(test 1)

El problema de inducción

La desigualdad $4^n \geq n^2$

a) no es cierta para algún $n \in \mathbb{N}$.
b) $\boxed{\text{es cierta y se demuestra por inducción usando la desigualdad } 4n^2 \geq (n+1)^2.}$
c) es cierta y se demuestra por inducción usando la desigualdad $4^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Algunos alumnos preguntan por qué la solución correcta es la *b*). La demostración por inducción consiste en dos pasos:
1) Comprobar que la propiedad se cumple para $n = 1$, es decir, $4^1 \geq 1^2$, lo cual es cierto.
2) Suponiendo que se cumple $4^n \geq n^2$ hay que probar $4^{n+1} \geq (n+1)^2$.

En 2) intentamos obtener la segunda desigualdad a partir de la primera multiplicando por 4:

$$4^n \geq n^2 \;\Rightarrow\; 4^{n+1} \geq 4n^2.$$

Nuestro objetivo es deducir $4^{n+1} \geq (n+1)^2$, por tanto lo que hay que usar es $4n^2 \geq (n+1)^2$, que por cierto es fácil de comprobar si lo escribimos como $4 \geq \big(1 + 1/n\big)^2$.

En resumen, en 2) a lo que se quiere llegar, la consecuencia, es $4^{n+1} \geq (n+1)^2$. Lo que hay que usar con este propósito es $4n^2 \geq (n+1)^2$.

Comentarios sobre el resto de los problemas

La desigualdad $(x - \sqrt{2})/(x + \sqrt{3}) < 0$

a) se cumple para $x = 2$.
b) se cumple para algún $x < -2$.
c) $\boxed{\text{se cumple para todo } |x| < 1.}$

Comentario: Si $-1 < x < 1$ entonces $x - \sqrt{2}$ es negativo y $x + \sqrt{3}$ es positivo.

La sucesión definida por $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = 1 + 2a_n$ satisface

a) $\lim a_n = 2$.
b) no es monótona.
c) $\boxed{\text{no está acotada.}}$

Comentario: Cada término es más del doble del anterior, empezando por 1/2, entonces la sucesión es creciente y no acotada.

La sucesión

$$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{5}{6}, \ldots$$

a) no tiene límite.
b) $\boxed{\text{converge.}}$
c) es monótona.

Comentario: La sucesión se puede escribir como

$$1+\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{5},\ \ldots$$

Entonces es la suma de 1 y de una sucesión que tiende a cero. Por consiguiente converge (su límite es 1).

Para el conjunto $B = \{\frac{n^2+1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ se cumple que $\sup B + \text{ínf}\, B$ es igual a

a) $\boxed{3.}$
b) 2.
c) 1.

Comentario: Los elementos del conjunto son $1 + 1/n^2$. Como $1/n^2$ decrece con n, lo máximo que vale es 1. Además su límite es cero, entonces $\sup B = 1 + 1$ e $\text{ínf}\, B = 1 + 0$.

Sea $A = \{\frac{1}{3+5x^2} : x \in \mathbb{R}\}$. Se cumple que

a) A no está acotado inferiormente.
b) 0.03 es cota inferior para A.
c) $\boxed{A \text{ está acotado superiormente.}}$

Comentario: Claramente $5x^2 \geq 0$, por tanto $3 + 5x^2 \geq 3$ y todos los elementos de A son menores o iguales que $1/3$.