POSIBLES RESPUESTAS al examen del X 16/ 1/ 2013 (ver los enunciados a la vuelta)

---

1. (a) Si llamamos s_n a la suma dada, es: $\dfrac{7}{12} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = s_2$, y además:
$$s_n - s_{n-1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} > \frac{2}{2n} - \frac{1}{n} = 0 \text{ , luego } s_{n-1} \geq \frac{7}{12} \;\Rightarrow\; s_n \geq \frac{7}{12} \ .$$
(b) Esta vez, la suma es $< n\,\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}$, porque hay n sumandos $< \dfrac{1}{n^2}$.
Como $\dfrac{1}{n} \to 0$, ningún $c > 0$ cumple lo pedido.

---

2. (a) Llamando P a la afirmación *“ n es suma de dos cuadrados”* y Q a la “ $n \equiv -1 \bmod(4)$”, la afirmación de (a) es: $\boxed{\text{P} \Rightarrow \text{no Q}}$, la de A1) es: $\boxed{\text{no P} \Rightarrow \text{Q}}$, y la de A2) es: $\boxed{\text{Q} \Rightarrow \text{no P}}$, que equivale a la de (a), porque ambas dicen que $\boxed{\text{P}\wedge\text{Q es falsa}}$. Pero A1 **no equivale** a estas dos:
(b) ... porque es **falsa**: por ejemplo 6 no es suma de dos cuadrados, pero $6 \not\equiv -1 \bmod(4)$.
Y en cambio A2 es cierta, porque todo cuadrado es $\equiv 0$ ó $1 \bmod(4)$, y no es posible obtener 3, es decir $-1 \bmod(4)$ como suma de dos números que sean 0 ó 1.

---

3. El conjunto de (a) es equipotente al de las partes finitas de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, haciendo corresponder cada sucesión con el conjunto de índices j con $m_j = 1$. Y ese conjunto de partes finitas **sí es numerable**; por ejemplo, como hay un número finito de ellas con suma dada S , es posible ordenarlas numerando primero las de suma 0, a continuación las de suma 1, etc., y así llegamos a numerarlas todas.

El de (b) **no es numerable**, porque con la misma correspondencia: esta vez al conjunto de índices j con $m_j = 2$, salen todas las partes de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, y ese conjunto, como sabemos, es **no numerable**, por el argumento diagonal de Cantor.

En el caso (c), cada sucesión está formada por “bloques sucesivos” de n ceros o unos, con $n = 1$ ó 2 , luego si seleccionamos las que empiecen por un bloque de ceros, podemos aplicarlas biyectivamente sobre el conjunto de sucesiones de números $n_j = 1$ ó 2, que es **no numerable**, como en el caso anterior.
Por lo tanto, también lo es el conjunto de todas estas sucesiones.

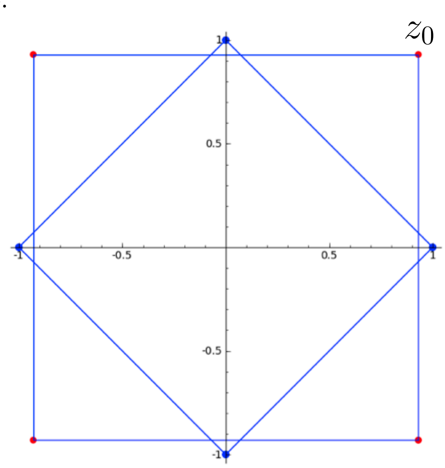
---

4. (a) Se tiene que $104 \equiv 401 \equiv 5 \bmod(9)$. Además, $\varphi(9) = 6$, y se tiene $104 \equiv 2 \bmod(6)$, $401 \equiv 5 \bmod(6)$.
Con todo ello y el teorema de Fermat-Euler: $104^{401} + 401^{104} \equiv 5^5 + 5^2 = 5^2(1+5^3) \equiv 0 \bmod(9)$, porque $1 + 5^3 = 126 = 14 \cdot 9$.
(b) No, porque es suma de par+impar = impar.

---

5. (a) La ecuación sólo tiene sentido si $z \neq 0$, y equivale entonces a $2w + w^2 = 3$, con $w = z^4$. Como las soluciones de $2w + w^2 = 3$ son dos: w_1, w_2, distintas de cero, cada una tiene 4 raíces cuartas, y las de w_1 no pueden coincidir con las de w_2 ; lo que da en total 8 soluciones distintas.
(b) Resolviendo $2w + w^2 = 3$, resulta que $w_1, w_2 = 1, -3$ cuyas raíces cuartas son respectivamente: $\pm 1, \pm\mathbf{i}, \ \pm z_0, \pm\mathbf{i} z_0$, donde $z_0 = \sqrt[4]{3}\,(1+\mathbf{i})/\sqrt{2}$ es uno de los valores de la raíz cuarta de -3.
Son los vértices de los dos cuadrados que vemos en el dibujo:

Sin calculadora: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \dfrac{3}{4} \;\Rightarrow\; \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \approx \dfrac{15}{16}$.



1)

(a) Probar por inducción que: $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\geq\dfrac{7}{12}$, para cada $n\geq 2$.

(b) ¿Habrá algún $c>0$ tal que se tenga para cada $n\geq 1$: $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\geq c$? Hallar un tal c , o probar que no lo hay.

---

2)

(a) Explicar a cuál de las que la siguen (A1 ó A2) *equivale* la afirmación:
"si un número $n\in\mathbb{N}$ es la suma de dos cuadrados de números enteros, entonces n no es congruente con -1 módulo 4",

A1) *"si un número $n\in\mathbb{N}$ no coincide con ninguna suma de dos cuadrados de números enteros, entonces n es congruente con -1 módulo 4",*

A2) *"un número $n\in\mathbb{N}$ que es congruente con -1 módulo 4 no coincide con ninguna suma de dos cuadrados de números enteros".*

(b) Averiguar y probar cuáles de las afirmaciones anteriores son ciertas o falsas.

---

3) Decidir si son numerables los siguientes tres conjuntos, y explicar por qué:

(a) el conjunto de sucesiones infinitas $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ de ceros y unos, que contienen sólo un número finito de unos;

(b) el conjunto de sucesiones infinitas $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ de ceros y doses.

(c) el conjunto de sucesiones infinitas $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ de ceros y unos, que no contiene tres ceros ni tres unos seguidos.

---

4)

(a) Demostrar que $104^{401}+401^{104}$ es un múltiplo de 9.

(b) ¿Es múltiplo de 10?

---

5)

(a) ¿Cuántas soluciones complejas tiene la ecuación $2+z^4=\dfrac{3}{z^4}$?

(b) Calcular todas estas soluciones e indicar, dónde se encuentran en el plano complejo.