_{-\eta} f\|_2 = \|Q_{(n)} \text{Dil}_{1/\lambda}^2 \text{Mod}_{-\eta} f\|_2 \lesssim \|f\|_2.$$

Por comodidad, y sin pérdida de generalidad, elegiremos el operador  $Q_{(0)}$ , aunque exista la posibilidad de que éste sea nulo para nuestro  $\xi \in \mathbb{R}$ . En nuestra situación, las baldosas  $s$  consideradas son cuadrados de lado  $|I_s| = 1$ , lo que como veremos facilita los cálculos. Sean  $s, s' \in \mathcal{T}(0)$ , veamos primero que  $|\langle \varphi_s \mid \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \text{dist}(I_s, I_{s'})^{-4}$ . En efecto, por definición de  $\varphi_s$  y utilizando que  $\varphi$  es función de Schwarz, podemos escribir

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_s \mid \varphi_{s'} \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x - c(I_s))| |\varphi(x - c(I_{s'}))| dx \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x - c(I_s)|)^4} \frac{1}{(1 + |x - c(I_{s'})|)^4} dx. \end{aligned}$$

Aplicando la estimación (2.12), llegamos a

$$|\langle \varphi_s \mid \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \frac{1}{|c(I_s) - c(I_{s'})|^4} \leq \frac{1}{\text{dist}(I_s, I_{s'})^4}.$$

Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , nuestra meta es acotar  $\|Q_{(0)}f\|$ . Por definición podemos escribir  $\|Q_{(0)}f\|_2^2 = \langle Q_{(0)}f | Q_{(0)}f \rangle$ , y por una cuenta similar a la realizada en la proposición 2.3.2 se tiene

$$\begin{aligned} \|Q_{(0)}f\|_2^2 &= \sum_{s,s' \in \mathcal{T}(0)} \langle f | \varphi_s \rangle \overline{\langle f | \varphi_{s'} \rangle} \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle \\ &\lesssim \sum_{s,s' \in \mathcal{T}(0)} |\langle f | \varphi_s \rangle| |\langle f | \varphi_{s'} \rangle| \frac{1}{\text{dist}(I_s, I_{s'})^4} \\ &= \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\langle f | \varphi_s \rangle| \sum_{s' \in \mathcal{T}(0)} \frac{1}{\text{dist}(I_s, I_{s'})^4} |\langle f | \varphi_{s'} \rangle|. \end{aligned}$$

Fijado  $s \in \mathcal{T}(0)$ , por construcción cada  $s' \in \mathcal{T}(0)$  se escribirá como  $s' = I_{s'} \times w(0)$  es decir,  $s' = (I_s + m) \times w(0)$  con  $m \in \mathbb{Z}$  luego

$$\begin{aligned} \|Q_{(0)}f\|_2^2 &\lesssim \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\langle f | \varphi_s \rangle| \sup_{m \in \mathbb{Z}} |\langle f | \varphi_{(I_s+m) \times w(0)} \rangle| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{m^4} \\ &\lesssim \sup_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\langle f | \varphi_s \rangle| |\langle f | \varphi_{(I_s+m) \times w(0)} \rangle| \\ &\leq \sup_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\langle f | \varphi_{(I_s+m) \times w(0)} \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &= \sup_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &= \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2. \end{aligned}$$

Antes de concluir el razonamiento tenemos que estimar  $|\langle f | \varphi_s \rangle|^2$ , para ello utilizaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que nos permite escribir

$$|\langle f | \varphi_s \rangle|^2 \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f| |\varphi_s| \right)^2 \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^2 |\varphi_s| \right) \left( \int_{\mathbb{R}} |\varphi_s| \right).$$

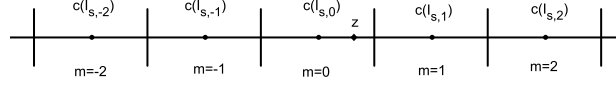
Como  $\varphi_s$  es una función de Schwarz, el segundo factor es finito y de hecho está acotado por  $\|\varphi\|_2$  uniformemente. Por lo tanto, juntando lo anterior,

$$\|Q_{(0)}f\|_2^2 \lesssim \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 |\varphi_s| = \int_{\mathbb{R}} |f(z)|^2 \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\varphi_s(z)| dx.$$

Dado  $z \in \mathbb{R}$ , los  $I_s$  con  $s \in \mathcal{T}(0)$  forman una partición de  $\mathbb{R}$  en intervalos de longitud 1. Reordenando estos intervalos podemos conseguir que  $|z - c(I_s)| \geq |m|/2$ , donde cada  $m \in \mathbb{Z}$  proviene de un  $I_s$  distinto. Utilizando lo anterior y que  $\varphi_s$  es una función de Schwarz, se obtiene la cota

$$|\varphi_s(z)| \lesssim \frac{1}{(1 + |z - c(I_s)|)^4} \lesssim \frac{1}{m^4} \text{ para cada } z \in \mathbb{R}.$$

Figura 3.1



Así, la proposición queda demostrada ya que

$$\|Q_{(0)}f\|_2^2 \lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \sum_{s \in \mathcal{T}(0)} |\varphi_s(x)| \right) \|f\|_2^2 \lesssim \|f\|_2^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{m^4} \lesssim \|f\|_2^2.$$

■

**Teorema 2.3.5.** Para cada  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $Q_\xi$  es un operador acotado en  $L^2(\mathbb{R})$  con cota independiente de  $\xi$ .

**Demostración.** Los  $Q_{(n)}$  son ortogonales y podemos usar el teorema de Pitágoras,

$$\|Q_\xi f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|Q_{(n)}f\|_2^2.$$

Utilizando el teorema de Plancherel

$$Q_{(n)}f = \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \simeq \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle \widehat{f} | \widehat{\varphi}_s \rangle \varphi_s.$$

Para cada  $s \in \mathcal{T}(n)$  se verifica que  $\text{sop}(\widehat{\varphi}_s) \subseteq w(n)^-$ , por lo que si reemplazamos  $f$  por  $f_n$  donde  $\widehat{f}_n = \widehat{f} \mathbf{1}_{w(n)^-}$ , obtenemos

$$\langle \widehat{f}_n | \widehat{\varphi}_s \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \mathbf{1}_{w(n)^-}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}_s(\xi)} d\xi = \int_{w(n)^-} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}_s(\xi)} d\xi = \langle \widehat{f} | \widehat{\varphi}_s \rangle.$$

Obviamente, esto último implica que  $Q_{(n)}f = Q_{(n)}f_n$ , así que usando la proposición anterior

$$\|Q_\xi f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|Q_{(n)}f_n\|_2^2 \lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f_n\|_2^2 \lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\widehat{f}_n\|_2^2.$$

Los soportes son disjuntos, así que podemos usar de nuevo el teorema de Pitágoras, que unido a  $\sum_n \widehat{f}_n \leq \widehat{f}$  permite concluir que  $\|Q_\xi f\|_2 \lesssim \|f\|_2$  con cota independiente de  $\xi$ . ■

**Proposición 2.3.6.** Sea  $\xi \in \mathbb{R}$  y sea  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces se cumple que

$$Q_\xi = \text{Dil}_{2^{-k}} Q_{\xi 2^{-k}} \text{Dil}_{2^k}.$$

**Demostración.** Escogemos intervalos diádicos  $w(n) = [l_n 2^{-n}, (l_n + 1) 2^{-n})$  tales que  $\xi \in w(n)^+$ . Si definimos  $\tilde{w}(n) = [l_n 2^{-n-k}, (l_n + 1) 2^{-n-k})$  es evidente que  $\xi 2^{-k} \in \tilde{w}(n)^+$ , y por lo tanto podemos escribir

$$Q_{\xi 2^{-k}} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \tilde{\mathcal{T}}(n)} \langle f | \varphi_r \rangle \varphi_r$$

donde los  $r \in \tilde{\mathcal{T}}(n)$  cumplen que  $w_r = \tilde{w}(n)$ . Componiendo con dilataciones y utilizando que  $\text{Dil}_{2^{-k}}^2$  es el adjunto de  $\text{Dil}_{2^k}^2$  queda

$$\text{Dil}_{2^{-k}}^2 Q_{\xi 2^{-k}} \text{Dil}_{2^k}^2 f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \tilde{\mathcal{T}}(n)} \langle f | \text{Dil}_{2^{-k}}^2 \varphi_r \rangle \text{Dil}_{2^{-k}}^2 \varphi_r.$$

Para ver que esta última expresión es igual a  $Q_{\xi} f$  bastará con demostrar que cada  $\text{Dil}_{2^{-k}}^2 \varphi_r$  coincide con un  $\varphi_s$  donde  $s \in \mathcal{T}(n)$ . Además, definiendo la baldosa  $s$  por  $w_s = 2^k w_r$  y  $I_s = 2^{-k} I_r$  se tiene

$$\begin{aligned} \text{Dil}_{2^{-k}}^2 \varphi_r &= \text{Dil}_{2^{-k}}^2 \text{Mod}_{c(w_r^-)} \text{Tr}_{c(I_r)} \text{Dil}_{|I_r|}^2 \varphi \\ &= \text{Mod}_{2^k c(w_r^-)} \text{Tr}_{2^{-k} c(I_r)} \text{Dil}_{2^{-k} |I_r|}^2 \varphi \\ &= \text{Mod}_{c(w_s^-)} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi \end{aligned}$$

que por definición es  $\varphi_s$ . Con la siguiente igualdad se concluye el resultado de la proposición:

$$\text{Dil}_{2^{-k}}^2 Q_{\xi 2^{-k}} \text{Dil}_{2^k}^2 f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s = Q_{\xi} f.$$

■

**Proposición 2.3.7.** *El operador  $Q_{\xi}$  es semidefinido positivo y su núcleo contiene aquellas funciones  $f$  tales que  $\text{sop}(\hat{f}) \subseteq [\xi, \infty)$ .*

**Demostración.** Veamos primero que  $Q_{\xi}$  es semidefinido positivo, para ello tomamos  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y ponemos

$$\langle Q_{\xi} f | f \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 \simeq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\langle \hat{f} | \hat{\varphi}_s \rangle|^2.$$

Estamos ante una suma de términos no negativos. Teniendo en cuenta que los  $w_s^- = \text{sop}(\hat{\varphi}_s)$  cubren todo  $\mathbb{R}$  y que  $f$  no es idénticamente nula, existirá algún sumando positivo y por lo tanto tendremos  $\langle Q_{\xi} f | f \rangle > 0$ . Sea ahora  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\hat{f}$  está soportada en  $[\xi, \infty)$ . Recordemos que

$$Q_{\xi} f = \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{w_s^+}(\xi) \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s.$$

Tomamos  $s \in \mathcal{T}$  tal que  $\xi \in w_s^+$  ya que de no ser así, el sumando no aportaría en  $Q_{\xi}$ . Utilizando el teorema de Plancherel

$$\langle f | \varphi_s \rangle \simeq \langle \hat{f} | \hat{\varphi}_s \rangle = 0$$



ya que por construcción,  $\text{sop}(\widehat{\varphi}_s) \cap w_s^+ = \emptyset$ . Por lo tanto  $f$  pertenece al núcleo de  $Q_\xi$ , con lo que se demuestra la proposición. ■

Ya tenemos todas las herramientas suficientes para pasar a la siguiente fase. Gracias a las propiedades de  $Q_\xi$  podremos expresar el operador  $P_-$  de una manera que nos permitirá simplificar bastante la demostración de la desigualdad  $\|Cf\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2$ . Al principio del capítulo 3 veremos la relación que guardan  $P_-$  y  $\mathcal{C}$ .

**Definición 2.3.8.** Para cada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  se define el operador

$$Qf(x) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f(x) \mu(d\lambda, dy, d\xi)$$

donde  $B(Y) = [1, 2] \times [0, Y] \times [0, Y]$  y la medida  $\mu(d\lambda, dy, d\xi)$  indica que la integral está dividida por  $|B(Y)| = Y^2$ .

Una de las partes más tediosas de la demostración es la de probar que el límite existe para funciones de Schwarz. Para ello tendremos que usar propiedades de periodicidad junto con el hecho de que las colas del integrando convergen a cero uniformemente en  $(\lambda, y, \xi) \in B(Y)$ . La propiedad de periodicidad que utilizaremos se resume en la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.9.** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y periódica de periodo  $\theta$ , entonces se verifica

$$\frac{1}{k} \int_0^k g(t) dt \rightarrow \frac{1}{\theta} \int_0^\theta g(t) dt$$

cuando  $k$  tiende a infinito. El mismo resultado se puede extender a más dimensiones, es decir si  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada y periódica de periodo  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , entonces

$$\frac{1}{k_1 \dots k_n} \int_0^{k_1} \dots \int_0^{k_n} g(t) dt_1 \dots dt_n \rightarrow \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_n} \int_0^{\theta_1} \dots \int_0^{\theta_n} g(t) dt_1 \dots dt_n$$

cuando todos los  $k_j$  tienden a infinito.

**Demostración.** Dado  $k \in \mathbb{N}$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n\theta \leq k \leq (n+1)\theta$ . Separamos la integral en dos

$$\frac{1}{k} \int_0^k g(t) dt = \frac{1}{k} \left( \int_0^{k-n\theta} g(t) dt + \int_{k-n\theta}^k g(t) dt \right).$$

Ahora podemos expresar la diferencia como

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k} \int_0^k g(t) dt - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta g(t) dt \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{k} \int_0^{k-n\theta} |g(t)| dt + \left| \frac{1}{k} \int_{k-n\theta}^k g(t) dt - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta g(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{k} \int_0^\theta |g(t)| dt + \left| \frac{n}{k} \int_0^\theta g(t) dt - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta g(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Hemos acotado el primer sumando teniendo en cuenta que  $0 \leq k - n\theta \leq \theta$ , y para el segundo sumando hemos usado que  $g$  es periódica. Tal como hemos escogido  $n$  es claro que se cumple

$$\frac{-1}{k} \leq \frac{n}{k} - \frac{1}{\theta} \leq 0.$$

Utilizando que  $g$  es acotada, podemos concluir

$$\left| \frac{1}{k} \int_0^k g(t) dt - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta g(t) dt \right| \leq \frac{\theta}{k} \|g\|_\infty + \theta \left| \frac{n}{k} - \frac{1}{\theta} \right| \|g\|_\infty \rightarrow 0$$

cuando  $k$  tiende a infinito. Para extender el resultado a varias dimensiones basta con utilizar el teorema de Fubini junto con el resultado que acabamos de probar. ■

Una vez sepamos que el límite existe y que el operador es acotado en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , lo extenderemos por densidad a todo  $L^2(\mathbb{R})$ . Para simplificar un poco la notación, pondremos

$$\begin{aligned} A_{\lambda,y,\xi} f &= \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f \\ A_{\lambda,y,\xi}^n f &= \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_{(n)} \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f. \end{aligned}$$

Es decir, que

$$A_{\lambda,y,\xi} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{\lambda,y,\xi}^n f = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{\lambda,y,\xi}^k f$$

siendo  $B_{\lambda,y,\xi}^k f = \sum_{|n| \leq k} A_{\lambda,y,\xi}^n f$ . Ahora podemos expresar el operador  $Q$  como

$$Qf(x) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \lim_{k \rightarrow \infty} B_{\lambda,y,\xi}^k f(x) \mu(d\lambda, dy, d\xi).$$

Veremos que el operador está bien definido en las funciones de Schwarz y que fuera de la integral, los límites se pueden intercambiar, hecho al que sacaremos más partido en el futuro. Pero antes de nada, tenemos que demostrar que los  $A_{\lambda,y,\xi}^n$  son periódicos en sus dos últimos parámetros.

**Proposición 2.3.10.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se verifica*

$$A_{\lambda,y,\xi}^n = A_{\lambda,y+2^n,\xi} = A_{\lambda,y,\xi+2^{-n}}$$

para cualesquiera  $(\lambda, y, \xi) \in B(Y)$ .

**Demostración.** Por definición, y pasando los operadores al lado derecho del producto escalar (los adjuntos son los inversos)

$$A_{\lambda,y,\xi}^n f = \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle f | \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s \rangle \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s.$$

Para la primera igualdad, vamos a computar  $\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y-2^n} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s$ . Utilizando las propiedades estudiadas antes de la proposición 2.2.3

$$\begin{aligned} \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y-2^n} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s &= \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y-2^n} \text{Mod}_{-\xi} \text{Mod}_{c(w_s^-)} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi \\ &= \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y-2^n} \text{Mod}_{c(w_s^-) - \xi} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi \\ &= \Omega \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Mod}_{c(w_s^-) - \xi} \text{Tr}_{c(I_s) - y - 2^n} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi \end{aligned}$$

donde  $\Omega$  es un complejo de módulo 1. Para cada  $s$ , definimos  $r$  con  $I_r = I_s - 2^n$  y  $w_r = w_s$ , podemos reescribir la última expresión como

$$\Omega \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Mod}_{c(w_r^-) - \xi} \text{Tr}_{c(I_r) - y} \text{Dil}_{|I_r|}^2 \varphi.$$

Repitiendo el proceso anterior en el sentido contrario llegamos a que

$$\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_r = \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y-2^n} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s.$$

La relación entre  $s$  y  $r$  es biyectiva, así que realmente estamos ante una permutación de los índices de la suma. Sumando la última expresión obtenemos  $A_{\lambda, y, \xi}^n = A_{\lambda, y+2^n, \xi}^n$ . Para demostrar la otra igualdad el razonamiento es análogo:

$$\begin{aligned} \text{Mod}_{-\xi-2^{-n}} \varphi_s &= \text{Mod}_{-\xi-2^{-n}} \text{Mod}_{c(w_s^-)} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi \\ &= \text{Mod}_{c(w_s^-) - \xi - 2^{-n}} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi \\ &= \text{Mod}_{c(w_r^-) - \xi} \text{Tr}_{c(I_r)} \text{Dil}_{|I_r|}^2 \varphi \\ &= \text{Mod}_{-\xi} \varphi_r. \end{aligned}$$

En este caso hemos definido  $I_r = I_s$  y  $w_r = w_s - 2^{-n}$ . Componiendo por la izquierda con  $\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y}$  y sumando, llegamos a  $A_{\lambda, y, \xi}^n = A_{\lambda, y, \xi+2^{-n}}^n$  y el resultado queda probado.  $\blacksquare$

En las siguientes proposiciones veremos que para las funciones de Schwarz,  $B_{\lambda, y, \xi}^k f$  converge a  $A_{\lambda, y, \xi} f$  uniformemente en  $\lambda, y, \xi$ . Bastará con demostrar que cada cola de la suma converge uniformemente a 0.

**Proposición 2.3.11.** *Sea  $f$  función de Schwarz, si  $k \rightarrow +\infty$  los términos*

$$\sum_{n \geq k} A_{\lambda, y, \xi}^n f(x)$$

*convergen a cero uniformemente en  $Y > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda, y, \xi) \in B(Y)$ .*

**Demostración.** En efecto, utilizando la propiedad triangular sabemos que

$$\left| \sum_{n \geq k} A_{\lambda, y, \xi}^n f(x) \right| \leq \sum_{n \geq k} \sum_{s \in T(n)} |\langle f | \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s \rangle| |\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s(x)|.$$

Para el primer factor utilizaremos la desigualdad de Cauchy Schwarz junto con el hecho de que los operadores de modulación, traslación y dilatación conservan la norma dos:

$$|\langle f | \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s \rangle| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Como la función  $\widehat{\varphi}$  está fijada de antemano, usando el teorema de Plancherel acotamos la última expresión por una constante que únicamente depende de  $f$ . Para el segundo factor escribiremos

$$|\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s(x)| = 2^{\frac{\lambda}{2}} |\varphi_s(2^\lambda x + y)| = 2^{\frac{\lambda}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} \left| \varphi\left(\frac{z - c(I_s)}{2^n}\right) \right|$$

donde  $z = 2^\lambda x + y$ . Para cualquier valor de los parámetros, podemos acotar la distancia entre  $z$  y los  $c(I_s)$  con  $s \in \mathcal{T}(n)$ . Numerando estos intervalos como hicimos en la Figura 3.1, obtenemos

$$|z - c(I_{s_j})| \geq j \frac{|I_{s_j}|}{2} = j2^{n-1},$$

y utilizando que  $\varphi$  es función de Schwarz podemos mayorar el segundo factor por

$$|\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s(x)| \lesssim \frac{2^{\frac{\lambda}{2}} 2^{\frac{-n}{2}}}{\left(\frac{|z-c(I_s)|}{2^n}\right)^4} \lesssim \frac{2^{\frac{\lambda}{2}} 2^{\frac{-n}{2}}}{j^4}.$$

Sumando en  $j \in \mathbb{Z}$  y recordando que  $\lambda \in [1, 2]$ , llegamos a

$$\sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s(x)| \lesssim 2^{\frac{-n}{2}}.$$

Juntando las dos estimaciones, tenemos acotada la cantidad principal por

$$\left| \sum_{n \geq k} A_{\lambda, y, \xi}^n f(x) \right| \lesssim \sum_{n \geq k} 2^{\frac{-n}{2}},$$

que converge a cero cuando  $k \rightarrow +\infty$ . ■

**Proposición 2.3.12.** *Sea  $f$  función de Schwarz, si  $k \rightarrow -\infty$  los términos*

$$\sum_{n \leq k} A_{\lambda, y, \xi}^n f(x)$$

*convergen a cero uniformemente en  $Y > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda, y, \xi) \in B(Y)$ .*

**Demostración.** Ahora tenemos

$$\left| \sum_{n \leq k} A_{\lambda, y, \xi}^n f(x) \right| \leq \sum_{n \leq k} \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\langle f | \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s \rangle| |\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s(x)|.$$

Igual que antes, para el segundo factor acotamos

$$\sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s(x)| \lesssim 2^{\frac{-n}{2}}.$$

En este caso, la cota que conseguimos antes para el primer factor no es suficiente, ya que ahora  $k \rightarrow -\infty$ . Habrá que usar fuertemente el hecho de que  $f$  es función de Schwarz para llegar al resultado deseado. Utilizando el teorema de Plancherel

$$|\langle f | \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} \varphi_s \rangle| \lesssim \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)| |\text{Dil}_{2^\lambda}^2 \text{Mod}_y \text{Tr}_{-\xi} \widehat{\varphi}_s(x)| dx.$$

Por construcción, todo  $z \in \text{sop}(\widehat{\varphi}_s)$  verifica  $z \leq c(w_s^-) + \frac{|w_s|}{8}$ , lo que se traduce en que  $z \leq c(w_s) - \frac{|w_s|}{8}$ . Por lo tanto, teniendo en cuenta que

$$|\text{Dil}_{2^\lambda}^2 \text{Mod}_y \text{Tr}_{-\xi} \widehat{\varphi}_s(x)| = 2^{\frac{-\lambda}{2}} \left| \widehat{\varphi}_s\left(\frac{x}{2^\lambda} + \xi\right) \right|,$$

sólo nos interesarán los  $x$  tales que

$$x \leq 2^\lambda \left( c(w_s) - \frac{|w_s|}{8} - \xi \right).$$

Por construcción de los intervalos diádicos anidados, sabemos que  $\xi \geq c(w_s)$ , así que podemos deducir que  $x \leq \frac{-|w_s|}{8}$  usando que  $\lambda$  es positivo. En la definición de  $\varphi$  exigimos que el módulo de  $\widehat{\varphi}$  estuviera acotado por 1, usando además que  $\widehat{f}$  es función de Schwarz se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)| |\text{Dil}_{2^\lambda}^2 \text{Mod}_y \text{Tr}_{-\xi} \widehat{\varphi}_s(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\frac{-1}{8 \cdot 2^n}} 2^{\frac{-\lambda}{2}} |\widehat{f}(x)| \left| \widehat{\varphi}_s \left( \frac{x}{2^\lambda} + \xi \right) \right| dx \\ &\lesssim 2^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{-1}{8 \cdot 2^n}} |\widehat{f}(x)| dx \\ &\lesssim 2^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{-1}{8 \cdot 2^n}} \frac{1}{(1-x)^2} dx \\ &\lesssim 2^{\frac{3n}{2}}. \end{aligned}$$

Es importante darse cuenta de que las desigualdades anteriores son uniformes en los parámetros. Multiplicando ambos factores en la expresión general obtenemos

$$\left| \sum_{n \leq k} A_{\lambda, y, \xi}^n f(x) \right| \lesssim \sum_{n \leq k} 2^{\frac{3n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} = \sum_{n \leq k} 2^n,$$

que converge a cero cuando  $k \rightarrow -\infty$ . ■

Recordemos que  $Q$  venía dado por

$$Qf = \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \lim_{k \rightarrow \infty} B_{\lambda, y, \xi}^k f \mu(d\lambda, dy, d\xi),$$

donde  $B_{\lambda, y, \xi}^k f = \sum_{|n| \leq k} A_{\lambda, y, \xi}^n f$ . Ya tenemos las herramientas necesarias para demostrar que el límite existe, lo veremos en la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.13.** *Para cada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , el operador  $Q$  está bien definido, y de hecho*

$$Qf = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} B_{\lambda, y, \xi}^k f \mu(d\lambda, dy, d\xi).$$

**Demostración.** Usando las dos proposiciones anteriores  $B_{\lambda, y, \xi}^k f$  converge uniformemente en los parámetros a  $A_{\lambda, y, \xi} f$  cuando  $k$  tiende a infinito. Por lo tanto, en la definición de  $Q$  podemos sacar el límite fuera de la integral para obtener

$$Qf = \lim_{Y \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} B_{\lambda, y, \xi}^k f \mu(d\lambda, dy, d\xi).$$

Como tendremos que trabajar con límites en dos variables distintas, definiremos para cada  $k$  y cada  $Y$

$$Q_Y^k f = \int_{B(Y)} B_{\lambda, y, \xi}^k f \mu(d\lambda, dy, d\xi).$$

Fijamos  $k$  y hacemos tender  $Y$  a infinito, el candidato a límite de los  $Q_Y^k f$  es

$$Q^k f = \lim_{Y \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k \int_{B(Y)} A_{\lambda,y,\xi}^n f \mu(d\lambda, dy, d\xi).$$

Intercambiamos la suma y el límite, y aplicamos en cada sumando el argumento de periodicidad estudiado en la proposición 2.3.9. Podemos concluir que el límite en  $Y$  efectivamente existe. Aún falta probar que el límite en  $k$  es uniforme en  $Y$ , o lo que es lo mismo, que  $(Q_Y^k f)_k$  es de Cauchy uniforme en  $Y$ . Para ello, basta con escribir

$$|Q_Y^p f - Q_Y^q f| \leq \int_{B(Y)} |B_{\lambda,y,\xi}^p f - B_{\lambda,y,\xi}^q f| \mu(d\lambda, dy, d\xi)$$

y recordar que la integral está normalizada y que  $B_{\lambda,y,\xi}^k f$  converge uniformemente (y por lo tanto Cauchy uniforme) en los parámetros. Gracias a un conocido resultado de análisis elemental podemos deducir que el límite existe y que

$$Qf = \lim_{Y \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} Q_Y^k f = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{Y \rightarrow \infty} Q_Y^k f,$$

por lo que el operador está bien definido en  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . ■

Para poder extender  $Q$  de manera única a un operador acotado en  $L^2(\mathbb{R})$ , es necesario comprobar que  $Q$  es acotado en las funciones de Schwarz. Sea  $f$  función de Schwarz, utilizando la convexidad de la norma  $\|\cdot\|_2$  vista en el primer capítulo, y teniendo en cuenta que Mod, Tr y Dil<sup>2</sup> son isometrías, podemos escribir

$$\begin{aligned} \|Qf\|_2 &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \left\| \int_{B(Y)} A_{\lambda,y,\xi} f \mu(d\lambda, dy, d\xi) \right\|_2 \\ &\leq \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|A_{\lambda,y,\xi} f\|_2 \mu(d\lambda, dy, d\xi) \\ &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2\lambda}^2 f\|_2 \mu(d\lambda, dy, d\xi) \\ &\lesssim \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|\text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2\lambda}^2 f\|_2 \mu(d\lambda, dy, d\xi). \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos utilizado el teorema 2.3.5. Además, la última expresión coincide con  $\|f\|_2$  ya que la integral está normalizada. Como ya sabemos, el operador  $Q$  admite una extensión única como operador acotado de  $L^2(\mathbb{R})$ , a la que seguiremos denotando  $Q$ .

Aunque a primera vista no lo parezca,  $Q$  coincide con  $P_-$  salvo constante multiplicativa. Para poder concluir lo anterior, usaremos el teorema 2.2.4, aunque todavía tenemos que verificar ciertas propiedades del operador  $Q$ .

**Proposición 2.3.14.** *El operador  $Q$  conmuta con las dilataciones y las traslaciones.*

**Demostración.** Toda dilatación Dil <sub>$\lambda$</sub> <sup>2</sup> se puede expresar como Dil <sub>$2^a$</sub> <sup>2</sup> donde  $a$  es un número real. Vamos a probar que para cada  $a \in \mathbb{R}$ , se tiene Dil <sub>$2^{-a}$</sub> <sup>2</sup>  $Q$  Dil <sub>$2^a$</sub> <sup>2</sup> =  $Q$ . Por definición

$$\text{Dil}_{2^{-a}}^2 Q \text{Dil}_{2^a}^2 f = \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \text{Dil}_{2^{-a}}^2 A_{\lambda,y,\xi} \text{Dil}_{2^a}^2 f \mu(d\lambda, dy, d\xi).$$

Basta con fijarse en el integrando, por definición de  $A_{\lambda,y,\xi}$  y utilizando las propiedades conocidas

$$\begin{aligned} \text{Dil}_{2^{-a}}^2 A_{\lambda,y,\xi} \text{Dil}_{2^a}^2 &= \text{Dil}_{2^{-a}}^2 \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 \text{Dil}_{2^a}^2 \\ &= \text{Dil}_{2^{-(a+\lambda)}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^{a+\lambda}}^2 \\ &= \text{Tr}_{-y 2^{-(a+\lambda)}} \text{Mod}_{-\xi 2^{a+\lambda}} \text{Dil}_{2^{-(a+\lambda)}}^2 Q_\xi \text{Dil}_{2^{a+\lambda}}^2 \text{Mod}_{\xi 2^{a+\lambda}} \text{Tr}_{y 2^{-(a+\lambda)}}. \end{aligned}$$

Descomponiendo  $a + \lambda = ([a + \lambda] - 1) + (\langle a + \lambda \rangle + 1) = k + \lambda'$ , podemos escribir

$$\text{Dil}_{2^{-(a+\lambda)}}^2 Q_\xi \text{Dil}_{2^{a+\lambda}}^2 = \text{Dil}_{2^{-\lambda'}}^2 \text{Dil}_{2^{-k}}^2 Q_\xi \text{Dil}_{2^k}^2 \text{Dil}_{2^{\lambda'}}^2.$$

Utilizando la proposición Y y deshaciendo las cuentas anteriores, llegamos a la siguiente igualdad

$$\text{Dil}_{2^{-a}}^2 A_{\lambda,y,\xi} \text{Dil}_{2^a}^2 = \text{Dil}_{2^{-\lambda'}}^2 \text{Tr}_{-y 2^{-k}} \text{Mod}_{-\xi 2^k} Q_{\xi 2^k} \text{Mod}_{\xi 2^k} \text{Tr}_{y 2^{-k}} \text{Dil}_{2^{\lambda'}}^2.$$

Si realizamos el cambio de variable  $\lambda' = \langle a + \lambda \rangle + 1$ ,  $y' = y 2^{-k}$ ,  $\xi' = \xi 2^k$ , el dominio de integración pasa a ser

$$B'(Y) = [1, 2] \times [0, 2^{-k}Y] \times [0, 2^kY],$$

y hemos demostrado que  $\text{Dil}_{2^{-a}}^2 A_{\lambda,y,\xi} \text{Dil}_{2^a}^2 = A_{\lambda',y',\xi'}$ . No hay ningún problema con el cambio de variable de  $\lambda$  ya que la parte fraccionaria es periódica y continua salvo en un conjunto de medida nula. Aplicando el teorema del cambio de variable

$$\begin{aligned} \text{Dil}_{2^{-a}}^2 Q \text{Dil}_{2^a}^2 f &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} A_{\lambda',y',\xi'} f \mu(d\lambda, dy, d\xi) \\ &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B'(Y)} A_{\lambda',y',\xi'} f \mu(d\lambda', dy', d\xi'). \end{aligned}$$

Cambiando  $\lambda'$  por  $\lambda$  y usando la periodicidad en los parámetros  $y$ ,  $\xi$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Dil}_{2^{-a}}^2 Q \text{Dil}_{2^a}^2 f &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B'(Y)} A_{\lambda,y',\xi'} f \mu(d\lambda, dy', d\xi') \\ &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} A_{\lambda,y,\xi} f \mu(d\lambda, dy, d\xi) \\ &= Qf. \end{aligned}$$

Falta probar que  $Q$  conmuta con las traslaciones. Efectivamente, dado un número real  $z$ , escribimos  $\text{Tr}_{-z} Q \text{Tr}_z$  como

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{-z} Q \text{Tr}_z f &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \text{Tr}_{-z} A_{\lambda,y,\xi} \text{Tr}_z f \mu(d\lambda, dy, d\xi) \\ &= \int_1^2 \left( \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_0^Y \int_0^Y \lim_{k \rightarrow \infty} B_{\lambda,y+2^\lambda z,\xi}^k f \mu(dy, d\xi) \right) d\lambda \\ &= \int_1^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_0^Y \int_0^Y B_{\lambda,y+2^\lambda z,\xi}^k f \mu(dy, d\xi) \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Para cada  $\lambda$  efectuamos el cambio de variable  $y' = 2^\lambda z + y$ , con  $y' \in [2^\lambda z, 2^\lambda z + Y]$ . Obtenemos

$$\mathrm{Tr}_{-z} Q \mathrm{Tr}_z f = \int_1^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{2^\lambda z}^{2^\lambda z + Y} \int_0^Y B_{\lambda, y', \xi}^k f \mu(dy', d\xi) \right) d\lambda.$$

Utilizando un argumento de periodicidad en la variable  $y'$ , la expresión anterior coincide con

$$\int_1^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_0^Y \int_0^Y B_{\lambda, y, \xi}^k f \mu(dy, d\xi) \right) d\lambda = Qf,$$

como queríamos demostrar. ■

**Proposición 2.3.15.** *El núcleo de  $Q$  contiene a las  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tales que  $\widehat{f}$  está soportada en  $[0, \infty)$ .*

**Demostración.** Comprobaremos que si  $\mathrm{sop}(\widehat{f}) \subseteq [0, \infty)$  entonces todos los

$$A_{\lambda, y, \xi} f = \mathrm{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \mathrm{Tr}_{-y} \mathrm{Mod}_{-\xi} Q_\xi \mathrm{Mod}_\xi \mathrm{Tr}_y \mathrm{Dil}_{2^\lambda}^2 f$$

con  $(\lambda, y, \xi) \in B(Y)$  son idénticamente nulos. Para ello, basta con recordar la proposición 2.3.7, que reduce el problema a demostrar que el soporte de la transformada de

$$g = \mathrm{Mod}_\xi \mathrm{Tr}_y \mathrm{Dil}_{2^\lambda}^2 f$$

está contenido en  $[\xi, \infty)$ . Utilizando la proposición 2.2.2, podemos escribir

$$\widehat{g}(x) = \mathrm{Tr}_\xi \mathrm{Mod}_{-y} \mathrm{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \widehat{f}(x) = 2^{\lambda/2} e^{-iy(x-\xi)} \widehat{f}(2^\lambda(x-\xi)).$$

Teniendo en cuenta que  $\mathrm{sop}(\widehat{f}) \subseteq [0, \infty)$ , si  $x \in \mathrm{sop}(\widehat{g})$  entonces  $x \geq \xi$  y se concluye el resultado. ■



## Capítulo 3

# Los lemas principales

### 3.1. Aproximación a los lemas

†Recapitulando, hemos demostrado que  $Q$  es un operador acotado en  $L^2(\mathbb{R})$  que conmuta con dilataciones y traslaciones, y tal que

$$\ker(Q) \supseteq \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{sop}(\widehat{f}) \subseteq [0, +\infty)\}.$$

Por la proposición 2.2.4 podemos deducir que  $P_- \simeq Q$ . Más adelante veremos lo útil que resulta esta caracterización, aunque antes tenemos que hacer un par de observaciones. Recordemos la ecuación (2.11), es decir

$$\mathcal{C}f(x) \leq \sup_N |P_- \text{Mod}_{-N} f(x)| + \sup_N |P_- \text{Mod}_N f(x)| = \mathcal{C}_1 f(x) + \mathcal{C}_2 f(x).$$

El problema de los operadores  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  es que para cada  $x$  existe un  $N(x)$  distinto donde se alcanza el supremo (en caso de que exista), lo que dificulta bastante las estimaciones. En lo que sigue, supondremos que  $N(x)$  es una función medible cualquiera. Definimos el operador

$$\mathcal{C}_N f(x) = \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{w_s^+}(N(x)) \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(x).$$

Este operador es muy parecido a  $Q_\xi$ , de hecho si ponemos  $N(x)$  constantemente  $\xi$ , ambos coinciden. Gracias a la construcción que hemos hecho, podremos traspasar la información de  $\mathcal{C}_N$  al operador de Carleson, como se ve en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.1.** *Supongamos que para toda función medible  $N$ , se cumple la desigualdad  $\|\mathcal{C}_N f\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2$ . Entonces para toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se verifica  $\|\mathcal{C}f\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2$  y el teorema de Carleson queda demostrado.*

**Demostración.** Utilizando la ecuación (2.11) bastará con demostrar que  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  cumplen la desigualdad débil. Como hemos podido ver  $Q$  es un múltiplo de  $P_-$ , así

---

†La primera sección está inspirada en [La], [LT] y [G2]. El lema de la densidad se trata según [G2], el del tamaño según [La] y el del árbol según [G2].

que se tiene  $|P\text{-Mod}_{-N}f| \simeq |Q\text{Mod}_{-N}f|$  y consecuentemente

$$\begin{aligned} |P\text{-Mod}_{-N}f| &\lesssim \\ &\lesssim \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} |\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 \text{Mod}_{-N} f| \mu(d\lambda, dy, d\xi) \\ &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} |\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_{\xi - \frac{N}{2^\lambda}} \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f| \mu(d\lambda, dy, d\xi). \end{aligned}$$

Primero tomamos supremos en  $N$  a ambos lados de la desigualdad, luego tomamos normas y utilizamos la convexidad de la norma  $\|\cdot\|_{2,\infty}$ , que se trata en el primer capítulo. Tenemos acotada salvo constante  $\|\mathcal{C}_1 f\|_{2,\infty}$  por

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \left\| \sup_N |\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_{\xi - \frac{N}{2^\lambda}} \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f| \right\|_{2,\infty} \mu(d\lambda, dy, d\xi).$$

Los operadores de dilatación, traslación y modulación conservan la norma  $\|\cdot\|_{2,\infty}$ . Además, a la izquierda de  $Q_\xi$  no hay dependencia en  $N$ , por lo tanto

$$\|\mathcal{C}_1 f\|_{2,\infty} \lesssim \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \left\| \sup_N |Q_\xi \text{Mod}_{\xi - \frac{N}{2^\lambda}} \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f| \right\|_{2,\infty} \mu(d\lambda, dy, d\xi).$$

Como la integral está normalizada, bastará con demostrar que el integrando está acotado por  $\|f\|_2$  uniformemente en  $\lambda, y, \xi$ . Pero esto último es equivalente, cambiando el nombre de los parámetros, a

$$\left\| \sup_N |Q_{\xi' + \frac{N}{2^\lambda}} \text{Mod}_{\xi'} \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f| \right\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2$$

uniformemente en  $\lambda, y, \xi'$ . Gracias a este cambio hemos ubicado la  $N$  donde nos interesaba. Como en la hipótesis vale cualquier función medible, llegamos a

$$\|\mathcal{C}_{N'} \text{Mod}_{\xi'} \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f\|_{2,\infty} \lesssim \|\text{Mod}_{\xi'} \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f\|_2 = \|f\|_2,$$

y la primera parte de la proposición queda demostrada. Para la segunda parte razonamos de manera análoga utilizando que  $\mathcal{C}_2 f(x) = \sup_N |P\text{-Mod}_N f(x)|$ , es decir cambiando  $N$  por  $-N$ .  $\blacksquare$

A partir de ahora nos olvidaremos del operador de Carleson y nos centraremos en obtener la desigualdad débil para  $\mathcal{C}_N$ . En la siguiente proposición mostraremos cómo obtener esa desigualdad débil asumiendo una afirmación más simple y manejable.

**Proposición 3.1.2.** *Supongamos que para todo  $E$  conjunto de medida finita, toda  $N$  función medible, y toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se verifica  $|\langle \mathcal{C}_N f | \mathbf{1}_E \rangle| \lesssim \|f\|_2 |E|^{1/2}$ . Entonces se tiene que  $\|\mathcal{C}_N f\|_{2,\infty} \lesssim \|f\|_2$ .*

**Demostración.** Como ya sabemos, el dual de  $L^{2,1}(\mathbb{R})$  es  $L^{2,\infty}(\mathbb{R})$ , así que por definición de norma en el dual

$$\|\mathcal{C}_N f\|_{2,\infty} \simeq \sup \left\{ |\langle \mathcal{C}_N f | g \rangle| : \|g\|_{2,1} \leq 1 \right\}.$$

Por la proposición 1.1.19, las funciones simples son densas en la bola unidad de  $L^{2,1}(\mathbb{R})$ , así que sólo hará falta ver que para toda  $g$  simple con  $\|g\|_{2,1} \leq 1$  se verifica

$|\langle \mathcal{C}_N f | g \rangle| \lesssim \|f\|_2$ . Sea  $g = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{1}_{E_j}$  tal que  $\|g\|_{2,1} \leq 1$  y  $a_1 > \dots > a_N > 0$ . Definimos  $F_j = E_1 \cup \dots \cup E_j$ ,  $a_{N+1} = 0$  y  $|F_0| = 0$ . Podemos reescribir  $g$  como  $g = \sum_{j=1}^N (a_j - a_{j+1}) \mathbf{1}_{F_j}$ , y queda

$$|\langle \mathcal{C}_N f | g \rangle| \leq \sum_{j=1}^N (a_j - a_{j+1}) |\langle \mathcal{C}_N f | \mathbf{1}_{F_j} \rangle| \lesssim \|f\|_2 \sum_{j=1}^N (a_j - a_{j+1}) |F_j|^{1/2}.$$

Reordenando, ponemos la última suma como  $\sum_{j=1}^N a_j (|F_j|^{1/2} - |F_{j-1}|^{1/2})$ , que como vimos en el ejemplo propiedades estudiadas antes de la proposición 1.1.20 es un múltiplo de  $\|g\|_{2,1}$ . Hemos llegado a

$$|\langle \mathcal{C}_N f | g \rangle| \lesssim \|f\|_2 \|g\|_{2,1} \leq \|f\|_2$$

y por lo tanto la proposición queda demostrada.  $\blacksquare$

Para obtener  $|\langle \mathcal{C}_N f | \mathbf{1}_E \rangle| \lesssim \|f\|_2 |E|^{1/2}$  y por lo tanto demostrar el teorema de Carleson, aún podemos hacer más simplificaciones. Por una parte, si definimos  $\phi_s = (\mathbf{1}_{w_s^+} \circ N) \varphi_s$ , tenemos

$$|\langle \mathcal{C}_N f | \mathbf{1}_E \rangle| \leq \sum_{s \in \mathcal{T}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle|.$$

Así que bastará con probar que dados  $E$  de medida finita y  $N$  medible, se cumple

$$\sum_{s \in \mathcal{T}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| \lesssim \|f\|_2 |E|^{1/2} \quad (3.1)$$

para toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . De hecho sólo hará falta demostrar el resultado para funciones con norma 1, ya que de no ser así

$$\sum_{s \in \mathcal{T}} \left| \left\langle \frac{f}{\|f\|} \middle| \varphi_s \right\rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle \right| \lesssim \left\| \frac{f}{\|f\|} \right\| |E|^{1/2}$$

y lo tendríamos demostrado en general. El hecho de que la suma es infinita no va a ser un problema para nosotros, demostraremos que para cada subconjunto finito de baldosas  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  se tiene la estimación (3.1), y que la constante no depende del subconjunto finito elegido. A partir de ahora ya no habrá que preguntarse si las sumas en  $s$  convergen, y todos los procesos iterativos que hagamos acabarán. A continuación enunciamos el teorema del que nos ocuparemos durante las siguientes secciones.

**Teorema 3.1.3.** *Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto de medida finita, sea  $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible, y sea  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  un conjunto finito de baldosas. Entonces para toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$  de norma 1 se cumple que*

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| \lesssim |E|^{1/2}$$

donde la constante no depende del  $\mathcal{S}$  elegido ni de la función medible  $N$ .

Existe un orden parcial en el conjunto de baldosas  $\mathcal{T}$  definido por  $s < s'$  cuando  $I_s \subseteq I_{s'}$  y  $w_{s'} \subseteq w_s$ . Si dos baldosas  $s$  y  $s'$  son disjuntas en el plano, entonces para alguno de los ejes las proyecciones son disjuntas, y por tanto  $s$  y  $s'$  son incomparables. De hecho se cumple el recíproco, ya que si  $s$  y  $s'$  se cortan en el plano, necesariamente  $I_s \cap I_{s'}$  y  $w_s \cap w_{s'}$  son no vacíos. Por las propiedades de los intervalos diádicos, o bien  $s < s'$  o bien  $s' < s$ , y por lo tanto son  $s$  y  $s'$  son comparables.

**Definición 3.1.4.** Diremos que un subconjunto  $\mathbf{T} \subseteq \mathcal{T}$  es un árbol si existe una baldosa  $I_{\mathbf{T}} \times w_{\mathbf{T}}$ , llamada punta del árbol, tal que para cada  $s \in \mathbf{T}$  se verifica  $s < I_{\mathbf{T}} \times w_{\mathbf{T}}$ .

**Definición 3.1.5.** Sea  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  un conjunto de baldosas, diremos que  $\text{cant}(\mathcal{S}) < A$  siempre que  $\mathcal{S} = \cup_{j \in J} \mathbf{T}_j$  donde cada  $\mathbf{T}_j$  es un árbol y  $\sum_{j \in J} |I_{\mathbf{T}_j}| < A$ .

Fijamos  $M$  constante suficientemente grande y definimos

$$\chi(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^M}.$$

Como ya hicimos con las  $\varphi_s$ , nos interesará adaptar estas funciones a nuestra descomposición diádica del plano. Esto es, para cada intervalo diádico  $I$  pondremos  $\chi_I$  como

$$\chi_I(x) = \text{Tr}_{c(I)} \text{Dil}_{|I|}^1 \chi(x) = \frac{|I|^{-1}}{\left(1 + \frac{|x - c(I)|}{|I|}\right)^M}.$$

Para cada baldosa  $s$  definimos su densidad por la siguiente fórmula

$$\text{den}(s) = \frac{1}{|E|} \sup_{s < u} \int_{E \cap N^{-1}(w_u)} \chi_{I_u}(x) dx$$

donde el supremo se toma en todos los  $u \in \mathcal{T}$  que cumplen  $s < u$ . Si tomamos un  $M$  grande podemos conseguir que  $\text{den}(s) \leq |E|^{-1}$ , ya que  $\|\chi_{I_u}\|_1 = \|\chi\|_1$  para todo  $u \in \mathcal{T}$ . Para definir la densidad en un conjunto arbitrario de baldosas  $\mathcal{S}$ , nos apoyaremos en la anterior definición

$$\text{den}(\mathcal{S}) = \sup_{s \in \mathcal{S}} \text{den}(s).$$

Es evidente que siempre que  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$  se cumple que  $\text{den}(\mathcal{S}) \leq \text{den}(\mathcal{S}')$ , utilizaremos esta propiedad más adelante.

**Definición 3.1.6.** Sea  $\mathbf{T}$  un árbol con punta  $I_{\mathbf{T}} \times w_{\mathbf{T}}$ , diremos que  $\mathbf{T}$  es un  $\pm$  árbol si para cada  $s \in \mathbf{T}$  se cumple que  $w_{\mathbf{T}}^{\pm} \subseteq w_s^{\pm}$ .

Por las propiedades de los intervalos diádicos, es fácil comprobar que en un  $+$  árbol todos los  $w_s^+$  están anidados. En efecto, las mitades superiores de los  $w_s$  contienen a  $w_{\mathbf{T}}^+$  y por lo tanto su intersección es no vacía, lo que implica que cada una está contenida en otra. Para los  $-$  árboles ocurre algo análogo.

Para cada árbol  $\mathbf{T}$  ponemos  $\Delta(\mathbf{T})^2 = \sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2$ . Dado un conjunto de baldosas  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ , definiremos su tamaño como

$$\text{tam}(\mathcal{S}) = \sup \left\{ |I_{\mathbf{T}}|^{-1/2} \Delta(\mathbf{T}) : \mathbf{T} \subseteq \mathcal{S} \text{ es un } + \text{ árbol} \right\}.$$

Como antes, es evidente que si  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ , entonces  $\text{tam}(\mathcal{S}) \leq \text{tam}(\mathcal{S}')$ , ya que todo  $+$  árbol en  $\mathcal{S}$  es también un  $+$  árbol en  $\mathcal{S}'$ .

Los lemas que enunciamos a continuación se demostrarán por separado en las tres próximas secciones.

**Lema 3.1.7 (De la densidad).** *Cada subconjunto finito  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  es la unión disjunta  $\mathcal{S}_{\text{lig}} \cup \mathcal{S}_{\text{pes}}$ , donde se cumple que*

$$\text{den}(\mathcal{S}_{\text{lig}}) \leq \frac{1}{4} \text{den}(\mathcal{S})$$

$$\text{cant}(\mathcal{S}_{\text{pes}}) \lesssim \text{den}(\mathcal{S})^{-1}.$$

**Lema 3.1.8 (Del tamaño).** *Cada subconjunto finito  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  es la unión disjunta  $\mathcal{S}_{\text{peq}} \cup \mathcal{S}_{\text{gra}}$ , donde se cumple que*

$$\text{tam}(\mathcal{S}_{\text{peq}}) \leq \frac{1}{2} \text{tam}(\mathcal{S})$$

$$\text{cant}(\mathcal{S}_{\text{gra}}) \lesssim \text{tam}(\mathcal{S})^{-2}.$$

**Lema 3.1.9 (Del árbol).** *Sea  $\mathbf{T} \subseteq \mathcal{T}$  un árbol, se verifica la siguiente desigualdad*

$$\sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| \lesssim |I_{\mathbf{T}}| \text{tam}(\mathbf{T}) \text{den}(\mathbf{T}) |E|.$$

Supongamos demostrados los tres lemas anteriores y veamos cómo se puede concluir la demostración. Se describirá un proceso iterativo por el que obtendremos conjuntos de baldosas cada vez más pequeños cumpliendo las propiedades requeridas.

**Proposición 3.1.10.** *Sea  $\mathcal{S}$  un conjunto finito de baldosas, existe una sucesión de conjuntos disjuntos  $\mathcal{S}_{n_0}, \mathcal{S}_{n_0-1}, \dots, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{-1} \dots$  tal que  $\mathcal{S} = \cup_{n \leq n_0} \mathcal{S}_n$  y tal que*

- 1)  $\text{tam}(\mathcal{S}_n) \leq 2^{n+1}$  para todo  $n \leq n_0$ ,
- 2)  $\text{den}(\mathcal{S}_n) \leq 2^{2n+2}$  para todo  $n \leq n_0$ ,
- 3)  $\text{tam}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)) \leq 2^n$  para todo  $n \leq n_0$ ,
- 4)  $\text{den}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)) \leq 2^{2n}$  para todo  $n \leq n_0$ ,
- 5)  $\text{cant}(\mathcal{S}_n) \lesssim 2^{-2n}$  para todo  $n \leq n_0$ .

**Demostración.** Como  $\mathcal{S}$  es finito, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que  $\text{tam}(\mathcal{S}) \leq 2^{n_0}$ . Podemos escoger también  $M$  en la definición de densidad tal que  $\text{den}(\mathcal{S}) \leq 2^{2n_0}$ . Construiremos la sucesión  $\mathcal{S}_n$  por inducción decreciente. Comenzamos el proceso tomando  $\mathcal{S}_{n_0} = \emptyset$ , que verifica trivialmente las condiciones 1 y 5. Además, por elección de  $n_0$  también se cumplen 3 y 4. Supongamos que hemos construido  $\mathcal{S}_{n_0}, \mathcal{S}_{n_0-1}, \dots, \mathcal{S}_n$  cumpliendo las condiciones del enunciado. Veamos cómo se obtiene  $\mathcal{S}_{n-1}$ , para ello construiremos dos conjuntos auxiliares  $\mathcal{S}'_{n-1}$  y  $\mathcal{S}''_{n-1}$ .

Empecemos por  $\mathcal{S}'_{n-1}$ . La hipótesis de inducción nos asegura que  $\text{den}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)) \leq 2^{2n}$ , y por lo tanto pueden ocurrir dos casos distintos. Cuando se tenga

$\text{den}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)) \leq 2^{2(n-1)}$ , pondremos  $\mathcal{S}'_{n-1} = \emptyset$ . En caso contrario aplicamos el lema de densidad para obtener  $\mathcal{S}'_{n-1} \subseteq \mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)$  verificando

$$\text{den}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}'_{n-1})) \leq \frac{1}{4} \text{den}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)) \leq 2^{2(n-1)} \quad (3.2)$$

así como la siguiente desigualdad

$$\text{cant}(\mathcal{S}'_{n-1}) \lesssim \text{den}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n))^{-1} < 2^{-2(n-1)}.$$

La construcción de  $\mathcal{S}''_{n-1}$  es similar, por hipótesis sabemos que  $\text{tam}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)) \leq 2^n$ . Si esa cantidad es a su vez menor o igual que  $2^{n-1}$  ponemos  $\mathcal{S}''_{n-1} = \emptyset$ . De no ser así aplicamos el lema del tamaño para conseguir  $\mathcal{S}''_{n-1} \subseteq \mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)$  cumpliendo

$$\text{tam}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}''_{n-1})) \leq \frac{1}{2} \text{tam}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)) \leq 2^{n-1} \quad (3.3)$$

junto a la condición

$$\text{cant}(\mathcal{S}''_{n-1}) \lesssim \text{tam}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n))^{-2} < 2^{-2(n-1)}.$$

En cualquier caso, hemos obtenido el siguiente par de desigualdades

$$\text{den}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}'_{n-1})) \leq 2^{2(n-1)}$$

$$\text{tam}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}''_{n-1})) \leq 2^{n-1}.$$

Definimos  $\mathcal{S}_{n-1}$  como  $\mathcal{S}_{n-1} = \mathcal{S}'_{n-1} \cup \mathcal{S}''_{n-1}$ . Falta comprobar que se cumplen las cinco condiciones del enunciado. Para la primera y la segunda basta con darse cuenta de que  $\mathcal{S}_{n-1} \subseteq \mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)$  y por lo tanto

$$\text{tam}(\mathcal{S}_{n-1}) \leq \text{tam}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)) \leq 2^n = 2^{(n-1)+1}$$

$$\text{den}(\mathcal{S}_{n-1}) \leq \text{den}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)) \leq 2^{2n} = 2^{2(n-1)+2}.$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}_{n-1}) \subseteq \mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}''_{n-1})$  obtenemos

$$\text{tam}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}_{n-1})) \leq 2^{n-1}$$

usando la condición (3.3), y 3 queda probado. Para 4 el razonamiento es análogo, aunque en este caso partiremos del hecho de que  $\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}_{n-1})$  está contenido en  $\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}'_{n-1})$ , que nos permite concluir por (3.2)

$$\text{den}(\mathcal{S} - (\mathcal{S}_{n_0} \cup \dots \cup \mathcal{S}_n \cup \mathcal{S}_{n-1})) \leq 2^{2(n-1)}.$$

La última condición se demuestra fácilmente, ya que

$$\text{cant}(\mathcal{S}_{n-1}) \leq \text{cant}(\mathcal{S}'_{n-1}) + \text{cant}(\mathcal{S}''_{n-1}) \lesssim 2^{-2(n-1)}.$$

Por construcción, el proceso acaba después de un número finito de pasos, y se tiene  $\mathcal{S} = \bigcup_{n \leq n_0} \mathcal{S}_n$ . ■

Una vez demostrada la proposición, el teorema se concluye fácilmente. Tomamos un

conjunto finito de baldosas  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  y construimos la sucesión de los  $\mathcal{S}_n$  con  $n \leq n_0$ . Fijado  $n \leq n_0$  por la condición 5 sabemos que  $\text{cant}(\mathcal{S}_n) \lesssim 2^{-2n}$ , así que existe un conjunto de árboles  $\mathfrak{T}_n$  tal que  $\mathcal{S}_n = \cup_{\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_n} \mathbf{T}$  y  $\sum_{\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_n} |I_{\mathbf{T}}| \lesssim 2^{-2n}$ . Podemos escribir entonces

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathcal{S}_n} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| &\leq \sum_{\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_n} \sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| \\ &\lesssim \sum_{\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_n} |I_{\mathbf{T}}| \text{tam}(\mathbf{T}) \text{den}(\mathbf{T}) |E| \\ &\leq \sum_{\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_n} |I_{\mathbf{T}}| \text{tam}(\mathcal{S}_n) \text{den}(\mathcal{S}_n) |E| \end{aligned}$$

donde hemos usado el lema del árbol en la segunda desigualdad, y la monotonía de  $\text{tam}$  y  $\text{den}$  en la tercera. Por definición, y para  $M$  suficientemente grande, es claro que la densidad de cualquier conjunto de baldosas está acotada por  $|E|^{-1}$ , y por lo tanto

$$\text{den}(\mathcal{S}_n) \leq \min(|E|^{-1}, 2^{2n+2}) \text{ para } n \leq n_0.$$

Gracias a esta estimación y a la proposición anterior podemos concluir la demostración ya que

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathcal{S}_n} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| &\lesssim 2^{n+1} \min(|E|^{-1}, 2^{2n+2}) |E| \sum_{\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_n} |I_{\mathbf{T}}| \\ &\lesssim 2^{n+1} 2^{-2n} \min(|E|^{-1}, 2^{2n+2}) |E| \\ &\lesssim 2^{1-n} \min(|E|^{-1/2}, 2^{2n+2} |E|^{1/2}) |E|^{1/2} \\ &\leq 2^{-n} \min(|E|^{-1/2}, 2^{2n} |E|^{1/2}) |E|^{1/2} \\ &= \min(2^{-n} |E|^{-1/2}, 2^n |E|^{1/2}) |E|^{1/2}, \end{aligned}$$

y sumando en  $n \in \mathbb{Z}$  se deduce

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| \lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \min(2^{-n} |E|^{-1/2}, 2^n |E|^{1/2}) |E|^{1/2} \lesssim |E|^{1/2}$$

como queríamos probar. Es claro que la cota no depende de  $\mathcal{S}$  ni de  $|E|$  ya que

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \min(2^{-n} |E|^{-1/2}, 2^n |E|^{1/2}) &\leq \sum_{n \leq [\Omega]} 2^n |E|^{1/2} + \sum_{n \geq [\Omega]} 2^{-n} |E|^{-1/2} \\ &= 2 \left( |E|^{1/2} 2^{[\Omega]} + |E|^{-1/2} 2^{-[\Omega]} \right) \\ &= 2 \left( 2^{[\Omega]-\Omega} + 2^{\Omega-[\Omega]} \right) \end{aligned}$$

donde hemos definido  $\Omega = \log_2(|E|^{-1/2})$ . La última expresión está acotada por una constante ya que  $[\Omega] \leq \Omega \leq [\Omega] + 1$ .

### 3.2. El lema de la densidad

Sea  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  un subconjunto finito y sea  $\delta = \text{den}(\mathcal{S})$ , definimos

$$\mathcal{S}_{\text{pes}} = \left\{ s \in \mathcal{S} : \text{den}(\{s\}) > \frac{1}{4} \delta \right\}.$$

Si ponemos  $\mathcal{S}_{\text{lig}} = \mathcal{S} - \mathcal{S}_{\text{pes}}$ , es obvio que se cumple

$$\text{den}(\mathcal{S}_{\text{lig}}) = \sup_{s \in \mathcal{S}_{\text{lig}}} \text{den}(\{s\}) \leq \frac{1}{4} \delta,$$

así que sólo hará falta comprobar la condición  $\text{cant}(\mathcal{S}_{\text{pes}}) \lesssim \delta^{-1}$ . Por definición de densidad, para cada  $s \in \mathcal{S}_{\text{pes}}$  existe una baldosa  $u(s) \in \mathcal{T}$  con  $u(s) > s$  tal que

$$\frac{1}{|E|} \int_{E \cap N^{-1}(w_{u(s)})} \chi_{I_{u(s)}} > \frac{1}{4} \delta. \quad (3.4)$$

Sea  $\mathcal{U} = \{u(s) : s \in \mathcal{S}_{\text{pes}}\}$  y sea  $\mathcal{U}_{\text{máx}} \subseteq \mathcal{U}$  el subconjunto de elementos maximales de  $\mathcal{U}$  para la relación  $<$ . Podemos descomponer  $\mathcal{S}_{\text{pes}} = \uplus_i \mathbf{T}_i$  donde cada  $t_i = I_{\mathbf{T}_i} \times w_{\mathbf{T}_i}$  es un árbol maximal en  $\mathcal{S}_{\text{pes}}$ . Dado  $t_i$ , existe  $u(t_i) \in \mathcal{U}$  tal que  $t_i < u(t_i)$ . Si  $u(t_i) \notin \mathcal{U}_{\text{máx}}$  siempre existe  $u \in \mathcal{U}_{\text{máx}}$  cumpliendo  $t_i < u(t_i) < u$ , así que en cualquier caso

$$\sum_i |I_{\mathbf{T}_i}| \leq \sum_{u \in \mathcal{U}_{\text{máx}}} \sum_{t_i < u} |I_{\mathbf{T}_i}|.$$

Por otra parte, sea  $u \in \mathcal{U}_{\text{máx}}$  y sean  $t_i \in \mathbf{T}_i$ ,  $t_j \in \mathbf{T}_j$  cumpliendo  $t_i < u$  y  $t_j < u$ . Es claro que  $w_u \subseteq w_{\mathbf{T}_i} \cap w_{\mathbf{T}_j} \neq \emptyset$  y como  $t_i$  y  $t_j$  son disjuntos, necesariamente  $I_{\mathbf{T}_i} \cap I_{\mathbf{T}_j} = \emptyset$  y ambos intervalos están contenidos en  $I_u$ . La desigualdad anterior se convierte en

$$\sum_i |I_{\mathbf{T}_i}| \leq \sum_{u \in \mathcal{U}_{\text{máx}}} |I_u|.$$

Para demostrar que  $\text{cant}(\mathcal{S}_{\text{pes}}) \lesssim \delta^{-1}$  y por lo tanto el lema de la densidad, bastará con ver que se cumple

$$\sum_{u \in \mathcal{U}_{\text{máx}}} |I_u| \lesssim \delta^{-1}. \quad (3.5)$$

Para ello, tomamos  $u \in \mathcal{U}_{\text{máx}}$  y expresamos  $\mathbb{R}$  como la unión disjunta en  $k \geq 0$  de los conjuntos  $(2^k I_u - 2^{k-1} I_u)$ . Definimos  $2^k I_u$  como el intervalo centrado en  $c(I_u)$ , generalmente no diádico, de longitud  $2^k |I_u|$ . Además, imponemos que  $2^{-1} I_u = \emptyset$ . Gracias a esta descomposición podemos reescribir la ecuación (3.4) como

$$\frac{1}{|E|} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_u} \chi_{I_u} > \frac{1}{8} \delta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$$

siendo  $E_u = E \cap N^{-1}(w_u) \cap (2^k I_u - 2^{k-1} I_u)$ . Utilizando la definición de  $\chi_u$  en la desigualdad anterior, se tiene

$$|E| \frac{\delta}{8} |I_u| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_u} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-c(I_u)|}{|I_u|}\right)^M} dx.$$



Comparando término a término, existe  $k$  tal que un sumando es menor que otro. Utilizando además que los  $x \in 2^k I_u - 2^{k-1} I_u$  verifican  $|x - c(I_u)| \geq 2^{k-2} |I_u|$ , llegamos a

$$|I_u| < 8 \cdot 2^k |E|^{-1} \delta^{-1} \frac{|E_u|}{(1 + 2^{k-2})^M}.$$

Es decir, que  $\mathcal{U}_{\text{máx}} = \cup_{k \geq 0} \mathcal{U}_k$  donde cada  $\mathcal{U}_k$  viene dado por

$$\mathcal{U}_k = \left\{ u \in \mathcal{U}_{\text{máx}} : |I_u| \leq 8 \delta^{-1} |E|^{-1} 2^k (2^{k-2})^{-M} |E \cap N^{-1}(w_u) \cap 2^k I_u| \right\}.$$

Por lo tanto, para demostrar (3.5) bastará con ver que

$$\sum_{u \in \mathcal{U}_k} |I_u| \lesssim 2^{(2-M)k} \delta^{-1}, \quad (3.6)$$

ya que entonces

$$\sum_{u \in \mathcal{U}_{\text{máx}}} |I_u| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(2-M)k} \delta^{-1} \lesssim \delta^{-1}$$

y tendríamos probado el lema. A partir de ahora nos centraremos en demostrar la desigualdad (3.6), pero antes tenemos que enunciar un par de resultados que nos serán muy útiles. Para cada  $k \geq 0$ , construiremos recursivamente el conjunto de baldosas  $\mathcal{V}_k$  como sigue:

Empezamos con  $\mathcal{V}_k = \emptyset$ . En el primer paso tomamos  $v_0 \in \mathcal{U}_k$  tal que  $|I_{v_0}|$  es lo mayor posible y actualizamos  $\mathcal{V}_k := \mathcal{V}_k \cup \{v_0\}$ . Para el segundo paso escogemos  $v_1$  tal que  $|I_{v_1}|$  es la mayor de entre las  $|I_v|$  con  $v \in \mathcal{U}_k - \{v_0\}$  y  $[(2^k I_{v_1}) \times w_{v_1}] \cap [(2^k I_{v_0}) \times w_{v_0}] = \emptyset$ . Actualizamos  $\mathcal{V}_k := \mathcal{V}_k \cup \{v_1\}$ . Análogamente ocurre en los pasos sucesivos, escogemos  $v_{j+1}$  tal que  $|I_{v_{j+1}}|$  es la mayor de todas las  $|I_v|$  con  $v \in \mathcal{U}_k - \{v_0, \dots, v_j\}$  y  $(2^k I_v) \times w_v$  disjunto de los  $(2^k I_{v_j}) \times w_{v_j}$  anteriores. Actualizamos  $\mathcal{V}_k := \mathcal{V}_k \cup \{v_{j+1}\}$ .

El proceso anterior termina tras un número finito de pasos. Supongamos construidos  $\mathcal{V}_k$  para  $k \geq 0$  y enunciemos los siguientes lemas.

**Lema 3.2.1.** *Dado  $u \in \mathcal{U}_k$ , existe  $v \in \mathcal{V}_k$  tal que  $[(2^k I_u) \times w_u] \cap [(2^k I_v) \times w_v] \neq \emptyset$  y además se cumple que  $|I_u| \leq |I_v|$ . Denotaremos esta situación por  $u \sim v$ .*

**Demostración.** Si  $u \in \mathcal{V}_k$ , ponemos  $v = u$  y se verifican trivialmente las condiciones. En caso contrario si  $u \in \mathcal{U}_k - \mathcal{V}_k$ ,  $u$  no se pudo añadir a  $\mathcal{V}_k$  porque  $(2^k I_u) \times w_u$  corta a algún  $(2^k I_{v_i}) \times w_{v_i}$  anterior. Sea  $i$  el menor índice de entre los que  $[(2^k I_u) \times w_u] \cap [(2^k I_{v_i}) \times w_{v_i}] \neq \emptyset$ . Es evidente que  $(2^k I_u) \times w_u$  no corta a  $(2^k I_{v_0}) \times w_{v_0}, \dots, (2^k I_{v_{i-1}}) \times w_{v_{i-1}}$ , y por lo tanto  $u$  no se eligió en el paso  $i$ -ésimo ya que  $|I_u| \leq |I_{v_i}|$ . Poniendo  $v = v_i$  se tiene el resultado. ■

**Lema 3.2.2.** *Sea  $v \in \mathcal{V}_k$  y sean  $u, u' \in \mathcal{U}_k$  tales que  $u \sim v$  y  $u' \sim v$ . Entonces  $I_u \cap I_{u'} = \emptyset$  y ambos están contenidos en  $2^k I_v$ .*

**Demostración.** Como  $u$  y  $u'$  son maximales respecto de  $<$ , son incomparables, y por lo tanto se tiene que  $u \cap u' = \emptyset$ . Además, como  $[(2^k I_u) \times w_u] \cap [(2^k I_v) \times w_v] \neq \emptyset$  y  $|I_u| \leq |I_v|$ , necesariamente  $w_v \subseteq w_u$ . Análogamente ocurre para  $w_{v'}$ , de lo que

se deduce que  $w_v \subseteq w_u \cap w_{u'} \neq \emptyset$ . Usando que  $u$  y  $u'$  son disjuntos, obtenemos  $I_u \cap I_{u'} = \emptyset$  como queríamos demostrar. La hipótesis

$$[(2^k I_u) \times w_u] \cap [(2^k I_v) \times w_v] \neq \emptyset$$

implica que  $2^k I_u \subseteq 2^k I_v$  razonando con longitudes. Por lo tanto, podemos deducir que  $I_u \subseteq 2^k I_v$  y lo mismo para  $I_{u'}$ . ■

Usando los dos resultados anteriores tenemos

$$\sum_{u \in \mathcal{U}_k} |I_u| \leq \sum_{v \in \mathcal{V}_k} \sum_{\substack{u \in \mathcal{U}_k \\ u \sim v}} |I_u| \leq 2^k \sum_{v \in \mathcal{V}_k} |I_v|.$$

Además, como todo  $v \in \mathcal{V}_k$  está a su vez en  $\mathcal{U}_k$ , llegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \mathcal{U}_k} |I_u| &\leq 2^k \sum_{v \in \mathcal{V}_k} 8 \delta^{-1} |E|^{-1} 2^k (2^{k-2})^{-M} |E \cap N^{-1}(w_u) \cap 2^k I_v| \\ &\lesssim 2^{(2-M)k} \delta^{-1} \sum_{v \in \mathcal{V}_k} \frac{|E \cap N^{-1}(w_u) \cap 2^k I_v|}{|E|}. \end{aligned}$$

Por construcción, dados  $v, v' \in \mathcal{V}_k$  se tiene que  $[(2^k I_v) \times w_v] \cap [(2^k I_{v'}) \times w_{v'}] = \emptyset$  y por lo tanto o bien  $(2^k I_v) \cap 2^k I_{v'} = \emptyset$  o bien  $w_v \cap w_{v'} = \emptyset$ . En cualquier caso los conjuntos  $E \cap N^{-1}(w_v) \cap 2^k I_v$  y  $E \cap N^{-1}(w_{v'}) \cap 2^k I_{v'}$  son disjuntos, y como ambos están contenidos en  $E$ , se tiene

$$\sum_{u \in \mathcal{U}_k} |I_u| \lesssim 2^{(2-M)k} \delta^{-1}$$

y se demuestra el lema de la densidad.

### 3.3. El lema del tamaño

Sea  $\mathcal{S}$  un subconjunto finito de baldosas y sea  $\sigma = \text{tam}(\mathcal{S})$ . Vamos a construir una colección de árboles disjuntos  $\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}$  tal que

$$\mathcal{S}_{\text{large}} = \bigcup_{\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}} \mathbf{T} \quad \text{y además} \quad \sum_{\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}} |I_{\mathbf{T}}| \lesssim \sigma^{-2}. \quad (3.7)$$

Para ello, utilizaremos un procedimiento recursivo. Inicializamos  $\mathcal{S}^{\text{alm}} := \mathcal{S}$  y también

$$\mathfrak{T}_{\text{gra}} := \emptyset$$

$$\mathfrak{T}_{\text{gra}}^+ := \emptyset.$$

Repetiremos el proceso siempre que  $\text{tam}(\mathcal{S}^{\text{alm}}) > \frac{\sigma}{2}$ , ya que en caso contrario tendremos  $\text{tam}(\mathcal{S}^{\text{alm}}) \leq \frac{1}{2} \text{tam}(\mathcal{S})$  y bastará con definir  $\mathcal{S}_{\text{peq}} = \mathcal{S}^{\text{alm}}$ . A continuación describiremos cómo funciona este proceso. Mientras  $\text{tam}(\mathcal{S}^{\text{alm}}) > \frac{\sigma}{2}$ , elegimos un + árbol  $\mathbf{T}_+ \subseteq \mathcal{S}^{\text{alm}}$  tal que  $\Delta(\mathbf{T}_+) |I_{\mathbf{T}_+}|^{-1/2} > \frac{\sigma}{2}$ , es decir tal que

$$\sigma^2 |I_{\mathbf{T}_+}| < 4 \Delta(\mathbf{T}_+)^2. \quad (3.8)$$

Impondremos que  $I_{\mathbf{T}_+} \times w_{\mathbf{T}_+}$  sea maximal respecto de  $<$  de entre todos los árboles que cumplen (3.9). Además,  $c(w_{\mathbf{T}_+})$  ha de ser minimal en  $\mathbb{R}$  respecto de los centros de los árboles que verifican (3.9). Sea ahora  $\mathbf{T}$  el árbol maximal en  $\mathcal{S}^{\text{alm}}$  con punta  $I_{\mathbf{T}_+} \times w_{\mathbf{T}_+}$ , actualizamos

$$\mathcal{S}^{\text{alm}} := \mathcal{S}^{\text{alm}} - \mathbf{T}$$

$$\mathfrak{T}_{\text{gra}} := \mathfrak{T}_{\text{gra}} \cup \{\mathbf{T}\}$$

$$\mathfrak{T}_{\text{gra}}^+ := \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+ \cup \{\mathbf{T}_+\}.$$

Cuando  $\text{tam}(\mathcal{S}^{\text{alm}}) \leq \frac{\sigma}{2}$ , ponemos  $\mathcal{S}_{\text{peq}} := \mathcal{S}^{\text{alm}}$  y sólo hará falta probar que se cumple  $\text{cant}(\mathcal{S}_{\text{gra}}) \lesssim \text{tam}(\mathcal{S})^{-2}$ , que como ya sabemos es equivalente a la condición (3.7). Antes de eso, enunciaremos un lema con el que podremos ver ciertas propiedades importantes de la construcción que se ha descrito.

**Lema 3.3.1 (Disyunción fuerte).** *Sean  $\mathbf{T}_+^i$  y  $\mathbf{T}_+^j$  dos + árboles escogidos mediante el proceso inductivo, al cabo de  $i$  y  $j$  pasos respectivamente. Sean  $s \in \mathbf{T}_+^i$ ,  $s' \in \mathbf{T}_+^j$  tales que  $w_s \subseteq w_{s'}$ , entonces  $I_{s'} \cap I_{\mathbf{T}_+^i} = \emptyset$ . Mas aún, si  $s' \in \mathbf{T}_+^j$  y  $s'' \in \mathbf{T}_+^k$  son dos baldosas distintas tales que existe  $s \in \mathbf{T}_+^i$  con  $w_s \subseteq w_{s'} \cap w_{s''}$ , entonces  $I_{s'} \cap I_{s''} = \emptyset$ .*

**Demostración.** Por definición de + árbol, sabemos que  $w_{\mathbf{T}_+^j}^+ \subseteq w_{s'}^+$ . Además, por hipótesis  $w_s \subseteq w_{s'}$  así que  $w_{\mathbf{T}_+^i}^+ \subseteq w_{s'}^+$ . En esta situación se tiene  $c(w_{\mathbf{T}_+^i}^+) < c(w_{\mathbf{T}_+^j}^+)$ , y por minimalidad necesariamente  $i < j$ . Queremos comprobar que  $I_{s'} \cap I_{\mathbf{T}_+^i} = \emptyset$ , supongamos lo contrario. Teniendo en cuenta que  $\mathbf{T}_+^i = \mathbf{T}^i$  y utilizando las propiedades de los intervalos diádicos se deduce que  $I_{s'} \subseteq I_{\mathbf{T}_+^i}$ . Hemos llegado a que  $s' < I_{\mathbf{T}_+^i} \times w_{\mathbf{T}_+^i}$ , y por maximalidad de  $\mathbf{T}^i$  deberíamos tener  $s' \in \mathbf{T}^i$  que fue escogido antes. Esta contradicción se evita concluyendo que  $I_{s'} \cap I_{\mathbf{T}_+^i} = \emptyset$ .

Para el segundo resultado usaremos lo que acabamos de demostrar. Por hipótesis, para cierto  $s \in \mathbf{T}_+^i$  se tiene que  $w_s \subseteq w_{s'} \cap w_{s''}$ , por lo que obtenemos tres casos

distintos. Si  $w_{s'} \subseteq w_{s''}$ , por el apartado anterior  $I_{s''} \cap I_{\mathbf{T}_+^j} = \emptyset$  y consecuentemente  $I_{s''} \cap I_{s'} = \emptyset$ . Cuando  $w_{s''} \subseteq w_{s'}$  el razonamiento es análogo, así que sólo hará falta estudiar el caso  $w_{s'} = w_{s''}$ . Teniendo en cuenta que  $s' \neq s''$  y que  $|I_{s'}| = |I_{s''}|$  se concluye trivialmente que  $I_{s'} \cap I_{s''} = \emptyset$ . ■

Volvamos a la condición (3.7), por elección de los  $\mathbf{T}_+$  podemos escribir

$$\sigma^2 \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}| < \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} 4\Delta(\mathbf{T}_+)^2 \lesssim \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} \sum_{s \in \mathbf{T}_+} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2.$$

Por construcción los  $\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+$  son disjuntos, así que si definimos  $\mathcal{S}'$  como la unión de dichos  $\mathbf{T}_+$ , obtenemos

$$\sigma^2 \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}| \lesssim \sum_{s \in \mathcal{S}'} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 = \langle f | F \rangle$$

siendo  $F = \sum_{s \in \mathcal{S}'} \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s$ . Si utilizamos Cauchy-Schwarz y tenemos en cuenta que  $\|f\|_2 = 1$ , llegamos a

$$\sigma^2 \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}| \lesssim \|F\|_2.$$

Para concluir la demostración bastará con ver que se verifica

$$\|F\|_2^2 \lesssim \sigma^2 \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}|, \quad (3.9)$$

ya que entonces tendremos

$$\sigma^2 \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}| \lesssim \|F\|_2 \lesssim \left( \sigma^2 \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}| \right)^{1/2},$$

y por lo tanto  $\sigma \left( \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}| \right)^{1/2} \lesssim 1$ . Pero recordemos que en el proceso iterativo, para cada  $\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}$  existía un único  $\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+$  asociado tal que  $|I_{\mathbf{T}}| = |I_{\mathbf{T}_+}|$ , así que

$$\sum_{\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}} |I_{\mathbf{T}}| = \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}| \lesssim \sigma^{-2}$$

y el lema estaría demostrado. A partir de ahora nos centraremos en demostrar la acotación (3.9). Para ello, escribiremos

$$\begin{aligned} \|F\|_2^2 &= \left\langle \sum_{s \in \mathcal{S}'} \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \left| \sum_{s' \in \mathcal{S}'} \langle f | \varphi_{s'} \rangle \varphi_{s'} \right. \right\rangle \\ &\leq \sum_{s, s' \in \mathcal{S}'} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \\ &= \sum_{\substack{s, s' \in \mathcal{S}' \\ w_s = w_{s'}}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| + 2 \sum_{\substack{s, s' \in \mathcal{S}' \\ w_s \subsetneq w_{s'}}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle|. \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado que si  $w_s \cap w_{s'} = \emptyset$ , entonces  $\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle = 0$ . Acotaremos por separado cada uno de los sumandos de la última desigualdad.

**Lema 3.3.2.** *El primer sumando está acotado por*

$$\sum_{\substack{s,s' \in \mathcal{S}' \\ w_s = w_{s'}}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \sigma^2 \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}|.$$

**Demostración.** Reordenando adecuadamente los sumandos que aparecen, podemos acotar

$$\sum_{\substack{s,s' \in \mathcal{S}' \\ w_s = w_{s'}}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \leq \sum_{s \in \mathcal{S}'} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}' \\ w_s = w_{s'}}} |\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle|.$$

Utilizando la proposición 2.2.8, la última expresión está mayorada por

$$\sum_{s \in \mathcal{S}'} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}' \\ w_s = w_{s'}}} \left( \frac{|I_s|}{|I_{s'}|} \right)^{1/2} \int_{I_{s'}} \frac{|I_s|^{-1}}{\left(1 + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} dx.$$

Por otra parte, los  $s' \in \mathcal{S}'$  tales que  $w_s = w_{s'}$  tienen  $I_{s'}$  disjuntos. La suma de integrales queda acotada entonces por  $\|\text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^1 \chi\|_1 = \|\chi\|_1$ . Usando que  $|I_s| = |I_{s'}|$  la expresión inicial está acotada salvo constante por

$$\sum_{s \in \mathcal{S}'} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 = \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} \sum_{s \in \mathbf{T}_+} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 = \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} \Delta(\mathbf{T}_+)^2.$$

Obviamente  $\text{tam}(\mathcal{S}^{\text{alm}}) \leq \sigma$ , así que  $|I_{\mathbf{T}_+}|^{-1} \Delta(\mathbf{T}_+)^2 \leq \sigma^2$ , y por lo tanto

$$\sum_{\substack{s,s' \in \mathcal{S}' \\ w_s = w_{s'}}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \sigma^2 \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}|$$

como queríamos demostrar. ■

La acotación del segundo sumando es algo más complicada, y la dividiremos en varios pasos. Empezamos reordenando los sumandos

$$\sum_{\substack{s,s' \in \mathcal{S}' \\ w_s \subsetneq w_{s'}}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| = \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} \sum_{s \in \mathbf{T}_+} |\langle f | \varphi_s \rangle| \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}' \\ w_s \subsetneq w_{s'}}} |\langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle|.$$

Utilizamos Cauchy-Schwarz en cada uno de los factores junto con la definición de  $\Delta(\mathbf{T}_+)$ , la expresión anterior está acotada por

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} \left( \sum_{s \in \mathbf{T}_+} |\langle f | \varphi_s \rangle|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \left( \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}' \\ w_s \subsetneq w_{s'}}} |\langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} \Delta(\mathbf{T}_+) \left( \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \left( \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}' \\ w_s \subsetneq w_{s'}}} |\langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \right)^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} \sigma |I_{\mathbf{T}_+}|^{1/2} \left( \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \left( \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}' \\ w_s \subsetneq w_{s'}}} |\langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \right)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\text{tam}(\mathbf{T}_+) \leq \sigma$  y por tanto  $\Delta(\mathbf{T}_+)^2 \leq \sigma^2 |I_{\mathbf{T}_+}|$ . Supongamos demostrado

$$A = \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \left( \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}' \\ w_s \subsetneq w_{s'}}} |\langle f | \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \right)^2 \lesssim \sigma^2 |I_{\mathbf{T}_+}|. \quad (3.10)$$

Juntándolo todo, gracias a esta acotación y al lema 3.3.2 llegamos a

$$\|F\|_2^2 \lesssim \sigma^2 \sum_{\mathbf{T}_+ \in \mathfrak{T}_{\text{gra}}^+} |I_{\mathbf{T}_+}|$$

como buscábamos, y el lema del tamaño estaría demostrado. Para demostrar la desigualdad (3.10) es importante darse cuenta de que si  $w_s \subsetneq w_{s'}$  y  $\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle \neq 0$ , entonces se tiene  $w_s \subseteq w_{s'}^-$ . Además, si consideramos el conjunto unipuntual  $\{s'\}$ , es claro que

$$|I_{s'}|^{-1/2} |\langle f | \varphi_{s'} \rangle| = \text{tam}(\{s'\}) \leq \sigma.$$

Gracias a estas observaciones, hemos llegado a

$$A \leq \sigma^2 \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \left( \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}' \\ w_s \subseteq w_{s'}^-}} |I_{s'}|^{1/2} |\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \right)^2 = \sigma^2 B.$$

Para la desigualdad (3.10) bastará con ver que  $B \lesssim |I_{\mathbf{T}_+}|$ . Como  $|I_{s'}| \leq |I_s|$  podemos aplicar la proposición 2.2.8, que junto con la definición de  $\chi_{I_s}$  implica

$$|\langle \varphi_s | \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \left( \frac{|I_s|}{|I_{s'}|} \right)^{1/2} \int_{I_{s'}} \chi_{I_s}(x) dx.$$

Sustituyendo en la expresión que define  $B$  obtenemos

$$B \lesssim \sum_{s \in \mathbf{T}_+} |I_s| \left( \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}' \\ w_s \subseteq w_{s'}^-}} \int_{I_{s'}} \chi_{I_s}(x) dx \right)^2.$$

Podemos utilizar el lema 3.3.1, los  $s' \in \mathcal{S}'$  tales que  $w_s \subseteq w_{s'}^-$  verifican  $I_{s'} \cap I_{\mathbf{T}_+} = \emptyset$  y son disjuntos dos a dos. Por lo tanto para todos los  $s'$  que aparecen en la suma, se tiene  $I_{s'} \subseteq I_{\mathbf{T}_+}^c$ , así que

$$B \lesssim \sum_{s \in \mathbf{T}_+} |I_s| \left( \int_{I_{\mathbf{T}_+}^c} \chi_{I_s}(x) dx \right)^2 \leq \sum_{s \in \mathbf{T}_+} |I_s| \int_{I_{\mathbf{T}_+}^c} \chi_{I_s}(x) dx$$

ya que para  $M$  suficientemente grande, lo de dentro del paréntesis es menor que 1. Todos los  $s \in \mathbf{T}_+$  que aparecen en la suma cumplen  $|I_s| \leq |I_{\mathbf{T}_+}|$ , y de hecho existe

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $|I_s| = 2^{-k}|I_{\mathbf{T}_+}|$ . Esto último nos permite escribir

$$\begin{aligned} B &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_+ \\ |I_s|=2^{-k}|I_{\mathbf{T}_+}|}} |I_s| \int_{I_{\mathbf{T}_+}^c} \chi_{I_s}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{|I_{\mathbf{T}_+}|} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_+ \\ |I_s|=2^{-k}|I_{\mathbf{T}_+}|}} |I_s| \int_{I_{\mathbf{T}_+}^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} dx. \end{aligned}$$

Antes de seguir, necesitamos el lema técnico que enunciamos a continuación.

**Lema 3.3.3.** *Se verifica la siguiente acotación*

$$|I_s| \int_{I_{\mathbf{T}_+}^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} dx \lesssim \int_{I_s} \int_{I_{\mathbf{T}_+}^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{|I_s|}\right)^M} dx dy.$$

**Demostración.** Para demostrarlo, tomamos  $y \in I_s$  y utilizamos la propiedad triangular:

$$\frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|} \geq \frac{|x - y|}{|I_s|} - \frac{|y - c(I_s)|}{|I_s|} \geq \frac{|x - y|}{|I_s|} - \frac{1}{2}.$$

Podemos escribir entonces

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{|x-c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{|x-y|}{|I_s|}\right)^M} \lesssim \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{|I_s|}\right)^M}.$$

Como  $y$  es arbitrario, podemos utilizar el teorema del valor medio para integrales, con lo que

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{|x-c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} \lesssim \frac{1}{|I_s|} \int_{I_s} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{|I_s|}\right)^M} dy.$$

Integrando la expresión anterior en  $x \in I_{\mathbf{T}_+}^c$  se sigue el resultado.  $\blacksquare$

Usando el lema anterior y el hecho de que fijado  $k$ , los  $I_s$  son disjuntos y están contenidos en  $I_{\mathbf{T}_+}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} B &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{|I_{\mathbf{T}_+}|} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_+ \\ |I_s|=2^{-k}|I_{\mathbf{T}_+}|}} \int_{I_s} \int_{I_{\mathbf{T}_+}^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{|I_s|}\right)^M} dx dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{|I_{\mathbf{T}_+}|} \int_{I_{\mathbf{T}_+}} \int_{I_{\mathbf{T}_+}^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{2^{-k}|I_{\mathbf{T}_+}|}\right)^M} dx dy. \end{aligned}$$

Para acotar la integral doble haremos uso del siguiente lema, que enunciaremos en un contexto algo más general.

**Lema 3.3.4.** *Existe una constante  $C > 0$  tal que para cada intervalo  $J$  y cada  $b > 0$  se verifica*

$$\int_J \int_{J^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{b|J|}\right)^M} dx dy \leq Cb^2|J|^2.$$

**Demostración.** Trasladamos  $x \rightarrow x - c(J)$ ,  $y \rightarrow y - c(J)$  y efectuamos el cambio de variable, obtenemos los conjuntos  $I$  y  $I^c$  donde  $I = J - c(J) = (-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha)$  y hemos puesto  $\alpha = |J|$ . Por simetría, únicamente hará falta acotar la expresión

$$\int_I \int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\alpha b}\right)^M} dx dy \leq C\alpha^2 b^2$$

ya que el otro caso es análogo. En la situación que vamos a tratar se tiene que  $|x - y| = x - y$ . Para cada  $y \in I$ , haciendo el cambio de variable  $s = 1 + \frac{x-y}{\alpha b}$  podemos escribir una de las integrales como

$$\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x-y}{\alpha b}\right)^M} dx = \alpha b \int_{1+\frac{1}{2b}-\frac{y}{\alpha b}}^{\infty} \frac{1}{s^M} ds \lesssim \frac{\alpha b}{\left(1 + \frac{1}{2b} - \frac{y}{\alpha b}\right)^{M-1}}.$$

De nuevo hacemos otro cambio de variable, esta vez pondremos  $t = 1 + \frac{1}{2b} - \frac{y}{\alpha b}$  para obtener

$$\begin{aligned} \int_I \int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\alpha b}\right)^M} dx dy &\lesssim \int_I \frac{\alpha b}{\left(1 + \frac{1}{2b} - \frac{y}{\alpha b}\right)^{M-1}} dy \\ &= \alpha^2 b^2 \int_1^{1+\frac{1}{b}} \frac{1}{t^{M-1}} dt \\ &\lesssim \alpha^2 b^2 \end{aligned}$$

como estábamos buscando. ■

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para acotar  $B \lesssim |I_{\mathbf{T}_+}|$ . En efecto, utilizando el lema anterior

$$\begin{aligned} B &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{|I_{\mathbf{T}_+}|} \int_{I_{\mathbf{T}_+}} \int_{I_{\mathbf{T}_+}^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{2^{-k}|I_{\mathbf{T}_+}|}\right)^M} dx dy \\ &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^k |I_{\mathbf{T}_+}|^{-1} \left(2^{-k}|I_{\mathbf{T}_+}|\right)^2 \\ &\lesssim |I_{\mathbf{T}_+}|, \end{aligned}$$

que era lo único que faltaba para demostrar el lema del tamaño.



### 3.4. El lema del árbol

Dado un árbol  $\mathbf{T}$  buscamos obtener

$$\sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| \lesssim |I_{\mathbf{T}}| \text{tam}(\mathbf{T}) \text{den}(\mathbf{T}) |E|.$$

Para cada  $s \in \mathbf{T}$  existe  $\varepsilon_s \in \mathbb{C}$  de módulo 1 tal que

$$|\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| = \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle.$$

Podemos acotar entonces la expresión principal por

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| &= \sum_{s \in \mathbf{T}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \int_E \phi_s(x) dx \\ &\leq \int_E \left| \sum_{s \in \mathbf{T}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \phi_s(x) \right| dx, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\mathbf{T}$  es un conjunto finito de baldosas. Para manejar la última expresión, definimos

$$\mathcal{J}' = \{J \text{ diádico} : I_s \not\subseteq 3J \text{ para todo } s \in \mathbf{T}\}.$$

Como en la sección 3.2,  $3J$  denota el intervalo centrado en  $c(J)$  de longitud  $3|J|$ . Es claro que dado  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $J \in \mathcal{J}'$  suficientemente pequeño tal que  $x \in J$ . Si ponemos  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$  el subconjunto de elementos maximales respecto de la inclusión, entonces los intervalos de  $\mathcal{J}$  forman una partición de  $\mathbb{R}$ . Son disjuntos por las propiedades de los intervalos diádicos y la maximalidad. Con esto, tenemos

$$\sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| \leq \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_{J \cap E} \left| \sum_{s \in \mathbf{T}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \phi_s(x) \right| dx.$$

Separamos la suma en dos según la longitud de  $I_s$ , aplicando la desigualdad triangular

$$\sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f | \varphi_s \rangle \langle \phi_s | \mathbf{1}_E \rangle| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

donde hemos definido

$$\Sigma_1 = \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_{J \cap E} \left| \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq 2|J|}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \phi_s(x) \right| dx$$

$$\Sigma_2 = \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_{J \cap E} \left| \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| > 2|J|}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \phi_s(x) \right| dx.$$

Vamos a acotar por separado y salvo constante cada sumando por  $|I_{\mathbf{T}}| \text{tam}(\mathbf{T}) \text{den}(\mathbf{T}) |E|$ . Empezaremos por  $\Sigma_1$ , que de hecho es algo más sencillo.

Para cada  $s \in \mathbf{T}$  el conjunto  $s$  es un  $+$  árbol, así que si utilizamos la definición de tamaño

$$|I_s|^{-1/2} |\langle f | \varphi_s \rangle| = \text{tam}(\{s\}) \leq \text{tam}(\mathbf{T}).$$

Gracias a esta observación y usando que  $|\varepsilon_s| = 1$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq 2|J|}} |\langle f | \varphi_s \rangle| \int_{J \cap E} |\phi_s(x)| dx \\ &\leq \text{tam}(\mathbf{T}) \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq 2|J|}} \int_{J \cap E} |I_s|^{1/2} |\phi_s(x)| dx. \end{aligned}$$

Recordemos que  $\phi_s = (\mathbf{1}_{w_s^+} \circ N) \varphi_s$  siendo  $\varphi_s = \text{Mod}_{c(w_s^-)} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi$  y  $\varphi$  una función de Schwarz, así que para una constante adecuada

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq \text{tam}(\mathbf{T}) \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq 2|J|}} \int_{J \cap E \cap N^{-1}(w_s^+)} |I_s|^{1/2} |\varphi_s(x)| dx \\ &\lesssim \text{tam}(\mathbf{T}) \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq 2|J|}} \int_{J \cap E \cap N^{-1}(w_s^+)} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|}\right)^{2M}} dx. \end{aligned}$$

Intercalamos  $|I_s|$  y su inverso, tomamos supremos, y utilizamos que  $J \cap E \cap N^{-1}(w_s^+)$  está contenido en  $E \cap N^{-1}(w_s)$ . Salvo constante,  $\Sigma_1$  está acotado por

$$\text{tam}(\mathbf{T}) \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq 2|J|}} |I_s| \left( \sup_{x \in J} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} \right) \int_{E \cap N^{-1}(w_s)} \chi_{I_s}(x) dx$$

con  $\chi_{I_s}$  como en la sección 3.1. Por definición de  $\text{den}(\mathbf{T})$  podemos mayorar la integral por  $\text{den}(\mathbf{T})|E|$ , con lo que se obtiene

$$\Sigma_1 \lesssim \text{tam}(\mathbf{T}) \text{den}(\mathbf{T}) \left[ \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq 2|J|}} |I_s| \left( \sup_{x \in J} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} \right) \right] |E|.$$

Para terminar con la acotación de  $\Sigma_1$  bastará con demostrar que

$$\Sigma_{1,1} = \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq 2|J|}} |I_s| \left( \sup_{x \in J} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x - c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} \right) \lesssim |I_{\mathbf{T}}|.$$

Los  $s \in \mathbf{T}$  que aparecen en la suma cumplen  $|I_s| = 2^k < 2|J|$ , y además para cada  $x \in J$  se verifica  $|x - c(I_s)| \geq \text{dist}(J, I_s)$ , por lo que

$$\Sigma_{1,1} \leq \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{k \leq \log_2 2|J| \\ |I_s| = 2^k}} 2^k \sum_{s \in \mathbf{T}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\text{dist}(J, I_s)}{|I_s|}\right)^M}.$$

Por otra parte, para cada  $k$  los  $I_s$  con  $s \in \mathbf{T}$  y  $|I_s| = 2^k$  son disjuntos y están todos contenidos en  $I_{\mathbf{T}}$ , es decir

$$\frac{\text{dist}(J, I_s)}{|I_s|} \geq \frac{\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})}{|I_s|} \geq \frac{\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})}{|I_{\mathbf{T}}|}.$$

Sacando factor común en  $\Sigma_{1,1}$  se tiene

$$\Sigma_{1,1} \leq \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{k \leq \log_2 2|J|} \frac{2^k}{\left(1 + \frac{\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s|=2^k}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\text{dist}(J, I_s)}{|I_s|}\right)^{M/2}}. \quad (3.11)$$

A continuación demostraremos que la última suma está acotada por una constante.

**Lema 3.4.1.** *Para todo árbol  $\mathbf{T}$  y todo  $k$  entero, se cumple que*

$$\sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s|=2^k}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\text{dist}(J, I_s)}{|I_s|}\right)^{M/2}} \lesssim 1.$$

**Demostración.** En efecto, fijamos  $k$  entero y  $\mathbf{T}$  un árbol. Sea  $J \in \mathcal{J}$  y sea  $s \in \mathbf{T}$  cumpliendo  $|I_s| = 2^k \leq 2|J|$  y tal que  $I_s \not\subseteq 3J$ . Para cada  $m$  entero positivo existen a lo sumo dos baldosas (una a cada lado) tales que

$$m|I_s| \leq \text{dist}(J, I_s) < (m+1)|I_s|,$$

así que la suma queda acotada por

$$\sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s|=2^k}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\text{dist}(J, I_s)}{|I_s|}\right)^{M/2}} \leq 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1+m)^{M/2}} \lesssim 1$$

■

Usando el resultado anterior y sumando en  $k$ , la expresión (3.11) se convierte en

$$\Sigma_{1,1} \lesssim \sum_{J \in \mathcal{J}} \frac{|J|}{\left(1 + \frac{\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}}.$$

A partir de aquí, y teniendo en cuenta que  $J$  y  $|I_{\mathbf{T}}|$  son intervalos diádicos, pueden ocurrir dos casos distintos. En el primer caso tendremos  $J \cap I_{\mathbf{T}} = \emptyset$ , y en el segundo caso  $J \subseteq I_{\mathbf{T}}$ . El caso  $I_{\mathbf{T}} \subseteq J$  queda descartado ya que tendríamos  $I_{\mathbf{T}} \subseteq 3J$ , que contradice la hipótesis.

Supongamos primero que  $J \cap I_{\mathbf{T}} = \emptyset$ . Si tuviéramos  $|I_{\mathbf{T}}| \leq |J|$ , entonces necesariamente  $I_{\mathbf{T}} \cap 3J = \emptyset$  y por lo tanto  $|J| \leq \text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})$ . En cualquier caso  $|J| \leq \text{dist}(J, I_{\mathbf{T}}) + |I_{\mathbf{T}}|$ , por lo que si  $x \in J$  se tiene

$$|x - c(I_{\mathbf{T}})| \leq |J| + \text{dist}(J, I_{\mathbf{T}}) + \frac{1}{2}|I_{\mathbf{T}}| \leq 2\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}}) + \frac{3}{2}|I_{\mathbf{T}}|.$$

Gracias a esta desigualdad tenemos

$$\int_J \frac{1}{\left(1 + \frac{|x - c(I_{\mathbf{T}})|}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}} dx \geq \int_J \frac{1}{\left(\frac{5}{2} + \frac{2\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}} dx = \frac{|J|}{\left(\frac{5}{2}\right)^{M/2} \left(1 + \frac{4}{5} \frac{\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}},$$

y consecuentemente

$$\frac{|J|}{\left(1 + \frac{\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}} \lesssim \int_J \frac{1}{\left(1 + \frac{|x - c(I_{\mathbf{T}})|}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}} dx. \quad (3.12)$$

Para el caso  $J \subseteq I_{\mathbf{T}}$  el razonamiento es algo más sencillo. Basta con darse cuenta de que

$$\int_J \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-c(I_{\mathbf{T}})|}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}} dx \geq \frac{|J|}{\left(\frac{3}{2}\right)^{M/2}} \gtrsim \frac{|J|}{\left(1 + \frac{\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}},$$

con lo que se llega a la misma cota de antes (3.12). Recapitulando, podemos concluir la parte de la demostración relativa a  $\Sigma_{1,1}$  ya que

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,1} &\lesssim \sum_{J \in \mathcal{J}} \frac{|J|}{\left(1 + \frac{\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}})}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}} \\ &\lesssim \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_J \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-c(I_{\mathbf{T}})|}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}} dx \\ &= |I_{\mathbf{T}}| \int_{\mathbb{R}} \frac{|I_{\mathbf{T}}|^{-1}}{\left(1 + \frac{|x-c(I_{\mathbf{T}})|}{|I_{\mathbf{T}}|}\right)^{M/2}} dx \\ &\lesssim |I_{\mathbf{T}}|, \end{aligned}$$

donde hemos usado que la integral es realmente  $\|\text{Tr}_{c(I_{\mathbf{T}})} \text{Dil}_{|I_{\mathbf{T}}|}^1 \chi'\|_1 = \|\chi'\|_1 = C_M$ , siendo  $\chi'$  una función similar a  $\chi$  pero con  $M/2$  en el exponente. Como buscábamos, hemos obtenido

$$\Sigma_1 \lesssim |I_{\mathbf{T}}| \text{tam}(\mathbf{T}) \text{den}(\mathbf{T}) |E|$$

Volvamos ahora al otro sumando, recordemos que  $\Sigma_2$  venía dado por

$$\Sigma_2 = \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_{J \cap E} \left| \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| > 2|J|}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \phi_s(x) \right| dx.$$

Supondremos que existe al menos una baldosa  $s \in \mathbf{T}$  tal que  $|I_s| > 2|J|$ , entonces se verifica el siguiente lema.

**Lema 3.4.2.** *En las condiciones anteriores se tiene que  $J \subseteq 3I_{\mathbf{T}}$ .*

**Demostración.** Razonaremos por contradicción, supongamos que  $J \not\subseteq 3I_{\mathbf{T}}$ . Por lo anterior es claro que  $|J| < |I_{\mathbf{T}}|$ , y además pueden ocurrir dos casos. Si  $J \cap 3I_{\mathbf{T}} = \emptyset$  podemos escoger  $J' \supsetneq J$  que cumpla  $3J' \not\subseteq I_{\mathbf{T}}$ , lo que contradice la maximalidad. Supongamos por el contrario que  $J \cap 3I_{\mathbf{T}} \neq \emptyset$ . Como  $3I_{\mathbf{T}}$  es la unión disjunta de tres intervalos diádicos, utilizando las propiedades ya conocidas llegamos a  $J \subseteq 3I_{\mathbf{T}}$ . ■

Más adelante sacaremos más partido a este lema. Ahora descomponemos  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \uplus \mathbf{T}_2$  donde  $\mathbf{T}_2$  es el + árbol de todos los  $s \in \mathbf{T}$  tales que  $w_{\mathbf{T}}^+ \subseteq w_s^+$  y  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T} - \mathbf{T}_2$  es un - árbol sin punta. Por la propiedad triangular,  $\Sigma_2$  es menor o igual que

$$\sum_{J \in \mathcal{J}} \int_{J \cap E} \left| \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_1 \\ |I_s| > 2|J|}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \phi_s(x) \right| dx + \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_{J \cap E} \left| \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_2 \\ |I_s| > 2|J|}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \phi_s(x) \right| dx.$$

Llamaremos  $\Sigma_{2,1}$  al primer sumando y  $\Sigma_{2,2}$  al segundo. Empecemos por  $\Sigma_{2,1}$ , por definición de  $\phi_s$  tenemos

$$\Sigma_{2,1} = \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_J \left| \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_1 \\ |I_s| > 2|J|}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(x) \mathbf{1}_{E \cap N^{-1}(w_s^+)}(x) \right| dx = \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_J |F_{1J}(x)| dx.$$

Definimos el conjunto  $G_J$  según la expresión

$$G_J = J \cap \left( \bigcup_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| > 2|J|}} E \cap N^{-1}(w_s^+) \right).$$

Supongamos que  $x \in J$  es tal que  $x \notin G_J$ , entonces para todo  $s \in \mathbf{T}$  con  $|I_s| > 2|J|$  tenemos  $x \notin E \cap N^{-1}(w_s^+)$  y por tanto  $F_{1J}(x) = 0$ . Hemos demostrado que  $J \cap \text{sop}(F_{1J}) \subseteq G_J$  y por lo tanto

$$\int_J |F_{1J}(x)| dx = \int_{G_J} |F_{1J}(x)| dx \leq \|F_{1J}\|_{L^\infty(J)} |G_J|,$$

donde

$$\|F_{1J}(x)\|_{L^\infty(J)} = \left\| \sum_{k > \log_2 2|J|} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_1 \\ |I_s| > 2|J|}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E \cap N^{-1}(w_s^+)} \right\|_{L^\infty(J)}.$$

**Lema 3.4.3.** Sean  $s, s' \in \mathbf{T}_1$  tales que  $|I_s| \neq |I_{s'}|$ , entonces  $w_s^+ \cap w_{s'}^+ = \emptyset$ .

**Demostración.** Como  $s, s' < I_{\mathbf{T}} \times w_{\mathbf{T}}$ , obviamente  $w_{\mathbf{T}} \subseteq w_s \cap w_{s'} \neq \emptyset$ . Por las propiedades de los intervalos diádicos, sin pérdida de generalidad  $w_s \subseteq w_{s'}$ . Supongamos que  $w_s \subseteq w_{s'}^-$ , entonces es evidente que  $w_s^+ \cap w_{s'}^+ = \emptyset$ .

En caso contrario  $w_s \subseteq w_{s'}^+$ , y como  $s \in \mathbf{T}_1$  sabemos que  $w_{\mathbf{T}}^+ \not\subseteq w_s^+$ . Por otra parte  $w_{\mathbf{T}}^+ \subseteq w_s$ , así que necesariamente  $w_{\mathbf{T}}^+$  está contenido en  $w_s^-$ . Por lo tanto

$$w_{\mathbf{T}}^+ \subseteq w_s^- \subseteq w_s \subseteq w_{s'}^+$$

lo que implica que  $s' \in \mathbf{T}_2$ , que contradice nuestra hipótesis.  $\blacksquare$

Con este hecho podemos deducir que los conjuntos  $E \cap N^{-1}(w_s^+)$  son disjuntos dos a dos, luego

$$\begin{aligned} \|F_{1J}(x)\|_{L^\infty(J)} &\leq \sup_{k > \log_2 2|J|} \left\| \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_1 \\ |I_s| > 2|J|}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E \cap N^{-1}(w_s^+)} \right\|_{L^\infty(J)} \\ &\leq \sup_{k > \log_2 2|J|} \left( \sup_{x \in J} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_1 \\ |I_s| > 2|J|}} |\langle f | \varphi_s \rangle| |\varphi_s(x)| \right) \\ &\lesssim \sup_{k > \log_2 2|J|} \left( \sup_{x \in J} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_1 \\ |I_s| > 2|J|}} |I_s|^{1/2} \text{tam}(\mathbf{T}) \frac{|I_s|^{-1/2}}{\left(1 + \frac{|x-c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} \right) \\ &\lesssim \text{tam}(\mathbf{T}) \sup_{k > \log_2 2|J|} \left( \sup_{x \in J} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_1 \\ |I_s| > 2|J|}} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-c(I_s)|}{|I_s|}\right)^M} \right), \end{aligned}$$

y esta expresión está acotada salvo constante por  $\text{tam}(\mathbf{T})$  utilizando un razonamiento análogo al que se hizo al final de la proposición 2.3.4. Hemos llegado a la desigualdad

$$\int_J |F_{1J}(x)| dx \lesssim \text{tam}(\mathbf{T}) |G_J|.$$

Supongamos que se tiene  $|G_J| \lesssim |E| \text{den}(\mathbf{T}) |J|$  con cota independiente de  $J \in \mathcal{J}$ , entonces

$$\Sigma_{2,1} \lesssim \text{tam}(\mathbf{T}) \text{den}(\mathbf{T}) |E| \sum_{J \in \mathcal{J}} |J|.$$

Por el resultado visto en el lema 3.4.2 y como los  $J$  son disjuntos, la suma está acotada por  $3|I_{\mathbf{T}}|$ , con lo que llegaríamos a

$$\Sigma_{2,1} \lesssim |I_{\mathbf{T}}| \text{tam}(\mathbf{T}) \text{den}(\mathbf{T}) |E|,$$

y habríamos terminado la acotación del sumando  $\Sigma_{2,1}$ .

**Lema 3.4.4.** *Para cada  $J \in \mathcal{J}$  se tiene que  $G_J \lesssim |E| \text{den}(\mathbf{T}) |J|$ .*

**Demostración.** Sea  $J \in \mathcal{J}$ , por construcción existe un único intervalo diádico  $\tilde{J}$  de longitud  $2|J|$  que contiene a  $J$ . Por maximalidad de  $J$ ,  $\tilde{J}$  no puede pertenecer a  $\mathcal{J}'$  y por lo tanto existe  $s_J \in \mathbf{T}$  tal que  $I_{s_J} \subseteq 3\tilde{J}$ .

Supongamos que  $I_{s_J}$  y  $\tilde{J}$  tienen intersección no vacía. Descartamos el caso en el que  $I_{s_J} \subseteq \tilde{J} \subseteq 3J$  ya que entonces  $J$  no pertenecería a  $\mathcal{J}'$ . Nos quedamos con la situación  $\tilde{J} \subseteq I_{s_J} \subseteq 3\tilde{J}$ , que implica que  $I_{s_J} = (\tilde{J} - |\tilde{J}|) \cup \tilde{J}$  o bien  $I_{s_J} = \tilde{J} \cup (\tilde{J} + |\tilde{J}|)$ . Los dos casos son similares, definimos  $u_J = s_J$  quedando

$$|I_{u_J}| = |I_{s_J}| = 2|\tilde{J}| = 4|J| \quad \text{así como} \quad |w_{u_J}| = \frac{1}{4} |J|^{-1}.$$

Además, dado  $x \in J$  se verifica

$$|x - c(I_{u_J})| \leq |\tilde{J}| = 2|J| \leq |I_{u_J}|.$$

Supongamos ahora que  $I_{s_J}$  y  $\tilde{J}$  son disjuntos. Es evidente que dada esta condición, o bien  $I_{s_J} \subseteq \tilde{J} - |\tilde{J}|$  o bien  $I_{s_J} \subseteq \tilde{J} + |\tilde{J}|$ . Supondremos sin pérdida de generalidad que se da la primera situación. Usando que  $I_{s_J} \subseteq I_{\mathbf{T}}$  se tiene que  $I_{\mathbf{T}} \cap (\tilde{J} - |\tilde{J}|) \neq \emptyset$ . Usando que  $|\tilde{J}| = 2|J| < |I_{\mathbf{T}}|$  se deduce que  $\tilde{J} - |\tilde{J}|$  está contenido en  $I_{\mathbf{T}}$ . Definimos una baldosa  $u_J \in \mathcal{T}$  con  $I_{u_J} = \tilde{J} - |\tilde{J}|$  y tal que  $w_{u_J} \subseteq w_{s_J}$ . Ahora tenemos

$$|I_{u_J}| = |\tilde{J}| = 2|J| \quad \text{y también} \quad |w_{u_J}| = \frac{1}{2} |J|^{-1}.$$

Además, para los  $x \in J$  se cumple

$$|x - c(I_{u_J})| \leq 2|\tilde{J}| = 2|I_{u_J}|.$$

Recapitulando, en cualquiera de los casos existe una baldosa  $u_J$  con  $s_J < u_J < I_{\mathbf{T}} \times w_{\mathbf{T}}$  y tal que  $|w_{u_J}| \geq \frac{1}{4} |J|^{-1}$ . Por definición de densidad

$$|E| \text{den}(\mathbf{T}) = \sup_{s \in \mathbf{T}} \sup_{s < u} \int_{E \cap N^{-1}(w_u)} \chi_{I_u}(x) dx \geq \int_{J \cap E \cap N^{-1}(w_{u_J})} \chi_{I_{u_J}}(x) dx.$$

Utilizando que en ambos casos  $|x - c(I_{u_J})| \leq 2|I_{u_J}|$  y recordando la definición de  $\chi_{I_{u_J}}$  obtenemos

$$|E| \operatorname{den}(\mathbf{T}) \geq \int_{J \cap E \cap N^{-1}(w_{u_J})} \frac{|I_{u_J}|^{-1}}{3^M} dx \gtrsim |I_{u_J}|^{-1} |J \cap E \cap N^{-1}(w_{u_J})|.$$

Falta ver que  $G_J \subseteq J \cap E \cap N^{-1}(w_{u_J})$ . Sea  $x \in G_J$  tal que  $x \notin J$ , entonces existe  $s \in \mathbf{T}$  con  $|I_s| > 2|J|$  y tal que  $x \in E \cap N^{-1}(w_s^+)$ . Sabemos que  $|w_s| < \frac{1}{2}|J|^{-1}$ , y por ser diádico

$$|w_s| \leq \frac{1}{4}|J|^{-1} \leq |w_{u_J}|.$$

Teniendo en cuenta que  $w_{\mathbf{T}} \subseteq w_s \cap w_{u_J}$  podemos deducir que  $w_s \subseteq w_{u_J}$  y consecuentemente  $x \in E \cap N^{-1}(w_{u_J})$ . Ya tenemos demostrado que se da la inclusión  $G_J \subseteq J \cap E \cap N^{-1}(w_{u_J})$  que nos permite poner

$$|E| \operatorname{den}(\mathbf{T}) \gtrsim |I_{u_J}|^{-1} |G_J|.$$

Despejando  $|G_J|$  llegamos a la expresión

$$|G_J| \lesssim |E| \operatorname{den}(\mathbf{T}) |I_{u_J}| \lesssim |E| \operatorname{den}(\mathbf{T}) |J|,$$

ya que en cualquiera de los dos casos se cumple que  $|I_{u_J}| \leq 4|J|$ .  $\blacksquare$

Para demostrar el lema del árbol únicamente hace falta acotar el sumando  $\Sigma_{2,2}$ , que viene dado por

$$\Sigma_{2,2} = \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_J |F_{2J}(x)| dx$$

donde

$$F_{2J}(x) = \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_2 \\ |I_s| > 2|J|}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(x) \mathbf{1}_{E \cap N^{-1}(w_s^+)}(x).$$

Para cada  $x \in J$  tal que  $F_{2J}(x) \neq 0$  existe  $s \in \mathbf{T}_2$  con  $|I_s| > 2|J|$  y tal que  $N(x) \in w_s^+$ . Como  $\mathbf{T}_2$  es un  $+$  árbol los  $w_s^+$  están anidados, y dado  $x \in J$  existe un  $w_{v_x}$  mínimo y un  $w_{u_x}$  máximo tales que para cada  $s \in \mathbf{T}_2$  con  $|I_s| > 2|J|$  se cumple

$$N(x) \in w_s^+ \iff w_{v_x} \subseteq w_s \subseteq w_{u_x}.$$

Obviamente, hemos escogido  $u_x$  y  $v_x$  de entre las baldosas de  $\mathbf{T}_2$  tales que  $|I_{u_x}|$  y  $|I_{v_x}|$  son mayores que  $2|J|$ . Gracias a estas observaciones podemos escribir

$$F_{2J}(x) = \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_2 \\ w_{v_x} \subseteq w_s \subseteq w_{u_x}}} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(x) \mathbf{1}_E(x).$$

Sea  $\psi$  función de Schwartz tal que  $\widehat{\psi}(\xi)$  está soportada en  $|\xi| \leq 1 + \frac{1}{100}$  y tal que  $\widehat{\psi}(\xi) = 1$  para  $|\xi| \leq 1$ .

**Lema 3.4.5.** *Sea  $z \in \mathbb{R}$  y supongamos que  $w_{v_x} \subseteq w_s \subseteq w_{u_x}$ , entonces*

$$\varphi_s(z) = \varphi_s * \left( \frac{\operatorname{Mod}_{c(w_{u_x})} \operatorname{Dil}_{|w_{u_x}|^{-1}}^2 \psi}{|w_{u_x}|^{-1/2}} - \frac{\operatorname{Mod}_{c(w_{v_x}^+)} \operatorname{Dil}_{|w_{v_x}^+|^{-1}}^2 \psi}{|w_{v_x}^+|^{-1/2}} \right) (z).$$

**Demostración.** En efecto, como estamos en funciones de Schwartz, basta probarla igualdad para las transformadas. Utilizando la proposición 2.2.2 llegamos a

$$\widehat{\varphi}_s(\xi) = \widehat{\varphi}_s(\xi) \left( \widehat{\psi}\left(\frac{\xi - c(w_{u_x})}{|w_{u_x}|}\right) - \widehat{\psi}\left(\frac{\xi - c(w_{v_x^+})}{|w_{v_x^+}|}\right) \right).$$

Para que se verifique la igualdad anterior, en los puntos  $\xi \in \text{sop}(\widehat{\varphi}_s)$  se exige que

$$\widehat{\psi}\left(\frac{\xi - c(w_{u_x})}{|w_{u_x}|}\right) - \widehat{\psi}\left(\frac{\xi - c(w_{v_x^+})}{|w_{v_x^+}|}\right) = 1. \quad (3.13)$$

Escogemos  $\xi \in \text{sop}(\widehat{\varphi}_s)$ , es decir  $|\xi - c(w_s^-)| \leq \frac{1}{8}|w_s|$ . Probaremos que el primer sumando de la anterior igualdad es idénticamente 1. Utilizando la desigualdad triangular junto a  $w_s \subseteq w_{u_x}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{|\xi - c(w_{u_x})|}{|w_{u_x}|} &\leq \frac{|\xi - c(w_s^-)|}{|w_{u_x}|} + \frac{|c(w_s^-) - c(w_{u_x})|}{|w_{u_x}|} \\ &\leq \frac{|\xi - c(w_s^-)|}{|w_s|} + \frac{|c(w_s^-) - c(w_{u_x})|}{|w_{u_x}|} \\ &\leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por definición de  $\psi$  deducimos que  $\widehat{\psi}\left(\frac{\xi - c(w_{u_x})}{|w_{u_x}|}\right) = 1$ , y sólo hará falta comprobar que el segundo sumando de (3.13) es idénticamente nulo. De nuevo por la desigualdad triangular

$$\frac{|\xi - c(w_{v_x^+})|}{|w_{v_x^+}|} \geq \frac{1}{8} \frac{|w_s|}{|w_{v_x^+}|} + \frac{1}{2} \frac{|w_{v_x}|}{|w_{v_x^+}|} \geq \frac{1}{8} + 1,$$

con lo que se concluye que  $\widehat{\psi}\left(\frac{\xi - c(w_{v_x^+})}{|w_{v_x^+}|}\right) = 0$  y el lema queda demostrado.  $\blacksquare$

Poniendo  $x = z$  en el lema que acabamos de demostrar, tenemos  $F_{2J}$  definido por la expresión

$$\left( \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \right) * \left( \frac{\text{Mod}_{c(w_{u_x})} \text{Dil}_{|w_{u_x}|^{-1}}^2 \psi}{|w_{u_x}|^{-1/2}} - \frac{\text{Mod}_{c(w_{v_x^+})} \text{Dil}_{|w_{v_x^+}|^{-1}}^2 \psi}{|w_{v_x^+}|^{-1/2}} \right) (x) \mathbf{1}_E(x).$$

Tomando módulos en la expresión anterior

$$\begin{aligned} |F_{2J}(x)| &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(y) \right| \left( \frac{|\psi\left(\frac{x-y}{|w_{u_x}|^{-1}}\right)|}{|w_{u_x}|^{-1}} + \frac{|\psi\left(\frac{x-y}{|w_{v_x^+}|^{-1}}\right)|}{|w_{v_x^+}|^{-1}} \right) dy \right] \mathbf{1}_E(x) \\ &\lesssim \sup_{\delta \geq |w_{u_x}|^{-1}} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(y) \right| \frac{1}{\delta} \left| \psi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \right| dy, \end{aligned}$$

donde se ha usado que  $|w_{v_x^+}|^{-1} > |w_{u_x}|^{-1}$ . Además, como  $|w_{u_x}|^{-1} > 2|J|$  y por lo tanto mayor o igual que  $4|J|$  obtenemos

$$|F_{2J}(x)| \lesssim \sup_{\delta \geq 4|J|} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(y) \right| \frac{1}{\delta} \left| \psi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \right| dy.$$



Estamos ante la convolución de una función con dilataciones de cierto núcleo  $\psi$ , que es función de Schwarz. Por la desigualdad (1.25) podemos escribir

$$|F_{2J}(x)| \lesssim \sup_{\delta \geq 4|J|} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(y) \right| dy.$$

Tomamos supremos en  $x \in J$  y usamos la proposición 1.3.5

$$\|F_{2J}\|_{L^\infty(J)} = \sup_{x \in J} |F_{2J}(x)| \lesssim \inf_{x \in J} \sup_{\delta \geq 4|J|} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(y) \right| dy.$$

Ya tenemos las herramientas necesarias para completar la demostración. Como antes,  $F_{2J}$  está soportada en  $G_J$ , así que si usamos el lema 3.4.4 queda

$$\begin{aligned} \Sigma_{2,2} &\leq \sum_{J \in \mathcal{J}} \|F_{2J}\|_{L^\infty(J)} |G_J| \\ &\lesssim |E| \operatorname{den}(\mathbf{T}) \sum_{J \in \mathcal{J}} |J| \left( \inf_{x \in J} \sup_{\delta \geq 4|J|} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(y) \right| dy \right) \\ &\leq |E| \operatorname{den}(\mathbf{T}) \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_J \left( \sup_{\delta \geq 4|J|} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s(y) \right| dy \right) dx \\ &\leq |E| \operatorname{den}(\mathbf{T}) \left\| M \left( \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \right) \right\|_{L^1(3I_{\mathbf{T}})}, \end{aligned}$$

ya que todos los  $J \in \mathcal{J}$  son disjuntos y por la proposición (3.4.2) están contenidos en  $3I_{\mathbf{T}}$ . Como se ve en el primer capítulo el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado en  $L^2(\mathbb{R})$ , y por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left\| M \left( \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \right) \right\|_{L^1(3I_{\mathbf{T}})} &\leq \| \mathbf{1}_{3I_{\mathbf{T}}} \|_2 \left\| M \left( \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \right) \right\|_2 \\ &\lesssim |I_{\mathbf{T}}|^{1/2} \left\| \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \right\|_2. \end{aligned}$$

Además, por un razonamiento análogo al utilizado para probar que  $Q_{(0)}$  era un operador acotado

$$\left\| \sum_{s \in \mathbf{T}_2} \varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle \varphi_s \right\|_2 \lesssim \left( \sum_{s \in \mathbf{T}_2} |\varepsilon_s \langle f | \varphi_s \rangle|^2 \right)^{1/2}.$$

Como  $\varepsilon_s$  tiene módulo 1, juntándolo todo y utilizando la definición de tamaño, podemos concluir

$$\Sigma_{2,2} \lesssim |I_{\mathbf{T}}| \operatorname{tam}(\mathbf{T}) \operatorname{den}(\mathbf{T}) |E|,$$

con lo que se demuestra el lema del árbol.



# Bibliografía

- [AC] Pascal Auscher and María J. Carro. *On relations between operators on  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{T}^n$ , and  $\mathbb{Z}^n$* . *Studia Mathematica*, (101):165–182, 1992.
- [C] Lennart Carleson. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*. *Acta Mathematica*, (116):135–157, 1966.
- [D] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2001.
- [dL] Karel de Leeuw. *On  $L^p$  multipliers*. *Annals of Mathematics*, 91:364–379, 1965.
- [dR] Juan Arias de Reyna. *Pointwise convergence of Fourier series*. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2002.
- [Fe] Charles Fefferman. *Pointwise convergence of Fourier series*. *Annals of Mathematics*, 98(3):551–571, 1973.
- [Fo] Gerald B. Folland. *Real analysis, modern techniques and their applications*. *Wiley Series in Pure and Applied Mathematics*, 2nd edition, 1999.
- [Fr] David H. Fremlin. *Measure theory*, volume 2. Torres Fremlin, 2nd edition, 2010.
- [G1] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2008.
- [G2] Loukas Grafakos. *Modern Fourier Analysis*. *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2009.
- [H] Richard A. Hunt. *On the convergence of Fourier series*. *Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues*, 1968.
- [JM] Ole G. Jørsboe and Leif Mejlbro. *The Carleson-Hunt theorem on Fourier series*. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1982.
- [K] Jean P. Kahane. *Sommes partielles des séries de Fourier*. *Séminaire Bourbaki*, (9), 1995.
- [KT] Carlos E. Kenig and Peter A. Tomas. *Maximal operators defined by Fourier multipliers*. *Studia Mathematica*, (68):79–83, 1980.
- [La] Michael T. Lacey. *Carleson’s theorem: Proof, complements, variations*. (arXiv.org, math.CA/0307008v4), 2005.

- 
- [Li] Victor Lie. *The (weak- $L^2$ ) boundedness of the quadratic Carleson operator*. Geometric and Functional Analysis, (19):457–497, 2009.
- [LT] Michael T. Lacey and Christoph Thiele. *A proof of boundedness of the Carleson operator*. Mathematical Research Letters, (7):361–370, 2000.
- [P] Mark A. Pinsky. *Introduction to Fourier analysis and wavelets*, volume 102 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2002.
- [S1] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press, 1970.
- [S2] Elias M. Stein. *Harmonic analysis: Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*. Princeton University Press, 1993.
- [SS1] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis, an introduction*, volume I. Princeton University Press, 2002.
- [SS2] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis: Measure theory, integration and Hilbert spaces*, volume III. Princeton University Press, 2005.
- [SW] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, 1971.