Cálculo I - Examen Final - 19 de enero de 2011

---

1) Consideramos la sucesión a_n definida por

$$a_{n+1} = 2a_n^2 - 1, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

a) Demostrar que $-1 \leq a_n \leq 1$ para todo número natural n.
b) ¿Es a_n monótona?

2) Calcular

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx.$$

3) Calcular los límites siguientes

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{sen} x}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x(4x+3)} - 2x)$.

4) Esbozar la gráfica de la función $f(x) = x\log(x)$. Indicando, si los hubiera, extremos locales, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento e intervalos de concavidad y convexidad.

5) Hallar qué valores reales debe tomar el parámetro α para que la siguiente serie converja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\alpha n}+1}{2^{\alpha n}+2^{-\alpha n}}.$$

Soluciones

---

1) a) Lo que se pide probar es $|a_n| \le 1$. Procedemos por inducción. Claramente $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| \le 1$. Ahora suponemos que se cumple $|a_n| \le 1$. De aquí, $0 \le a_n^2 \le 1$, por tanto $0 \le 2a_n^2 \le 2$ y finalmente $-1 \le 2a_n^2 - 1 \le 1$ que equivale a $|a_{n+1}| \le 1$, es decir, hemos obtenido la propiedad cambiando n por $n+1$.

b) Sustituyendo tenemos $a_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$, y $a_4 = 2 \cdot \frac{49}{81} - 1 = \frac{17}{81}$. Entonces $a_1 > a_2$ pero $a_3 < a_4$ (basta mirar el signo). Por tanto la sucesión no es monótona.

2) La primera integral es inmediata:

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x\,dx = \log|x^2-1|\Big|_2^3 = \log 8 - \log 3 = \log\frac{8}{3}.$$

La segunda es suma de dos integrales inmediatas después de usar $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx &= \int_0^{\pi/2} \big(\operatorname{sen} x + (\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)\big)\,dx \\ &= \Big(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\Big)\Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3) Llamemos a los límites L_1, L_2, L_3 y L_4, respectivamente.

a) Usando que la exponencial es la inversa del logaritmo y que $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = 1$ (esto se puede hacer por L'Hôpital (0/0) o usando que $\frac{\operatorname{sen} t}{t} \to 1$ cuando $t \to 0$), se tiene

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} e^{(\log x)\operatorname{sen}(1/x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}(\log x)\operatorname{sen}(1/x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

En el último paso se ha empleado la regla de L'Hôpital.

b) La manera más rápida consiste en escribir $t = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ y utilizar el límite del seno antes mencionado. También se puede aplicar directamente la regla de L'Hôpital (0/0):

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))\cdot\cos(\operatorname{sen} x)\cdot\cos x}{\cos(\operatorname{sen} x)\cdot\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

c) Es un límite de tipo 0/0 sin la menor complicación:

$$L_3 = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-\operatorname{sen} x)/\cos x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

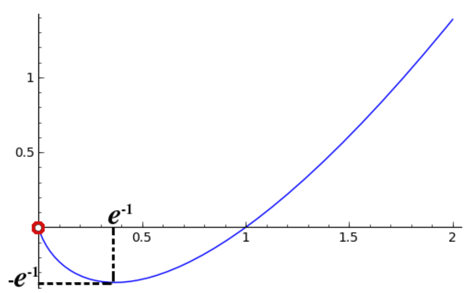
d) Como es habitual para eliminar la indeterminación $\infty - \infty$ con raíces, multiplicamos por el conjugado:

$$L_4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x(4x+3)} - 2x)(\sqrt{x(4x+3)} + 2x)}{\sqrt{x(4x+3)} + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 + 3x - 4x^2}{\sqrt{4x^2+3x} + 2x}.$$

Ahora en esta expresión dividimos numerador y denominador entre x, "el mayor exponente":

$$L_4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{4+3/x} + 2} = \frac{3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{4}.$$

4) El dominio de esta función es $(0,\infty)$ porque el logaritmo sólo existe para números positivos.



El único corte con los ejes es $x = 1$ (el valor para el que se anula el logaritmo), aunque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, por L'Hôpital para $(\log x)/x^{-1}$. Éste límite y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ prueban que no hay asíntotas.

Calculamos la derivada $f'(x) = \log x + 1$. La solución de $\log x + 1 = 0$ es $x_0 = e^{-1}$. Para $0 < x < x_0$ se tiene $\log x < -1$ y para $x > x_0$, $\log x > -1$, entonces la función decrece en $(0, x_0)$ y crece en (x_0, ∞) alcanzando por tanto un mínimo (global) en $x = x_0$ que es $f(x_0) = -e^{-1}$.

Derivando una vez más $f''(x) = 1/x$ que es positiva en $(0,\infty)$. Por consiguiente la función es convexa en todo su dominio y no hay puntos de inflexión.

5) Escribamos a_n para la expresión en el sumatorio. Lo más fácil es percatarse de que

$$a_n = \frac{2^{2\alpha n} + 1}{2^{\alpha n} + 2^{-\alpha n}} = \frac{2^{2\alpha n} + 1}{2^{-\alpha n}\big(2^{2\alpha n} + 1\big)} = 2^{\alpha n}.$$

Por el criterio de la raíz, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\alpha n}$ converge para $\alpha < 0$ y diverge para $\alpha > 0$. Además para $\alpha = 0$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ que claramente diverge ($\lim a_n \neq 0$).

Incluso sin percatarse de esta simplificación, lo más natural es aplicar el criterio de comparación con $b_n = 2^{\alpha n}$ o usar previamente que $\lim a_n = 0$ no se cumple para $\alpha \geq 0$.