Capítulo 7

Sucesiones

7.1. Introducción

Las sucesiones aparecen de manera natural en muchos cálculos que responden a un esquema iterativo. Por ejemplo, al dividir 2 entre 3 obtenemos $\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{10}+\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10}$, igualdad que podemos usar ahora para obtener

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{10}+\left(\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^2},$$

y de nuevo

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\left(\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10^2}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^3}.$$

Y así podemos continuar tantas veces como queramos, obteniendo para cada $n\in\mathbb{N}$ la igualdad:

$$\frac{2}{3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{10^k}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^n}.$$

Escribiendo $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{10^k}$ tenemos que $0<\dfrac{2}{3}-x_n=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^n}$. Observa que, aunque los números x_n son *todos ellos distintos* de $2/3$, dada una cota de error arbitrariamente pequeña, $\varepsilon>0$, y tomando $n_0\in\mathbb{N}$ de manera que $\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^{n_0}}<\varepsilon$, deducimos que *para todo* número natural $n\geqslant n_0$ se verifica que $|x_n-2/3|<\varepsilon$, lo que se expresa escribiendo $2/3=\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$.

El ejemplo anterior está relacionado con la expresión decimal de $2/3$ que, como todos sabemos, es un decimal periódico con período igual a 6, lo que suele escribirse $2/3 = 0,\widehat{6}$ igualdad en la que, según se dice a veces, el símbolo $0,\widehat{6}$ debe interpretarse como que el 6 *se repite infinitas veces*. ¿Qué quiere decir esto? Lo que está claro es que, por mucho tiempo y paciencia que tengamos, nunca podremos escribir *infinitos* 6 uno detrás de otro... bueno, podríamos escribir algo como

$$\frac{2}{3} = 0,\widehat{6} = 0,6666666\ldots(\text{ infinitos } 6)$$

lo que tampoco sirve de mucho pues seguimos sin saber cómo se interpreta esta igualdad. Pues bien, para dar un significado matemático a lo que se quiere expresar con esa igualdad hay que recurrir al concepto de límite de una sucesión tal como hemos hecho antes.

Veamos otro ejemplo en esta misma línea. Vamos a intentar calcular aproximaciones racionales de $\sqrt{10}$. Si partimos inicialmente de un número $x > \sqrt{10}$, tendremos que $\dfrac{10}{x} < \sqrt{10} < x$. Pongamos $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{10}{x}\right)$. Entonces, en virtud de la desigualdad de las medias, $\sqrt{10} < y$, y como también $y < x$, deducimos que y está más cerca de $\sqrt{10}$ que x. Podemos ahora repetir este proceso sustituyendo x por y obteniendo una nueva aproximación mejor de $\sqrt{10}$. Nótese que si x es racional también lo será y. Esto sugiere que, partiendo de un valor inicial, por ejemplo $x_1 = 4$, calculemos $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{10}{x_1}\right)$, y después $x_3 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{10}{x_2}\right)$, y así podemos continuar tantas veces como queramos, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$ un número x_n tal que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right)$$

con $x_1 = 4$. Con una calculadora manual obtenemos enseguida los valores $x_2 = 3,25$; $x_3 = 3,1634615$; $x_4 = 3,1622779$ con seis cifras decimales exactas:

$$0 < x_4 - \sqrt{10} = \frac{x_4^2 - 10}{x_4 + \sqrt{10}} < \frac{x_4^2 - 10}{6} < \frac{0,000005}{6} < \frac{1}{10^6}$$

es decir, x_4 coincide con $\sqrt{10}$ hasta la sexta cifra decimal. De hecho, como $x_n > \sqrt{10}$ tenemos que:

$$0 < x_{n+1} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right) - \sqrt{10} < \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\sqrt{10} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{10})$$

de donde se sigue que $0 < x_{n+1} - \sqrt{10} < \dfrac{1}{2^n}(x_1 - \sqrt{10}) < \dfrac{1}{2^n}$, por tanto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, y tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \varepsilon$, deducimos que *para todo* número natural $n \geqslant n_0$ se verifica que $|x_n - \sqrt{10}| < \varepsilon$, lo que simbólicamente se expresa escribiendo $\sqrt{10} = \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$.

En los ejemplos anteriores hemos dado por supuesto que ya tienes cierta familiaridad con los conceptos de “sucesión” y de “límite de una sucesión” de los cuales vamos a ocuparnos a continuación con detalle.

7.2. Sucesiones de números reales

7.1 Definición. Sea A un conjunto no vacío. Una **sucesión** de elementos de A es una *aplicación* del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una *aplicación* del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Por ahora, solamente consideraremos sucesiones de números reales por lo que nos referiremos a ellas simplemente como "sucesiones".

Notación. Dada una sucesión, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele representarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra "x" nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra). La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe interpretarse como la *aplicación* que a cada $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n. Cuando no hay posibilidad de confusión, escribimos simplemente $\{x_n\}$ en vez de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Conviene insistir en que $\{x_n\}$ es, por definición, la *aplicación* de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ dada por $n \mapsto x_n$. No hay que confundir la sucesión $\{x_n\}$, que es una aplicación, con su *conjunto imagen*, que es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los números x_n, el cual se representa por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$ son sucesiones distintas con el mismo conjunto imagen.

El número x_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión; para $n = 1, 2, 3$ se habla respectivamente de primero, segundo, tercer término de la sucesión. Una forma apropiada de considerar una sucesión es como un vector con infinitas componentes (los términos de la sucesión), de esta forma no te quedará duda de que las sucesiones $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$ son distintas pues se corresponden con los vectores $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ y $(1, -1, 1, -1, \dots)$.

7.2.1. Sucesiones convergentes

7.2 Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **converge** a un número real x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \tag{7.1}$$

Se dice también que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$, y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Teniendo en cuenta que la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ equivale a la doble desigualdad $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ o, lo que es igual, $x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, la definición anterior lo que dice es que $\{x_n\}$ converge a x cuando, dado cualquier intervalo abierto $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, se verifica que *todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante* están en dicho intervalo.

El número natural m_ε, cuya existencia se afirma en la definición anterior, cabe esperar que dependa del número $\varepsilon > 0$, lo que explica la notación empleada. Lo usual es que m_ε tenga que ser tanto más grande cuanto más pequeño sea el número $\varepsilon > 0$. Conviene observar que si p es un número natural tal que $p > m_\varepsilon$, entonces para p, al igual que para m_ε, se verifica que si n es cualquier número natural mayor o igual que p se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Es decir, si

$\{x_n\}$ converge a x, entonces para cada $\varepsilon > 0$ dado hay, de hecho, *infinitos* números naturales m_ε para los que se satisface la condición 7.1.

La definición 7.2 es típica del Análisis pues en ella se está definiendo *una igualdad*, a saber, $\lim\{x_n\} = x$, en términos de *desigualdades*: $|x_n - x| < \varepsilon$ siempre que $n \geqslant m_\varepsilon$. Observa también que, de la definición dada, se deduce enseguida que $\{x_n\} \to x$ es lo mismo que $\{x_n - x\} \to 0$.

Veamos con unos sencillos, pero importantes ejemplos, cómo se usa la definición 7.2 para probar que una sucesión converge.

7.3 Ejemplo. *La sucesión $\{1/n\}$ es convergente a cero.*

Para probarlo, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifique que $|1/n - 0| = 1/n < \varepsilon$. Como $1/n \leqslant 1/m$ siempre que $n \geqslant m$, bastará tomar como número m cualquier natural que verifique que $1/m < \varepsilon$, es decir, $m > 1/\varepsilon$. Que, efectivamente, hay números naturales, m, que verifican la condición $m > 1/\varepsilon$ cualquiera sea el número $\varepsilon > 0$ dado, es justamente lo que dice la propiedad arquimediana (5.9) del orden de $\mathbb{R}$. Pues bién, cualquier $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1/\varepsilon$ nos sirve como apropiado m_ε, pero parece razonable tomar el más pequeño de todos ellos que será la parte entera de $1/\varepsilon$ más una unidad, es decir, $m_\varepsilon = E(1/\varepsilon) + 1$. Hemos demostrado así que $\lim\{1/n\} = 0$. ♦

7.4 Ejemplo. *Dado un número real $x \in]-1, 1[$, se verifica que la sucesión de las potencias de x, $\{x^n\}$, converge a cero.*

En efecto, como $|x| < 1$ podemos escribir $|x|$ en la forma $|x| = 1/(1+\rho)$ para conveniente $\rho > 0$ (de hecho $\rho = \frac{1-|x|}{|x|}$ pero eso no interesa ahora). Dado $\varepsilon > 0$, puesto que

$$|x^n - 0| = |x|^n = \frac{1}{(1+\rho)^n} \leqslant \frac{1}{1+n\rho} < \frac{1}{n\rho}$$

bastará tomar un m_ε tal que $\frac{1}{\rho m_\varepsilon} < \varepsilon$, por ejemplo, $m_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\rho\varepsilon}\right) + 1$, para garantizar que $|x^n - 0| < \varepsilon$ siempre que $n \geqslant m_\varepsilon$. ♦

7.5 Ejemplo. *Dado $x \in]-1, 1[$, se verifica que la sucesión $\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$, llamada* ***serie geométrica de razón*** *x, converge a $\dfrac{1}{1-x}$.*

En efecto, como

$$\left|1 + x + x^2 + \cdots + x^n - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$$

poniendo, igual que antes, $|x| = 1/(1+\rho)$ para conveniente $\rho > 0$, y teniendo en cuenta que $0 < 1 - |x| \leqslant 1 - x$, y el ejemplo anterior deducimos que:

$$\left|1 + x + x^2 + \cdots + x^n - \frac{1}{1-x}\right| \leqslant \frac{|x|}{1-|x|}|x|^n = \frac{1}{\rho}|x|^n < \frac{1}{n\rho^2}$$

por lo que, dado $\varepsilon > 0$ para todo $n \geqslant m_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon\rho^2}\right) + 1$ se verifica que

$$\left|1 + x + x^2 + \cdots + x^n - \frac{1}{1-x}\right| < \varepsilon.$$

♦

Si demostrar, aplicando la definición 7.2, que una sucesión dada es convergente puede ser complicado, suele serlo todavía más probar, usando dicha definición, que una sucesión no converge.

7.6 Ejemplo. *La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente.*

En efecto, sea $x\in\mathbb{R}$ y definamos $\varepsilon_x = \text{máx}\{|1-x|/2, |1+x|/2\}$. Claramente $\varepsilon_x > 0$. Puesto que $|(-1)^{2m}-x| = |1-x|$, $|(-1)^{2m+1}-x| = |1+x|$ y alguno de estos números es mayor que ε_x deducimos que, dado $x\in\mathbb{R}$, se verifica que *existe* un número $\varepsilon_x > 0$, tal que *cualquiera sea* $m\in\mathbb{N}$ se verifica que *hay algún* natural n, por ejemplo $n=2m$ o $n=2m+1$, mayor que m y para el que no se verifica que $|(-1)^n-x| < \varepsilon_x$. Es decir, hemos probado que $\{(-1)^n\}$ no converge a x. Puesto que en nuestro razonamiento x puede ser cualquier número real concluimos, finalmente, que $\{(-1)^n\}$ no es convergente. ◆

Conviene precisar algunas expresiones de uso frecuente al tratar con sucesiones.

- Cuando se dice que una cierta propiedad se satisface por *todos los términos de una sucesión $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante*, lo que se quiere decir es que existe $m\in\mathbb{N}$, tal que para todo $n\geqslant m$ el número x_n satisface dicha propiedad.
- Cuando se dice que una cierta propiedad se satisface por *infinitos términos de una sucesión $\{x_n\}$*, lo que se quiere decir es que el conjunto de todos los **números naturales** n, tales que x_n satisface dicha propiedad, es infinito.
- Cuando se dice que una cierta propiedad se satisface por *un número finito de términos de una sucesión $\{x_n\}$*, lo que se quiere decir es que el conjunto de todos los **números naturales** n, tales que x_n satisface dicha propiedad, es finito.

El siguiente resultado, muy sencillo, es también muy útil.

7.7 Proposición. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión y x un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) $\{x_n\}$ converge a x.

ii) Para todo intervalo abierto I que contiene a x se verifica que todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante están en I.

Demostración. Que *ii)* implica *i)* es consecuencia inmediata del comentario que sigue a la definición 7.2. Probaremos que *i)* implica *ii)*. Dado un intervalo abierto I tal que $x\in I$, existirá un número $\varepsilon > 0$ (que dependerá del intervalo I) tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq I$. Para dicho $\varepsilon > 0$ existe, por hipótesis, un número natural m tal que para todo $n\geqslant m$ se verifica que $x_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ y, por tanto, $x_n\in I$. □

Observa que en la definición 7.2 no se exige que el límite sea único, por ello si $\{x_n\}$ converge a x es lícito preguntar si puede haber otro número real y *distinto* de x tal que $\{x_n\}$ también converja a y. La respuesta es que no. En efecto, si $\{x_n\}\to x$, dado $y\neq x$, hay intervalos abiertos I, J tales que $x\in I$, $y\in J$ e $I\cap J=\emptyset$ (por ejemplo las semirrectas $]\leftarrow, \frac{x+y}{2}[$ y $]\frac{x+y}{2}, \rightarrow[$). Sabemos, por la proposición anterior, que todos los términos de $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante están en I, por tanto sólo puede haber un número finito de términos en J. Concluimos, en virtud de la misma proposición, que $\{x_n\}$ no converge a y. Hemos probado que si $\{x_n\}$ es convergente, el número real $\text{lím}\{x_n\}$ está determinado de manera única.

7.8 Proposición. *Una sucesión convergente tiene un único límite.*

Para estudiar la convergencia de una sucesión dada no suele ser lo más aconsejable usar, de entrada, la definición 7.2. Es preferible intentar primero otros caminos. Generalmente lo que suele hacerse en la práctica consiste en relacionar dicha sucesión con otras más sencillas o que ya han sido previamente estudiadas y deducir de dicha relación si nuestra sucesión es o no es convergente y, cuando lo sea, el valor de su límite. Por ello son de gran utilidad los resultados que siguen en los que se estudia cómo se comportan las sucesiones convergentes respecto de las estructuras algebraica y de orden de $\mathbb{R}$.

7.2.2. Sucesiones convergentes y estructura de orden de $\mathbb{R}$

La siguiente estrategia, útil para probar desigualdades, se usa con frecuencia.

7.9 Estrategia. Sean x e y números reales. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $x \leqslant y$.

b) Para todo número $z > y$ se verifica que $x < z$.

c) Para todo número $\varepsilon > 0$, se verifica que $x < y + \varepsilon$.

Demostración. Es evidente que a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c). Probemos que c) $\Longrightarrow$ a). Supuesto que para todo número $\varepsilon > 0$, se verifica que $x < y + \varepsilon$ debe ocurrir que $x \leqslant y$ pues, en otro caso, si fuera $y < x$, tomando $\varepsilon = x - y$ debería verificarse que $x < y + \varepsilon = y + (x - y) = x$, esto es, $x < x$ lo que es contradictorio. □

7.10 Proposición. *Supongamos que* $\text{lím}\{x_n\} = x$, $\text{lím}\{y_n\} = y$ *y que existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geqslant m$ *se tiene que* $x_n \leqslant y_n$. *Entonces se verifica que* $x \leqslant y$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, probaremos que $x < y + \varepsilon$. Por hipótesis existen números naturales m_1 y m_2 tales que para todo $p \geqslant m_1$ se tiene que $x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2$ y todo $q \geqslant m_2$ se tiene que $y - \varepsilon/2 < y_q < y + \varepsilon/2$. Tomando un número natural $n \geqslant \text{máx}\{m, m_1, m_2\}$, se verifican las dos desigualdades anteriores y también la del enunciado, luego:

$$x - \varepsilon/2 < x_n \leqslant y_n < y + \varepsilon/2 \quad \Longrightarrow \quad x < y + \varepsilon.$$

Como queríamos probar. □

Respecto al resultado anterior, conviene advertir que *aunque las desigualdades sean estrictas no puede asegurarse que* $\text{lím}\{x_n\} = x$ *sea estrictamente menor que* $\text{lím}\{y_n\} = y$. Por ejemplo, si $x_n = 0$ e $y_n = 1/n$, es claro que $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pero $x = 0 = y$.

7.11 Proposición (Principio de las sucesiones encajadas). *Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones tales que* $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ *y existe un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, entonces la sucesión $\{y_n\}$ es convergente y* $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existen m_1, m_2 tales que para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$

$$\alpha - \varepsilon < x_p < \alpha + \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \alpha - \varepsilon < z_q < \alpha + \varepsilon \tag{7.2}$$

Sea $m_3 = \max\{m_0, m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_3$ las desigualdades (7.2) se cumplen para $p = q = n$. Además como $n \geqslant m_0$ se tiene que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m_3$ se verifica que:

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < \alpha + \varepsilon,$$

y, por tanto, $\alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\{y_n\} = \alpha$. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es que si cambiamos arbitrariamente un número finito de términos de una sucesión, la nueva sucesión así obtenida es convergente si lo era la de partida y con su mismo límite. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

7.12 Corolario. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones cuyos términos son iguales a partir de uno en adelante, es decir, hay un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ es $x_n = y_n$. Entonces $\{x_n\}$ converge si, y sólo si, $\{y_n\}$ converge en cuyo caso las dos sucesiones tienen igual límite.*

El principio de las sucesiones encajadas es de gran utilidad y se usa con mucha frecuencia. Naturalmente, cuando apliquemos dicho principio a un caso concreto, la sucesión $\{y_n\}$ del enunciado será la que queremos estudiar y tendremos que ser capaces de "inventarnos" las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ de manera que se cumplan las condiciones del enunciado. Veamos un ejemplo.

7.13 Ejemplo. *La sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$ es convergente a 1.*

Pongamos $y_n = \sqrt[n]{n}$. La elección de $\{x_n\}$ es inmediata: $x_n = 1$. Un poco más difícil es la elección de $\{z_n\}$. Para ello apliquemos la desigualdad de las medias a los números $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = x_n = \sqrt{n}$ para obtener que para todo $n \geqslant 2$ es:

$$\sqrt[n]{n} \leqslant \frac{n - 2 + 2\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{7.3}$$

Por tanto tomando $z_n = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, es inmediato que $\lim\{z_n\} = 1$ y concluimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $\lim\{\sqrt[n]{n}\} = 1$. ♦

7.2.3. Sucesiones monótonas

7.14 Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Acotada si su conjunto imagen está mayorado y minorado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decreciente si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente decreciente si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Monótona si es creciente o decreciente.

Estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.

Observa que si una sucesión $\{x_n\}$ es creciente (resp. decreciente) entonces se verifica que $x_m \leqslant x_n$ (resp. $x_m \geqslant x_n$) siempre que $m \leqslant n$.

Conviene advertir que cuando se dice que una sucesión es monótona *no se excluye* la posibilidad de que, de hecho, sea estrictamente monótona. Es por ello que, en general, suele hablarse de sucesiones monótonas y tan sólo cuando tiene algún interés particular se precisa si son estrictamente monótonas.

7.15 Proposición. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$. Todos los términos de $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante estarán en el intervalo $]x-1, x+1[$, es decir, hay un número $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n - x| < 1$, lo que implica que

$$|x_n| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \qquad \text{para todo } n \geqslant m.$$

Tomando $M = \max\{1+|x|, |x_1|, \cdots, |x_m|\}$, tenemos que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

La proposición anterior es útil a veces para probar que una sucesión *no* es convergente: para ello basta probar que no está acotada.

7.16 Ejemplo. *La sucesión $\{H_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

no es convergente.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \geqslant \\ &\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = 1+\frac{n}{2} \qquad (7.4)\end{aligned}$$

de donde se deduce que la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} 1/k\right\}$ no está mayorada. Esta sucesión recibe el nombre de **serie armónica**. ◆

La proposición recíproca de la anterior no es cierta: la sucesión $\{(-1)^n\}$ es acotada y *no* es convergente. No obstante, hay un caso especial muy importante en que sí es cierta la recíproca.

7.17 Teorema. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión* $\{x_n\}$ *es:*

i) Creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$*, donde* $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$*, donde* $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Probaremos $i)$ quedando la demostración de $ii)$ como ejercicio. La hipótesis de que $\{x_n\}$ es mayorada garantiza, en virtud del principio del supremo, la existencia del número real $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tiene que existir un término x_m de la sucesión tal que $\beta - \varepsilon < x_m$. Puesto que la sucesión es creciente para todo $n \geqslant m$ se verificará que $x_m \leqslant x_n$, y por tanto $\beta - \varepsilon < x_n$. En consecuencia $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$ para todo $n \geqslant m$. Hemos probado así que $\lim\{x_n\} = \beta$. □

7.18 Ejemplo. La sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, es convergente.

En efecto, como

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0$$

se sigue que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, es una sucesión creciente. Además

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \overset{(n}{\cdots} + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

por lo que también está mayorada. Concluimos, por el teorema anterior, que dicha sucesión es convergente. ♦

7.2.3.1. El número e

En el ejercicio 30 hemos probado que la sucesión $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es creciente y que la sucesión $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente. Como $0 < y_n$, se sigue que $\{y_n\}$ es convergente. Puesto que

$$x_n = y_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = y_n \frac{n}{n+1}$$

se sigue que $\{x_n\}$ también es convergente y $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$. El valor común de este límite es un número real que se representa con el símbolo e. Como consecuencia del teorema 7.17, se verifica que:

$$\mathrm{e} = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\} = \inf\left\{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} : m \in \mathbb{N}\right\}$$

En particular, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}} \tag{7.5}$$

7.2.4. Sucesiones convergentes y estructura algebraica de $\mathbb{R}$

En los resultados anteriores han intervenido de manera esencial las propiedades de la estructura de orden de $\mathbb{R}$. Vamos a estudiar ahora el comportamiento de las sucesiones convergentes respecto de la adición y el producto de números reales. Los resultados que vamos a obtener, conocidos tradicionalmente con el nombre de *álgebra de límites*, son básicos para el estudio de la convergencia de sucesiones.

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

7.19 Proposición. *El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.*

Demostración. Sea $\lim\{x_n\} = 0$, e $\{y_n\}$ acotada. Sea $c > 0$ tal que $|y_n| \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural m tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n| < \varepsilon/c$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m$, se verifica que $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \dfrac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon$, lo que prueba que $\lim\{x_n y_n\} = 0$. $\square$

7.20 Proposición (Álgebra de límites). *Supongamos que* $\lim\{x_n\} = x$ *y* $\lim\{y_n\} = y$. *Entonces se verifica que:*

$$\lim\{x_n + y_n\} = x + y, \quad \lim\{x_n y_n\} = xy\,.$$

Si además suponemos que $y \neq 0$, *entonces* $\lim\{x_n/y_n\} = x/y$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad y - \varepsilon/2 < y_q < y + \varepsilon/2 \tag{7.6}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Sea $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_0$ las desigualdades (7.6) se cumplen para $p = q = n$, por lo que, sumándolas término a término, deducimos que $x + y - \varepsilon < x_n + y_n < x + y + \varepsilon$ cualquiera sea $n \geqslant m_0$, lo que prueba que $\lim\{x_n + y_n\} = x + y$.

Teniendo en cuenta que, por las proposiciones 7.15 y 7.19, se verifica que $\lim\{(x_n - x)y_n\} = \lim\{x(y_n - y)\} = 0$, y la igualdad

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y)$$

deducimos que $\lim\{x_n y_n - xy\} = 0$, es decir, $\lim\{x_n y_n\} = xy$.

Finalmente, para probar que $\lim\{x_n/y_n\} = x/y$, probaremos que la sucesión

$$\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{x_n y - y_n x}{y_n y}\right\}$$

converge a cero, para lo cual, teniendo en cuenta que $\text{lím}\{x_n y - y_n x\} = xy - yx = 0$, bastará probar que la sucesión $\{1/y_n\}$ está acotada. Puesto que $\text{lím}\{y_n\} = y$, se deduce de la desigualdad

$$||y_n| - |y|| \leqslant |y_n - y|$$

que $\text{lím}\{|y_n|\} = |y|$. Existirá, por tanto, un número $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_0$ es $|y_n| > |y|/2$. Pongamos

$$K = \text{máx}\left\{\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \ldots, \frac{1}{|y_{m_0}|}, \frac{2}{|y|}\right\}.$$

Se tiene entonces que $\dfrac{1}{|y_n|} \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado así que la sucesión $\{1/y_n\}$ está acotada, lo que concluye la demostración del teorema. □

7.21 Observación. Hay que leer con atención las hipótesis del teorema anterior para no hacer un uso incorrecto del mismo. En particular, no hay que olvidar que *la suma de dos sucesiones no convergentes puede ser una sucesión convergente*. Por ejemplo, las sucesiones $x_n = n$, $y_n = -n$, no son convergentes pues no están acotadas, pero su suma $x_n + y_n = 0$ es, evidentemente, convergente. Por tanto, *antes de escribir* $\text{lím}\{x_n + y_n\} = \text{lím}\{x_n\} + \text{lím}\{y_n\}$, hay que asegurarse de que estos últimos límites existen, es decir, que las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ convergen, pues pudiera ocurrir que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ fuera convergente y no lo fueran las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Análogamente, basta considerar las sucesiones $x_n = y_n = (-1)^n$, para convencerse de que *el producto de dos sucesiones no convergentes puede ser una sucesión convergente* y, en consecuencia, antes de descomponer una sucesión como producto de otras dos, debes asegurarte de que estas sucesiones convergen.

7.2.5. Sucesiones parciales. Teorema de Bolzano–Weierstrass

7.22 Definición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** o una **subsucesión** de $\{x_n\}$. Observa que $\{x_{\sigma(n)}\}$ no es otra cosa que la composición de las aplicaciones $\{x_n\}$ y σ, esto es, $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_n\} \circ \sigma$.

Se dice que un número real x es un **valor de adherencia** de la sucesión $\{x_n\}$ si hay alguna sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a x.

7.23 Ejemplo. Sea, como de costumbre, $E(x)$ el mayor entero menor o igual que x. La sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = n/5 - E(n/5)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tiene a $0, 1/5, 2/5, 3/5$ y $4/5$, como valores de adherencia.

En efecto, basta considerar que para cada $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, la sucesión parcial $\{x_{5n-j}\}_{n \in \mathbb{N}}$ viene dada por $x_{5n} = 0$, para $j = 0$, y $x_{5n-j} = 1 - j/5$ para $j = 1, 2, 3, 4$. ♦

Es fácil probar por inducción que si σ es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ entonces se verifica que $\sigma(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\text{lím}\{x_n\} = x$, y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que $|x_n - x| < \varepsilon$. Puesto que $\sigma(n) \geqslant n$, deducimos que para todo $n \geqslant m_0$ se tiene $\sigma(n) \geqslant m_0$, y por tanto, $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$. Hemos probado así el siguiente resultado.

7.24 Proposición. *Si* $\lim\{x_n\} = x$*, toda sucesión parcial de* $\{x_n\}$ *también converge a* x*. En particular, una sucesión convergente tiene como único valor de adherencia su límite.*

7.25 Estrategia. Como consecuencia de la proposición anterior, para probar que una sucesión *no* converge, es suficiente probar que tiene alguna sucesión parcial no convergente o que tiene dos sucesiones parciales que convergen a límites diferentes.

Por ejemplo, para la sucesión $x_n = (-1)^n$ se tiene que $x_{2n} = 1$ y $x_{2n-1} = -1$. Por tanto dicha sucesión no es convergente.

Observa que hay sucesiones, la de los números naturales por ejemplo, que no tienen *ningún* valor de adherencia. También puede ocurrir que una sucesión *tenga un único valor de adherencia y no sea convergente*. Por ejemplo, la sucesión dada por $x_n = (1 + (-1)^n)n + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, no es convergente y tiene a 0 como único valor de adherencia. Vamos a ver a continuación que estos comportamientos no pueden darse con sucesiones acotadas.

7.26 Lema. *Toda sucesión tiene una sucesión parcial monótona.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant x_p \quad \text{para todo } p > n\}$$

Podemos visualizar el conjunto A como sigue. Consideremos en el plano los segmentos de extremos (n, x_n) y $(n+1, x_{n+1})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

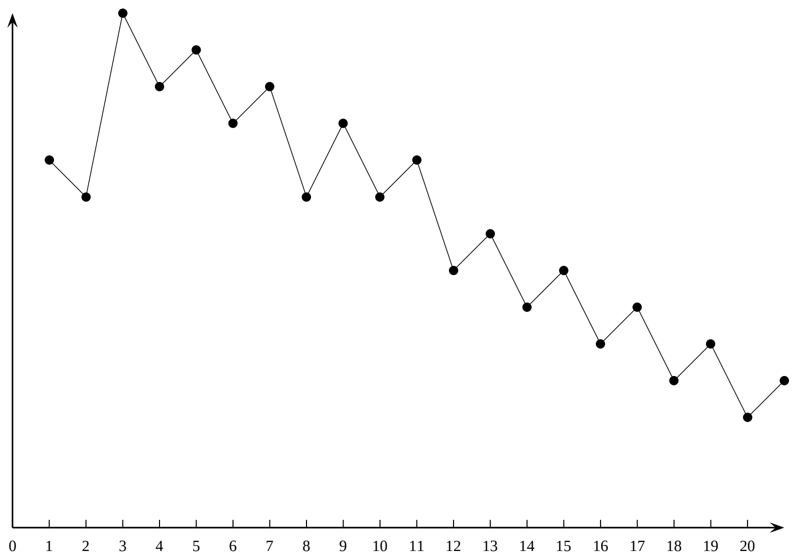

Figura 7.1. Puntos de sol y de sombra

Resulta así una línea poligonal infinita y podemos imaginar que dicha línea es el perfil de una cordillera cuyas cumbres y valles son los puntos (n, x_n). Imaginemos ahora que los rayos de luz del Sol, paralelos al eje de abscisas, iluminan dicha cordillera por el lado derecho (el Sol estaría, pues, situado en el infinito del eje de abscisas positivo). Pues bien, un número natural n pertenece al conjunto A si el punto (n, x_n) está iluminado y no pertenece a A si dicho punto está en sombra.

Supongamos que A es infinito. Entonces podemos definir una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente y tal que $\sigma(\mathbb{N}) = A$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\sigma(1) = \text{mín}(A) \\
&\sigma(n+1) = \text{mín}\{p \in A : \sigma(n) < p\} \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

es decir la aplicación σ va eligiendo los elementos de A de menor a mayor empezando por el primero. Resulta ahora evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente, porque todos los puntos $(\sigma(n), x_{\sigma(n)})$ están iluminados y, por tanto, ninguno de ellos puede hacerle sombra a uno anterior.

Si A es finito podemos suponer que $A = \emptyset$. En tal caso, para todo $n \in \mathbb{N}$ hay algún $p > n$ tal que $x_n < x_p$ (pues todo punto (n, x_n) está en sombra). Podemos definir ahora una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\sigma(1) = 1 \\
&\sigma(n+1) = \text{mín}\{p \in \mathbb{N} : \sigma(n) < p \ \text{ y } \ x_{\sigma(n)} < x_p\} \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Es evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es creciente, pues cada punto $(\sigma(n), x_{\sigma(n)})$ deja en la sombra al anterior. □

El siguiente resultado es uno de los más importantes en la teoría de sucesiones de números reales.

7.27 Teorema (Teorema de Bolzano - Weierstrass). *Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna sucesión parcial convergente.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. En virtud el lema anterior, hay una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que es monótona, dicha sucesión parcial está acotada por estarlo $\{x_n\}$ y, por tanto, es convergente. □

Si volvemos a leer la definición de sucesión convergente, parece que para estudiar la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ debemos ser capaces de "adivinar", de alguna manera, su posible límite. De hecho, una idea bastante extendida consiste en pensar que es lo mismo probar la convergencia de una sucesión que calcular su límite. Esto no es del todo correcto; son relativamente pocas las sucesiones convergentes cuyo límite puede efectivamente calcularse. Cuando se estudia la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$, la mayoría de las veces, lo que conocemos es, justamente, la sucesión y, naturalmente, se desconoce su posible límite el cual pudiera, incluso, no existir. Por ello interesa tener *criterios de convergencia intrínsecos a la sucesión*, es decir, que no hagan intervenir a un objeto en principio *extraño* a ella como es su posible límite. Conocemos ya un criterio de convergencia intrínseco para sucesiones *monótonas*. Usando dicho criterio hemos probado en el ejemplo 7.18 la convergencia de una sucesión *sin necesidad de conocer su límite*.

7.2.6. Condición de Cauchy. Teorema de completitud de $\mathbb{R}$

A continuación vamos a establecer un criterio intrínseco de convergencia para sucesiones que es más general pues puede aplicarse a cualquier sucesión. Este criterio fué formulado por Bolzano en 1817 y también, independientemente, por Cauchy en 1821, y establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión. Dicha condición se conoce con el nombre de *condición de Cauchy.*

7.28 Definición. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la **condición de Cauchy**, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

7.29 Teorema (Teorema de completitud de $\mathbb{R}$). *Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy. Probemos primero que $\{x_n\}$ está acotada. La condición de Cauchy implica que hay $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_{m_0}| < 1$ para todo $p \geqslant m_0$, y como $|x_p| \leqslant |x_p - x_{m_0}| + |x_{m_0}|$, deducimos que $|x_p| < 1 + |x_{m_0}|$ para $p \geqslant m_0$. En consecuencia si definimos $M = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{m_0}|, 1 + |x_{m_0}|\}$, obtenemos que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que hay un número real x y una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a x. Probaremos que $\{x_n\}$ también converge a x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_q| < \varepsilon/2$ siempre que $p, q \geqslant n_o$. También existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon/2$ siempre que $n \geqslant n_1$. Sea $m = \text{máx}\{n_o, n_1\}$. Para todo $n \geqslant m$ se tiene que $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$ por lo que

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = x$.

Recíprocamente, si $\{x_n\}$ es convergente y $\lim\{x_n\} = x$, dado $\varepsilon > 0$, hay un número $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo número natural $n \geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Deducimos que si p, q son números naturales mayores o iguales que m_ε entonces

$$|x_p - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy. □

7.30 Observación. La condición de Cauchy para sucesiones dada en la definición 7.28, puede también expresarse de una manera equivalente, aunque formalmente distinta, como sigue.

Una sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todo $p \geqslant m_\varepsilon$ y *para todo número natural h*, se verifica que $|x_{p+h} - x_p| < \varepsilon$.

Equivalentemente, una sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy si, y sólo si, la sucesión $\{\rho_n\}$ dada para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$\rho_n = \sup\{|x_{n+h} - x_n| : h \in \mathbb{N}\}$$

converge a cero.

Puesto que, evidentemente, para cada $h \in \mathbb{N}$ se tiene que $|x_{n+h} - x_n| \leqslant \rho_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy entonces se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_{n+h} - x_n\} = 0$ para cada $h \in \mathbb{N}$. Es importante observar que una sucesión $\{x_n\}$ puede verificar esta última condición y no ser convergente, es decir, no satisfacer la condición de Cauchy. Un ejemplo de ello lo proporciona la serie armónica, esto es, la sucesión $\{H_n\}$ dada por $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Hemos visto en el ejemplo 7.16 que dicha sucesión no es convergente y, por tanto, no verifica la condición de Cauchy. Sin embargo, *fijado un número natural* $h \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$0 < H_{n+h} - H_n = \frac{1}{n+h} + \frac{1}{n+h-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \frac{h}{n}$$

y, como $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\frac{h}{n}\right\} = 0$, deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \{H_{n+h} - H_n\} = 0$.

Observa que si hacemos $h = 2^{2(m+n)} - n$ entonces, como consecuencia de la desigualdad 7.4, $H_{2^p} > 1 + p/2$, tenemos:

$$H_{n+h} - H_n = H_{2^{2(m+n)}} - H_n > H_{2^{2(m+n)}} - n > 1 + m + n - n = m + 1$$

lo que prueba que el conjunto $\{H_{n+h} - H_n : h \in \mathbb{N}\}$ ni siquiera está mayorado para ningún $n \in \mathbb{N}$.

7.2.7. Límites superior e inferior de una sucesión

Acabaremos esta parte del capítulo, esencialmente teórica, introduciendo dos conceptos, que también tienen un interés principalmente teórico, que usaremos más adelante para formular algunos criterios de convergencia para series.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\} = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

El conjunto A_n está formado por todos los términos de la sucesión a partir del que ocupa el lugar n-ésimo. Como $A_n \subseteq A_1$ y, por hipótesis, A_1 es un conjunto acotado, A_n también está acotado. Pongamos

$$\alpha_n = \inf(A_n), \qquad \beta_n = \sup(A_n).$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ se tiene que $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$, $\beta_{n+1} \leqslant \beta_n$. Por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\{\beta_n\}$ es decreciente. Además $\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por el teorema 7.17, concluimos que ambas sucesiones son convergentes. El número $\alpha = \lim\{\alpha_n\}$ se llama **límite inferior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\liminf\{x_n\}$ y también $\underline{\lim}\{x_n\}$. El número $\beta = \lim\{\beta_n\}$ se llama **límite superior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\limsup\{x_n\}$ y también por $\overline{\lim}\{x_n\}$. Nótese que $\alpha \leqslant \beta$ y además α y β vienen dados por $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\beta = \inf\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$.

7.31 Teorema. *Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ acotada, $\alpha = \lim\inf\{x_n\}$, $\beta = \lim\sup\{x_n\}$. Supongamos que $\{x_n\}$ es convergente con $\lim\{x_n\} = x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \geqslant m_0$ es $x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2$. Por tanto $x - \varepsilon/2$ es un minorante de $A_{m_0} = \{x_p : p \geqslant m_0\}$ y, en consecuencia, $x - \varepsilon/2 \leqslant \alpha_{m_0}$. También, por análogas razones, $\beta_{m_0} \leqslant x + \varepsilon/2$. Como además $\alpha_{m_0} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \beta_{m_0}$, resulta que:

$$x - \varepsilon/2 \leqslant \alpha_{m_0} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \beta_{m_0} \leqslant x + \varepsilon/2. \tag{7.7}$$

De donde se sigue que $\beta - \alpha \leqslant \varepsilon$. Hemos probado que para todo $\varepsilon > 0$ es $\beta \leqslant \alpha + \varepsilon$ lo que, como ya sabemos, implica que $\beta \leqslant \alpha$ y, en consecuencia $\alpha = \beta$. Deducimos ahora de las desigualdades (7.7) que, para todo $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon/2 \leqslant \alpha = \beta \leqslant x + \varepsilon/2$ y, por tanto, $x \leqslant \alpha = \beta \leqslant x$, o sea, $x = \alpha = \beta$.

Recíprocamente, supongamos que $\alpha = \beta$. Dado $\varepsilon > 0$, todos los términos de cada una de las sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ estarán en el intervalo $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[=]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[$ a partir de uno de adelante. Luego $\alpha - \varepsilon < \alpha_{m_0} \leqslant \beta_{m_0} < \alpha + \varepsilon$ para algún $m_0 \in \mathbb{N}$. Puesto que para $n \geqslant m_0$ se verifica que $\alpha_{m_0} \leqslant x_n \leqslant \beta_{m_0}$, concluimos que $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$ para todo $n \geqslant m_0$. Hemos probado así que $\{x_n\}$ es convergente y $\lim\{x_n\} = \alpha = \beta$. □

7.2.8. Ejercicios propuestos

312. Dado $\varepsilon > 0$, calcula $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifique $|x_n - x| < \varepsilon$ donde x_n, x vienen dados en cada caso por:

$a)$ $x_n = \dfrac{2n+3}{3n-50}$, $x = \dfrac{2}{3}$; $b)$ $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, $x = 0$

$c)$ $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$, $x = 1$; $d)$ $x_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $x = 0$

$e)$ $x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$, $x = 0$; $f)$ $x_n = n^2 a^n$ $(|a| < 1), x = 0$

Sugerencia. Como consecuencia del binomio de Newton, para $x - 1 \geqslant 0$ se verifica que $x^n = (1 + (x-1))^n \geqslant 1 + n(x-1)$. Esta desigualdad, convenientemente usada, permite resolver con facilidad los casos b), c), d) y e).

313. Sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales. Prueba que un número real, β, es el supremo de A si, y sólo si, β es un mayorante de A y hay alguna sucesión de puntos de A que converge a β.

314. Supuesto que $\lim\{x_n\} = x$, prueba que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tiene máximo y mínimo.

315. a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que para todo $n \geqslant p$ es $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

b) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números no nulos verificando que $\lim \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lambda$, donde $0 \leqslant \lambda < 1$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

Aplicación. Dados $a \in]-1, 1[$, $k \in \mathbb{N}$, prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \{n^k a^n\} = 0$.

316. Estudia la convergencia de las sucesiones siguientes.

$$a)\ x_n = \frac{2n + (-1)^n(n+2)}{7n+3} \qquad b)\ x_n = n\left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n$$

$$c)\ x_n = n^2\left(\frac{1+n}{3n}\right)^n \qquad d)\ x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}\ \ (a>0, b>0)$$

$$e)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \qquad f)\ x_n = \frac{x^n}{n!}\ \ (x\in\mathbb{R})$$

$$g)\ x_n = \sqrt{n^2+3n+2} - n \qquad h)\ x_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right)$$

Sugerencia. En algunos casos puede usarse el principio de las sucesiones encajadas o el ejercicio anterior.

317. Sea $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$. Prueba que $x_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Deduce que $\lim\{x_n\} = 0$.

Sugerencia. Relaciona $\frac{k}{k+1}$ con $\frac{k+1}{k+2}$.

318. Supongamos que $\{a_n\}\to 0$. Justifica, usando derivadas, que $\lim \dfrac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \dfrac{1}{2}$.

319. Sean $a_0, a_1, \dots, a_p$ números reales cuya suma es igual a cero. Justifica que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_p\sqrt{n+p}\right\} = 0$$

Sugerencia. Saca factor común $\sqrt{n}$, resta $a_0 + a_1 + \cdots + a_p$ y usa el ejercicio anterior.

320. Estudia la convergencia de la sucesión:

$$x_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

321. Prueba que la sucesión dada por $x_1 = 0$ y para $n \geqslant 2$:

$$x_n = \log(\log n) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k}$$

es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$.

322. Dados $0 < a_1 < b_1$, definamos para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Justifica que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama *media aritmético-geométrica* de a_1 y b_1).

323. Dados $0 < a_1 < b_1$, definamos para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

Justifica que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama *media aritmético-armónica* de a_1 y b_1).

324. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$, definamos:

$$a_1 = a,\ a_2 = b, \quad a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}a_n}{a_{n+1} + a_n}.$$

a) Prueba que las sucesiones $\{a_{2n}\}$ y $\{a_{2n-1}\}$ son monótonas.

b) Prueba que $|a_{2n} - a_{2n-1}| \leqslant \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$.

c) Justifica que $\{a_n\}$ converge y calcula su límite.

325. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones.

a) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$.

b) $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$.

c) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}$.

d) Dado $a \in]-2,-1[$, definimos $x_1 = a,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2}{x_n + 4}$.

e) Dado $a > 0$, definimos $x_1 = \sqrt{a},\ x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

f) $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3 - x_n^2}$.

g) Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, definimos $x_1 = a,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$.

h) Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos $x_1 = a,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{4} + (x_n)^2$.

i) Dado $a \in]-2,1[$, definimos $x_1 = a,\ 3x_{n+1} = 2 + (x_n)^3$.

Sugerencia. Estudia en cada caso monotonía y acotación. La convergencia puede depender del valor inicial de a.

326. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n), \qquad y_n = x_n - \frac{1}{n}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente e $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Deduce que ambas sucesiones convergen a un mismo número. Dicho número se llama la *constante de Euler*, se representa por la letra griega γ.

a) Deduce que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log(n)} = 1$.

b) Justifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right\} = \log 2$.

c) Justifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \log 2$.

327. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay dos sucesiones parciales $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_{s(n)}\}$ que convergen a un mismo número x y tales que $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a x.

328. Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que las sucesiones parciales $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{3n}\}$, son convergentes. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

329. ¿Puede existir alguna sucesión acotada, $\{x_n\}$, verificando que $|x_n - x_m| \geqslant 10^{-75}$ siempre que $n \neq m$? Razona tu respuesta.

330. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $M > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

Sugerencia. Teniendo en cuenta que para todos $n, h \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\rho^{n+h-1} + \rho^{n+h-2} + \cdots + \rho^n < \frac{\rho^n}{1-\rho}$$

deduce que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

331. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \rho |x_n - x_{n-1}|$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

Sugerencia. Justifica que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ donde M es una constante independiente de n.

332. Sea I un intervalo cerrado (puede ser $I = \mathbb{R}$); $f : I \to \mathbb{R}$ una función, y supongamos que hay un número $\alpha \in]0,1[$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|, \qquad \text{para todos } x, y \text{ en } I. \tag{7.8}$$

Se dice entonces que f es una **función contractiva** en I. Supongamos además que $f(x) \in I$ para todo $x \in I$. Dado un punto $a \in I$, definamos $\{x_n\}$ por $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in I$ que es el único punto fijo de f, es decir, $f(x) = x$.

b) Justifica que si la función f es derivable en I y se verifica que hay un número $\alpha \in]0,1[$ tal que $|f'(x)| \leqslant \alpha$ para todo $x \in I$, entonces f es contractiva en I.

333. Estudia la convergencia de las sucesiones definidas para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$a)\ \ x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}; \qquad b)\ \ x_1 = \sqrt{2},\ \ x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}.$$

334. Supongamos que la ecuación $x^2 = bx + a$ tiene dos raíces reales distintas α y β. Dados dos números reales λ y μ, definamos $\{x_n\}$ por:

$$x_1 = \lambda + \mu,\ \ x_2 = \lambda\alpha + \mu\beta,\ \ x_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n$$

Prueba que $x_n = \lambda\alpha^{n-1} + \mu\beta^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicaciones. i) La sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

se llama **sucesión de Fibonacci**. Calcula explícitamente x_n.

ii) Estudia la convergencia de la sucesión definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = a, \ x_2 = b, \quad x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n).$$

iii) Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, estudia la convergencia de la sucesión definida por:

$$a_1 = a, \ a_2 = b, \quad x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} x_n}.$$

335. Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

Sugerencia. Recuerda la definición del número e.

336. a) Prueba que la sucesión $\{u_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

es convergente.

b) Justifica que para todo $x \geqslant 0$ se verifica que:

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \log(1 + x) \leqslant x.$$

c) Utiliza dicha desigualdad para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \{u_n\}$.

337. a) Justifica, para $x > -1$, la desigualdad $\dfrac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \dfrac{x}{2}$.

b) Usa dicha desigualdad para calcular el límite de la sucesión $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right)$.

338. Dado $0 < \lambda < 1$, estudia la convergencia de la sucesión $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + \lambda^k)$.

Sugerencia. La desigualdad de las medias puede ser útil.

339. Sea $x_n = 1 + (-1)^n + (-1)^n \dfrac{1}{n}$ y $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Calcula $\lim\sup\{x_n\}$, $\lim\inf\{x_n\}$, $\sup(A)$ e $\inf(A)$.

7.2.9. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{152}}$ Dado $\varepsilon > 0$, calcula $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifique $|x_n - x| < \varepsilon$ donde x_n, x vienen dados en cada caso por:

$$a)\ x_n = \frac{2n+3}{3n-50},\ x = \frac{2}{3}; \qquad b)\ x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n},\ x = 0$$

$$c)\ x_n = \sqrt[n]{a}\ \ (a > 0),\ x = 1; \qquad d)\ x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n,\ x = 0$$

$$e)\ x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right),\ x = 0; \quad f)\ x_n = n^2 a^n\ \ (|a| < 1), x = 0$$

Sugerencia. Como consecuencia del binomio de Newton, para $x - 1 \geqslant 0$ se verifica que $x^n = (1 + (x-1))^n \geqslant 1 + n(x-1)$. Esta desigualdad, convenientemente usada, permite resolver con facilidad los casos b), c), d) y e).

Solución. Como regla general, en este tipo de ejercicios hay que "trabajar hacia atrás", esto es, se calcula y simplifica $|x_n - x|$ y se convierte la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ en otra equivalente a ella de la forma $n > \varphi(\varepsilon)$ donde $\varphi(\varepsilon)$ es un número que depende de ε. Basta entonces tomar m_ε como la parte entera de $\varphi(\varepsilon)$ más 1, $m_\varepsilon = E\big(\varphi(\varepsilon)\big) + 1$, con lo cual para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $n < \varphi(\varepsilon)$ y, por tanto, $|x_n - x| < \varepsilon$.

Este procedimiento admite muchos atajos. Hay que tener en cuenta que no se pide calcular el m_ε "óptimo", es decir, el menor valor posible de m_ε para el cual se verifica que $n \geqslant m_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$, sino que se pide calcular cualquier valor de m_ε para el cual sea cierta dicha implicación. Para ello es suficiente con obtener, a partir de la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$, otra desigualdad del tipo $n > \varphi(\varepsilon)$ de forma que se verifique la implicación $n > \varphi(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.

En este procedimiento hay que quitar valores absolutos. Esto siempre puede hacerse porque la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ equivale a las dos desigualdades $-\varepsilon < x - n - x < \varepsilon$. Con frecuencia, el número $x_n - x$ es siempre positivo o siempre negativo para todo $n \geqslant n_0$, lo que permite quitar directamente el valor absoluto y sustituirlo por la correspondiente desigualdad.

Por supuesto, en estos ejercicios hay que trabajar con un valor genérico de $\varepsilon > 0$, es decir, no está permitido considerar valores particulares de ε porque se trata de probar que una cierta desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$.

La verdad es que se tarda más en escribir lo anterior que en hacer el ejercicio porque las sucesiones que se dan son muy sencillas y la sugerencia muy útil.

a) Tenemos que
$$|x_n - x| = \left|\frac{2n+3}{3n-50} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{109}{9n-150}\right|.$$

El denominador es positivo para todo $n > 17$. Pongamos $n = 17 + k$ donde $k \in \mathbb{N}$. Entonces
$$|x_n - x| = \frac{109}{9n-150} = \frac{109}{3+9k} < \frac{109}{9k} < \frac{13}{k}.$$

Deducimos que para que se tenga $|x_n - x| < \varepsilon$ es suficiente que tomar $n = 17 + k$ donde k se elige de forma que $\frac{13}{k} < \varepsilon$, es decir, $k > \frac{13}{\varepsilon}$. Por tanto, poniendo $m_\varepsilon = 18 + E(\frac{13}{\varepsilon})$ podemos asegurar que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_n - x| < \varepsilon$.

Observa que las acotaciones $\frac{109}{3+9k} < \frac{109}{9k} < \frac{13}{k}$ no son imprescindibles; de hecho, podemos despejar k de la desigualdad $\frac{109}{3+9k} < \varepsilon$, pero las acotaciones hechas facilitan este paso (aunque se obtiene un valor de k mayor).

b) Tenemos que:

$$0 < x_n - 0 = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1\right).$$

Pongamos $z_n = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1$. Tenemos que $z_n \geqslant 0$ y, usando la sugerencia dada:

$$(1 + z_n)^3 = 1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + 3z_n \Longrightarrow z_n \leqslant \frac{1}{3n}$$

Deducimos que:

$$x_n = \sqrt[3]{n}\, z_n \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Por tanto:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon \Longrightarrow x_n < \varepsilon \Longrightarrow |x_n - 0| = x_n < \varepsilon$$

La desigualdad $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon$ se verifica para todo $n > \frac{1}{27\varepsilon^3}$. Por tanto, es suficiente tomar $m_\varepsilon = 1 + E\big(\frac{1}{27\varepsilon^3}\big)$.

Observa que la acotación $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ no es imprescindible; de hecho, podemos despejar n en la desigualdad $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < \varepsilon$, pero la acotación anterior facilita este paso (aunque se obtiene un valor mayor para n).

c) Sea $a > 1$. Entonces $1 < \sqrt[n]{a}$. Pongamos $z_n = |x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Tenemos que:

$$(1 + z_n)^n = a > 1 + nz_n \Longrightarrow z_n < \frac{a-1}{n}$$

Deducimos que:

$$\frac{a-1}{n} < \varepsilon \Longrightarrow z_n = |x_n - 1| < \varepsilon$$

La desigualdad $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$ se verifica para todo $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$. Por tanto, es suficiente tomar $m_\varepsilon = 1 + E\big(\frac{a-1}{\varepsilon}\big)$.

Si $0 < a < 1$, poniendo $b = \frac{1}{a}$ y usando lo ya visto, tenemos que:

$$0 < 1 - \sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} < \sqrt[n]{b} - 1 < \frac{b-1}{n} = \frac{1-a}{a}\frac{1}{n}$$

De donde se sigue que podemos tomar $m_\varepsilon = 1 + E\big(\frac{1-a}{a\varepsilon}\big)$.

e) Sea $x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$. Tenemos que:

$$0 < x_n = |x_n - 0| = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) = n\sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Pongamos $z_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1$. Tenemos que $z_n > 0$ y:

$$(1+z_n)^n = 1 + \frac{1}{n} > 1 + nz_n \Longrightarrow z_n < \frac{1}{n^2}.$$

Por tanto, usando la desigualdad 7.3, tenemos que:

$$|x_n - 0| = n\sqrt[n]{n}z_n < \frac{1}{n}\sqrt[n]{n} < \frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)0\frac{1}{n} + \frac{2}{n\sqrt[n]{n}} \leqslant \frac{3}{n}$$

Deducimos que tomando $m_\varepsilon = 1 + E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$, entonces para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_n - 0| < \varepsilon$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{153}}$ Sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales. Prueba que un número real, β, es el supremo de A si, y sólo si, β es un mayorante de A y hay alguna sucesión de puntos de A que converge a β.

Solución. Supongamos que $\beta = \sup(A)$. Entonces β es, claro está, un mayorante de A. Veamos que hay una sucesión de puntos de A que converge a β. Como β es el mínimo mayorante de A, ningún número menor que β puede ser mayorante de A. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, como $\beta - \varepsilon < \beta$, tiene que haber algún $a_\varepsilon \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a_\varepsilon$. En particular, para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ tiene que haber algún $a_n \in A$ tal que $\beta - \frac{1}{n} < a_n$ y, por supuesto, $a_n \leqslant \beta$. Deducimos así la existencia de una sucesión, $\{a_n\}$, de puntos de A que verifica $\beta - \frac{1}{n} < a_n \leqslant \beta$. Es claro que $\{a_n\} \to \beta$.

La afirmación recíproca te la dejo apara que la hagas tú. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{154}}$ Supuesto que $\lim\{x_n\} = x$, prueba que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tiene máximo y mínimo.

Solución. Los elementos de A son los términos de la sucesión junto con el límite de la misma. Observa que el conjunto A puede ser finito o infinito. El caso en que A es finito es trivial porque sabemos que todo conjunto finito tiene máximo y mínimo. Conviene considerar, por tanto, que A es infinito. La idea para hacer este ejercicio es la siguiente: aún siendo A infinito, todos sus elementos están en un intervalo de la forma $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, con la posible excepción de un número finito de elementos de A que pueden quedar fuera de dicho intervalo. Para probar que A tiene máximo debemos fijarnos en los elementos más grandes de A. Dichos elementos deberían estar a la derecha del número $x + \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Pero no tiene por qué haber ningún elemento de A en estas condiciones, y eso pasa justamente cuando x es el mayor elemento de A, en cuyo caso x sería el máximo de A.

Esto lleva a razonar de la siguiente forma. Si x es el máximo de A, hemos acabado. En otro caso, tiene que haber algún elemento en A, digamos $a \in A$ que sea mayor que x, $a > x$. Tomemos un $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon < a$ (por ejemplo $\varepsilon = (a-x)/2$). Entonces, todos los elementos de A están en $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ excepto un número finito de ellos que quedan fuera de dicho intervalo; además, como $a > x+\varepsilon$, el conjunto $B = \{u \in A : u > x+\varepsilon\}$ no es vacío ($a \in B$), es finito y, evidentemente, se tiene que $\max(B) = \max(A)$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{155}}$ a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que para todo $n \geqslant p$ es $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

b) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números no nulos verificando que $\lim \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lambda$, donde $0 \leqslant \lambda < 1$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

Aplicación. Dados $a \in]-1,1[$, $k \in \mathbb{N}$, prueba que $\lim\limits_{n\to\infty}\{n^k a^n\} = 0$.

Solución. *a)* Podemos hacer este apartado de dos maneras. La primera consiste en darse cuenta de que la hipótesis $|x_{n+1}| \leqslant \rho|x_n|$ para todo $n \geqslant p$, junto con que $0 < \rho < 1$, implica que la sucesión $\big\{|x_{n+p}|\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y, como es de números positivos, tiene que converger a un número $\alpha \geqslant 0$. Por tanto $\lim\{|x_n|\} = \alpha$. La desigualdad $|x_{n+1}| \leqslant \rho|x_n|$ implica que $\alpha \leqslant \rho\alpha$ y, como $0 < \rho < 1$, la única posibilidad para que dicha desigualdad se cumpla es que $\alpha = 0$.

Otra forma consiste en escribir para $n > p$:

$$|x_{n+1}| = \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}\frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|}\cdots\frac{|x_{p+1}|}{|x_p|}|x_p| \leqslant \rho^{n-p+1}|x_p| = \rho^{n+1}\frac{|x_p|}{\rho^p} = M\rho^{n+1}$$

donde hemos puesto $M = \frac{|x_p|}{\rho^p}$ que es una constante que no depende de n. La desigualdad anterior, teniendo en cuenta que, por ser $0 < \rho < 1$, se verifica que $\rho^n \to 0$, implica que $|x_n| \to 0$.

b) Tomando $\varepsilon > 0$ de forma que $\rho = \lambda + \varepsilon < 1$ (basta tomar $\varepsilon = (1-\lambda)/2$), se sigue que hay un número $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant p$ se verifica que:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leqslant \rho \Longrightarrow |x_{n+1}| \leqslant \rho|x_n|.$$

Y, por lo visto en el apartado anterior, concluimos que $\{x_n\} \to 0$.

La aplicación que se propone en este ejercicio es un resultado importante que debes memorizar.

Pongamos $x_n = n^k a^n$, donde se entiende que k es un número natural fijo y a es un número real con $|a| < 1$. Tenemos que:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k |a| \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |a| < 1.$$

Y podemos aplicar el resultado del punto anterior para concluir que $\lim\limits_{n\to\infty}\{n^k a^n\} = 0$.

Ejercicio resuelto $\boxed{156}$ Estudia la convergencia de las sucesiones siguientes.

$$a)\ x_n = \frac{2n+(-1)^n(n+2)}{7n+3} \qquad b)\ x_n = n\left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n$$
$$c)\ x_n = n^2\left(\frac{1+n}{3n}\right)^n \qquad d)\ x_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}\ \ (a>0, b>0)$$
$$e)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \qquad f)\ x_n = \frac{x^n}{n!}\ \ (x\in\mathbb{R})$$
$$g)\ x_n = \sqrt{n^2+3n+2}\ -\ n \qquad h)\ x_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)$$

Sugerencia. En algunos casos puede usarse el principio de las sucesiones encajadas o el ejercicio anterior.

Solución. *a)* Tenemos que $\{x_{2n}\}\to 3/7$, $\{x_{2n-1}\}\to 1/7$. Luego $\{x_n\}$ no converge porque tiene dos sucesiones parciales que convergen a límites distintos.

b) Tenemos que $0\leqslant x_n\leqslant n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ y, como $n\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ por lo visto en el ejercicio anterior, se sigue que $\{x_n\}\to 0$.

d) Sea $\alpha = \text{máx}\, a, b$. Entonces $\alpha\leqslant x_n\leqslant\sqrt[n]{2}\alpha$. Como $\sqrt[n]{2}\to 1$, concluimos que $\{x_n\}\to\alpha$.

e) Tenemos que:

$$\frac{n}{\sqrt{n+n^2}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n+n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1$, el principio de las sucesiones encajadas implica que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}} = 1$.

h)

$$\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right) = \frac{n^2+\sqrt{n}-n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{2}\,n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n\sqrt{n}}}+1}\to\sqrt{2}$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{157}$ Estudia la convergencia de la sucesión:

$$x_n = 2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

Solución. Estudiaremos la monotonía y acotación. Tenemos que:

$$x_{n+1}-x_n = 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}} >$$
$$> \frac{2n+1-2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

Por tanto $x_{n+1} > x_n$ y la sucesión es estrictamente creciente. Además:

$$x_{k+1}-x_k=2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Sumando estas desigualdades para $1 \leqslant k \leqslant n-1$ obtenemos que $x_n - x_1 < 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < 1$, de donde se sigue que $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por tanto es convergente.

Alternativamente, aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[k, k+1]$ tenemos que hay algún número $c \in]k, k+1[$ tal que:

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

Como $k < c < k+1$ se verifica que:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Deducimos que:

$$0 < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Y volvemos a obtener las acotaciones anteriores de forma más cómoda. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{158}}$ Prueba que la sucesión dada por $x_1 = 0$ y para $n \geqslant 2$:

$$x_n = \log(\log n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k}$$

es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$.

Solución. Tenemos que:

$$x_{k+1} - x_k = \log(\log(k+1)) - \log(\log k) - \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = \log(\log x))$ en el intervalo $[k, k+1]$ para $k \geqslant 2$, tenemos que hay algún número $c \in]k, k+1[$ tal que:

$$\log(\log(k+1)) - \log(\log k) = \frac{1}{c \log c}.$$

Como $k < c < k+1$ se verifica que:

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \frac{1}{c \log c} < \frac{1}{k \log k}.$$

Deducimos que:

$$0 < x_{k+1} - x_k < \frac{1}{k \log k} - \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}.$$

Esta desigualdad prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente. Además, sumando las desigualdades anteriores desde $k=2$ hasta $k=n$ resulta que:

$$x_{n+1}-x_2 < \frac{1}{2\log 2}-\frac{1}{(n+1)\log(n+1)} < \frac{1}{2\log 2}\Longrightarrow x_{n+1} < x_2+\frac{1}{2\log 2}=\log(\log 2).$$

Por tanto, la sucesión está mayorada y, como es creciente, es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{159}}$ Dados $0 < a_1 < b_1$, definamos para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, \quad a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

Justifica que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama *media aritmético-geométrica* de a_1 y b_1).

Solución. Teniendo en cuenta que la media geométrica de dos números es menor que su media aritmética, y que ambas están comprendidas entre dichos números, se sigue que $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. Volvemos a razonar ahora igual con $a_2 < b_2$ para obtener que $a_2 < a_3 < b_3 < b_2$. Este proceso puede continuarse indefinidamente. Deducimos que $\{a_n\}$ es creciente y $\{b_n\}$ es decreciente. Además, ambas están acotadas porque para todo $n\in\mathbb{N}$ es $a_1 < a_n < b_n < b_1$. Por tanto, ambas convergen. Pongamos $\{a_n\}\to a$ y $\{b_n\}\to b$. De la igualdad $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ se sigue que $a=\dfrac{a+b}{2}$, de donde se obtiene que $a=b$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{160}}$ Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones.

a) $x_1=1,\ x_{n+1}=\sqrt{3x_n}$.

b) $x_1=3,\ x_{n+1}=\dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$.

c) $x_1=1,\ x_{n+1}=\dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}$.

d) Dado $a\in]-2,-1[$, definimos $x_1=a,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n-2}{x_n+4}$.

e) Dado $a>0$, definimos $x_1=\sqrt{a},\ x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$.

f) $x_1=0,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{3-x_n^2}$.

g) Dado $a>0,\ a\neq 1$, definimos $x_1=a,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)$.

h) Dado $a\in\mathbb{R}$, definimos $x_1=a,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{4}+(x_n)^2$.

i) Dado $a\in]-2,1[$, definimos $x_1=a,\ 3x_{n+1}=2+(x_n)^3$.

Sugerencia. Estudia en cada caso monotonía y acotación. La convergencia puede depender del valor inicial de a.

Solución. En este tipo de ejercicios puede ser útil calcular de entrada, cuando sea posible y bajo el supuesto de que la sucesión sea convergente, el límite de la sucesión. Después deberemos probar que efectivamente la sucesión converge.

a) Supuesto que $\{x_n\} \to \alpha$, de la igualdad $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, se sigue que $\alpha = \sqrt{3\alpha}$, por lo que $\alpha = 3$. Observa que no hemos probado que $\{x_n\}$ sea convergente. Lo que hemos probado es que, suponiendo que $\{x_n\}$ sea convergente, entonces su límite es 3. Este dato nos ayudará en lo que sigue. Por ejemplo, como $x_1 = 1 < x_2 = \sqrt{3}$, podemos sospechar que $\{x_n\}$ es creciente. En tal caso debería verificarse que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Empezaremos probando esta desigualdad.

Tenemos que $x_1 = 1 < 3$; supuesto que $x_n < 3$ deducimos que $x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{9} = 3$. Luego, por inducción, concluimos que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos ahora que $\{x_n\}$ es creciente. Tenemos que:

$$3x_n = x_{n+1}^2 = x_{n+1}x_{n+1} < 3x_{n+1} \implies x_n < x_{n+1}$$

por tanto, la sucesión es estrictamente creciente y, como está mayorada por 3, es convergente y, por lo visto al principio, su límite es 3. ☺

b) Supuesto que $\{x_n\} \to \alpha$, de la igualdad $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$, se sigue que $\alpha = \dfrac{3+3\alpha}{3+\alpha}$, de donde resulta que $\alpha^2 = 3$, por lo que deberá ser $\alpha = \sqrt{3}$ ya que el límite debe ser un número no negativo pues, evidentemente, todos los términos de la sucesión son positivos. Observa que no hemos probado que $\{x_n\}$ sea convergente. Lo que hemos probado es que, suponiendo que $\{x_n\}$ sea convergente, entonces su límite es $\sqrt{3}$. Este dato nos ayudará en lo que sigue. Por ejemplo, como $x_1 = 3 > x_2 = 2$, podemos sospechar que $\{x_n\}$ es decreciente. En tal caso debería verificarse que $x_n > \sqrt{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Empezaremos probando esta desigualdad.

Claramente $x_1 = 3 > \sqrt{3}$. Por otra parte:

$$x_{n+1} > \sqrt{3} \iff \frac{3+3x_n}{3+x_n} > \sqrt{3} \iff 3+3x_n > 3\sqrt{3}+\sqrt{3}x_n \iff$$
$$\iff x_n\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) > 3(\sqrt{3}-1) \iff x_n > \sqrt{3}$$

Por tanto, si $x_n > \sqrt{3}$ también es $x_{n+1} > \sqrt{3}$. Luego, por inducción, concluimos que $x_n > \sqrt{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos ahora que $\{x_n\}$ es decreciente. Tenemos que:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0 \implies x_{n+1} < x_n$$

por tanto, la sucesión es estrictamente decreciente y, como está minorada por $\sqrt{3}$, es convergente y, por lo visto al principio, su límite es $\sqrt{3}$. ☺

7.32 Estrategia. Para estudiar las sucesiones recurrentes pueden usarse técnicas de derivadas; para ello hay que expresar la sucesión recurrente en la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, donde la función f generalmente es fácil de obtener a partir de la definición de la sucesión. En nuestro caso, tenemos que $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$, por lo que deberemos considerar la función $f(x) = \dfrac{3+3x}{3+x}$. Con ello, tenemos que $x_{n+1} = f(x_n)$. Esta relación, junto con $x_1 = 3$ determina la sucesión. Seguidamente, hay que elegir un intervalo donde la función f va a estar definida. Tenemos que elegir dicho intervalo de forma que la función tome valores en él. En nuestro caso, la elección es fácil pues, si $x \geqslant 0$ también es $f(x) \geqslant 0$, por ello vamos a considerar que f está definida en $\mathbb{R}_o^+$. Podemos volver a enunciar nuestro ejercicio como sigue.

Sea $f:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ la función dada para todo $x\geqslant 0$ por $f(x)=\dfrac{3+3x}{3+x}$. Definamos $\{x_n\}$ por $x_1=3$ y $x_{n+1}=f(x_n)$. Estudiar la convergencia de $\{x_n\}$.

Lo primero que debemos observar es que la sucesión está bien definida pues $x_1=3>0$ y, supuesto que $x_n>0$, también es $x_{n+1}=f(x_n)>0$ por lo que tiene sentido $f(x_{n+1})$. Si la sucesión converge, su límite debe ser un número $\alpha\geqslant 0$ y, por ser f continua, f permuta con el límite, por lo que debe verificarse que

$$\alpha=\text{lím}\{x_{n+1}\}=\text{lím}\{f(x_n)\}=f(\text{lím}\{x_n\})=f(\alpha).$$

De donde se obtiene que $\alpha=\sqrt{3}$.

Para estudiar la monotonía calculamos la derivada de f. Tenemos que $f'(x)=\dfrac{6}{(3+x)^2}$. Como $f'(x)>0$, se sigue que f es estrictamente creciente. Como $x_1=3>x_2=f(x_1)=2$ y, al ser creciente, f conserva las desigualdades, se sigue que $x_2=f(x_1)>f(x_2)=x_3$. Este proceso puede seguirse indefinidamente, esto es, la misma relación de orden que hay entre dos términos consecutivos se conserva siempre:

$$x_n>x_{n+1}\quad\Longrightarrow\quad x_{n+1}=f(x_n)>f(x_{n+1})=x_{n+2}.$$

Obtenemos así que $\{x_n\}$ es decreciente. Además, como es de términos positivos, está minorada, luego es convergente. Su límite ya sabemos que es $\sqrt{3}$.

Observa que, al proceder de esta forma, podemos probar muy fácilmente el decrecimiento de la sucesión, sin necesidad de probar previamente que $x_n>\sqrt{3}$.

Las sucesiones recurrentes del tipo $x_{n+1}=f(x_n)$ donde f es una función continua, cuando son convergentes, $\{x_n\}\to\alpha$, su límite viene dado por $\alpha=f(\alpha)$, es decir, es un *punto fijo* de la función f.

e) Definamos $f:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\sqrt{a+x}$. La sucesión está dada por $x_1=\sqrt{a}$ y $x_{n+1}=f(x_n)$. Como f es continua, si la sucesión es convergente, su límite debe ser un punto fijo de f, es decir, debe ser solución de la ecuación $\alpha=f(\alpha)$, lo que implica que $\alpha^2=a+\alpha$ y deducimos que

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},$$

donde hemos elegido la solución positiva de la ecuación. Puesto que $x_1=\sqrt{a}<x_2=\sqrt{2a}$ y, evidentemente, f es estrictamente creciente, se sigue $x_2=f(x_1)<f(x_2)=x_3$ y, en general, $x_n<x_{n+1}$. Por tanto $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Veamos que está mayorada. Probaremos que $x_n<\alpha$. Claramente $x_1=\sqrt{a}<\alpha$. Supongamos que $x_n<\alpha$. Entonces:

$$x_{n+1}^2=a+x_n<a+\alpha=\alpha^2\quad\Longrightarrow\quad x_{n+1}<\alpha$$

Concluimos, por inducción, que $x_n<\alpha$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por tanto converge y su límite es α.

Para $a = 1$, tenemos que:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \text{lím} \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

☺

f) Tenemos que $x_1 = 0$ y $x_{n+1} = \dfrac{1}{3-x_n^2}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{3-x^2}$. La sucesión que nos dan está definida por $x_1 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. La derivada de f viene dada por $f'(x) = \dfrac{2x}{(3-x^2)^2}$. Debemos considerar definida la función f en un intervalo I que contenga el 0 (porque $x_2 = f(0) = 1/3$) y de forma que $f(I) \subset I$. Como $f(0) = 1/3$ debe estar en I, deberá ser $I \subset [0, \sqrt{3}[$. Como f es creciente en $[0, \sqrt{3}[$ y $f(1) = 1/2$, se sigue que $f([0,1]) \subset [0, 1/2] \subset [0,1]$.

Consideraremos en lo que sigue que la función f está definida en el intervalo $[0,1]$. Como $f([0,1]) \subset [0,1]$ y los valores de la sucesión $\{x_n\}$ son valores de f obtenidos por aplicación reiterada de f a partir del valor inicial $x_1 = 0 \in [0,1]$, dichos valores están siempre en $[0,1]$. Por tanto $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f es estrictamente creciente en $[0,1]$ y $x_1 = 0 < x_2 = f(0) = 1/3$, se sigue que $x_2 = f(x_1) < f(x_2) = x_3$ y, en general, supuesto que $x_{n-1} < x_n$, se sigue que $x_n = f(x_{n-1}) < f(x_n) = x_{n+1}$. Luego $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Como está acotada, concluimos que $\{x_n\}$ es convergente. Sea $\{x_n\} \to \alpha$. Como $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, se sigue que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Además, como f es continua en $[0,1]$, α debe ser un punto fijo de f, esto es, $f(\alpha) = \alpha$. Deducimos que α verifica la ecuación $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$.

Las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ no son inmediatas de calcular pero podemos decir algunas cosas sobre ellas. Pongamos $h(x) = x^3 - 3x + 1$. Tenemos que $h(-2) = -1 < 0$, $h(0) = 1 > 0$, $h(1) = -1 < 0$ y $h(2) = 3 > 0$. Deducimos que en cada uno de los intervalos $]-2, 0[$, $]0,1[$ y $]1,2[$ hay una única raíz de la ecuación. Por tanto, la sucesión dada converge a la única raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ que está en $]0,1[$. ☺

g) Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, definimos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$. Tenemos, evidentemente, que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(2x + \dfrac{a}{x^2}\right)$ donde, en principio, $x > 0$. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,\frac{x^3 - a}{x^3}$$

Deducimos que $f'(x) < 0$ para $0 < x < \sqrt[3]{a}$ y $f'(x) > 0$ para $x > \sqrt[3]{a}$. Por tanto f es estrictamente decreciente en $]0, \sqrt[3]{a}]$ y estrictamente creciente en $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$. Concluimos que en $\sqrt[3]{a}$ la función f tiene un mínimo absoluto en $\mathbb{R}^+$. Como todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ son (con la posible excepción del primero $x_1 = a$) valores que toma f en puntos de $\mathbb{R}^+$, se sigue que $x_n > f(\sqrt[3]{a})$ para todo $n \geqslant 2$. Un calculo inmediato da $f(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}$, es decir, resulta que $\sqrt[3]{a}$ es un punto fijo de f en $\mathbb{R}^+$. Como f es continua en $\mathbb{R}^+$, si $\{x_n\}$ es convergente dicho punto debe ser el límite de $\{x_n\}$. Pero antes debemos probar que $\{x_n\}$ es convergente.

Para estudiar la monotonía debemos tener en cuenta que como $x_n > \sqrt[3]{a}$ para todo $n \geqslant 2$, todos los términos de la sucesión están en el intervalo $I = [\sqrt[3]{a}, +\infty[$. No es por eso restrictivo suponer que $a > 1$ (porque si fuera $0 < a < 1$, podemos eliminar el primer término de la sucesión lo que no afecta para nada a su estudio). Comparemos x_1 con x_2. Tenemos que:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{3}\left(a - \frac{a}{a^2}\right) - a = \frac{2a^2+1}{3a} - a = \frac{1-a^2}{3a} < 0$$

Por tanto se tiene que $x_2 < x_1$ y, como f es estrictamente creciente en I, las desigualdades se conservan por f, luego, supuesto que $x_n < x_{n-1}$, se tiene también que $x_{n+1} = f(x_n) < f(x_{n-1}) = x_n$. Resulta así que $\{x_n\}$ es decreciente. Además es de términos positivos (de hecho mayores que $\sqrt[3]{a}$), luego $\{x_n\}$ es convergente y su límite es $\sqrt[3]{a}$. ☺

h) Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{4} + x^2$. Tenemos que $f(x) \geqslant \frac{1}{4}$. Como los términos de la sucesión dada, con la posible excepción del primero, son todos ellos valores de f, se cumple que $x_n \geqslant \frac{1}{4}$ para todo $n \geqslant 2$. No es restrictivo por eso suponer que $a \geqslant \frac{1}{4}$. Pongamos $I = [1/4, +\infty[$. Tenemos que $f(I) \subset I$. Como $f'(x) = 2x$, se sigue que f es estrictamente creciente en I. Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ será monótona creciente si $x_1 \leqslant x_2$ y será monótona decreciente si $x_2 < x_1$. Tenemos que:

$$x_1 \leqslant x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a \leqslant a^2 + \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant a^2 + \frac{1}{4} - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$$

Deducimos que se verifica $x_1 \leqslant x_2$ y, por tanto, la sucesión es creciente. Cuando dicha sucesión esté mayorada será convergente y su límite debe ser un punto fijo de f en I. Tenemos que $f(x) = x$ es lo mismo que $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, esto es, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, cuya única solución es $x = 1/2$. En consecuencia, la sucesión $\{x_n\}$ será convergente a $\frac{1}{2}$ solamente cuando $x_n \leqslant \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, $a^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}$, que equivale a que $a^2 \leqslant \frac{1}{4}$, esto es, $|a| \leqslant \frac{1}{2}$ y, como $a \geqslant \frac{1}{4}$, resulta que debe ser $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. Deducimos también que para $a > \frac{1}{2}$, la sucesión no puede ser convergente y, al ser creciente, no está mayorada. Observa que cuando $a = \frac{1}{2}$ resulta la sucesión constante $x_n = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\mathbf{161}}$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n), \qquad y_n = x_n - \frac{1}{n}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente e $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Deduce que ambas sucesiones convergen a un mismo número. Dicho número se llama la *constante de Euler*, se representa por la letra griega γ.

a) Deduce que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log(n)} = 1$.

b) Justifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right\} = \log 2$.

c) Justifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \log 2$.

Solución. Tenemos que:

$$x_n - x_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Desigualdad que es consecuencia de que $\log(1+x) < x$ para todo $x > 0$. También podemos tomar logaritmos en las desigualdades 7.5 para obtener que:

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Deducimos que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente. Tenemos también:

$$y_n - y_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < 0.$$

Deducimos que $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_1 < x_n < y_n < y_1$, por lo que ambas sucesiones están acotadas. Concluimos que dichas sucesiones convergen. Como $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, deducimos que $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$.

a)

$$\frac{1+1/2+\cdots+1/n}{\log(n)} = \frac{\log n + x_n}{\log n} = 1 + \frac{x_n}{\log n}.$$

Como $\{x_n\}$ es convergente y $\dfrac{1}{\log n} \to 0$, se sigue que $\dfrac{x_n}{\log n} \to 0$.

b) Pongamos $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Tenemos que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n = x_{2n} + \log(2n) - x_n + \log n = x_{2n} - x_n + \log 2$$

Como $\{x_{2n}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ se tiene que $\{x_{2n} - x_n\} \to \gamma - \gamma = 0$.

c) Pongamos $A_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n
\end{aligned}$$

Por el apartado anterior, tenemos que $\lim\{A_{2n}\} = \log 2$. Como $A_{2n-1} = A_{2n} + \frac{1}{2n}$, deducimos que también $\lim\{A_{2n-1}\} = \log 2$. Concluimos que (ver ejercicio resuelto 162) $\lim\{A_n\} = \log 2$.

La sucesión $\{A_n\}$ se llama **serie armónica alternada**.

7.33 Estrategia. Para calcular límites donde interviene la serie armónica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

puede ser conveniente escribir dicha sucesión como $H_n = \log n + \gamma_n$ donde $\{\gamma_n\} \to \gamma$.

Ejercicio resuelto $\boxed{162}$ Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay dos sucesiones parciales $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_{s(n)}\}$ que convergen a un mismo número x y tales que $\sigma(\mathbb{N})\cup s(\mathbb{N})=\mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a x.

Solución. Dado $\varepsilon>0$, existen números naturales m_ε y n_ε tales que $|x_{\sigma(n)}-x|<\varepsilon$ para todo $n\geqslant m_\varepsilon$ y $|x_{s(n)}-x|<\varepsilon$ para todo $n\geqslant n_\varepsilon$. Sea $p=\max\{m_\varepsilon,n_\varepsilon\}$ y pongamos $A=\{\sigma(n):n\geqslant p\}\cup\{s(n):n\geqslant p\}$. Como, por hipótesis es $\sigma(\mathbb{N})\cup s(\mathbb{N})=\mathbb{N}$, se sigue que el conjunto $B=\mathbb{N}\setminus A$ es finito pues $B\subset\{\sigma(n):1\leqslant n<p\}\cup\{s(n):1\leqslant n<p\}$. Definamos $m=\max(B)+1$. Para $q\geqslant m$ se tiene que $q\notin B$, o sea, $q\in A$, es decir, q es de la forma $q=\sigma(n)$ o $q=s(n)$ con $n\geqslant p$, en cualquier caso se verifica que $|x_q-x|<\varepsilon$.

Este resultado suele aplicarse cuando $\sigma(n)=2n$ y $s(n)=2n-1$, es decir, a las sucesiones parciales de los términos pares e impares. Cuando sabemos que $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n-1}\}$ convergen a un mismo número, podemos concluir que $\{x_n\}$ converge a dicho número.

Este resultado puede generalizarse de manera fácil. Por ejemplo si $\{x_{3n}\}$, $\{x_{3n-1}\}$ y $\{x_{3n-2}\}$ convergen todas a un mismo número, también $\{x_n\}$ converge a dicho número. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{163}$ Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que hay números $\rho\in]0,1[$, $M>0$ y $p\in\mathbb{N}$ tales que $|x_{n+1}-x_n|\leqslant M\rho^n$ para todo $n\geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

Sugerencia. Teniendo ahora en cuenta que para todos $n,h\in\mathbb{N}$ se verifica que:

$$\rho^{n+h-1}+\rho^{n+h-2}+\cdots+\rho^n<\frac{\rho^n}{1-\rho}$$

deduce que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

Solución. Sean $n,h\in\mathbb{N}$, tenemos:

$$|x_{n+h}-x_n|=\left|\sum_{k=1}^{h-1}(x_{n+k+1}-x_{n+k})\right|\leqslant\sum_{k=0}^{h-1}|x_{n+k+1}-x_{n+k}|\leqslant M\sum_{k=0}^{h-1}\rho^{n+k}=$$

$$=M\rho^n\sum_{k=0}^{h-1}\rho^k=M\rho^n\frac{1-\rho^h}{1-\rho}<\rho^n\frac{M}{1-\rho}=K\rho^n$$

Donde hemos puesto $K=\dfrac{M}{1-\rho}$, que es una constante independiente de n y de h. Deducimos que:

$$K\rho^n<\varepsilon \implies |x_{n+h}-x_n|<\varepsilon \quad \text{para todo } h\in\mathbb{N}$$

Dado $\varepsilon>0$, determinamos m_ε por la condición de que $\rho^{m_\varepsilon}<\varepsilon/K$. Entonces para todo $n\geqslant m_\varepsilon$ y *para todo* $h\in\mathbb{N}$ se verifica que $|x_{n+h}-x_n|<\varepsilon$, lo que prueba que la sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{164}$ Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen $\rho\in]0,1[$, $p\in\mathbb{N}$, tales que $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\rho|x_n-x_{n-1}|$ para todo $n>p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

Sugerencia. Justifica que $|x_{n+1}-x_n|\leqslant M\rho^n$ donde M es una constante independiente de n.

Solución. Es muy fácil, basta iterar la desigualdad del enunciado. Sea $n > p$:

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \rho |x_n - x_{n-1}| \leqslant \rho^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \rho^{n-p} |x_{p+1} - x_p| = M\rho^n.$$

Donde $M = \dfrac{|x_{p+1} - x_p|}{\rho^p}$ es una constante independiente de n. El ejercicio anterior nos dice que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{165}$ Sea I un intervalo cerrado (puede ser $I = \mathbb{R}$); $f : I \to \mathbb{R}$ una función, y supongamos que hay un número $\alpha \in]0, 1[$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|, \qquad \text{para todos } x, y \text{ en } I. \tag{7.9}$$

Se dice entonces que f es una **función contractiva** en I. Supongamos además que $f(x) \in I$ para todo $x \in I$. Dado un punto $a \in I$, definamos $\{x_n\}$ por $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in I$ que es el único punto fijo de f, es decir, $f(x) = x$.

b) Justifica que si la función f es derivable en I y se verifica que hay un número $\alpha \in]0, 1[$ tal que $|f'(x)| \leqslant \alpha$ para todo $x \in I$, entonces f es contractiva en I.

Solución. a) Es consecuencia inmediata del ejercicio anterior.

b) Es consecuencia inmediata del teorema del valor medio. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{166}$ Estudia la convergencia de las sucesiones definidas para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$a)\ \ x_1 = 1, \ \ x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}; \qquad b)\ \ x_1 = \sqrt{2}, \ \ x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}.$$

Solución. a) Consideremos la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. La sucesión que nos piden estudiar es la sucesión de iteradas de dicha función a partir del valor inicial $x_1 = 1$. Como $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$, la función f es estrictamente decreciente. Por tanto, la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ no es monótona. Pues si, por ejemplo es $x_{n-1} < x_n$, como f, al ser decreciente, invierte las desigualdades, se tendrá que $x_n = f(x_{n-1}) > f(x_n) = x_{n+1}$.

Es evidente que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $1 + x_n > 1 \Longrightarrow x_{n+1} < 1$, luego $x_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $1 + x_n \leqslant 2 \Longrightarrow x_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$. Deducimos que todos los términos de la sucesión están en el intervalo $I = [1/2, +\infty[$. Para $x \geqslant 1/2$ se tiene que $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$. Podemos aplicar, por tanto, el ejercicio anterior y deducimos que $\{x_n\}$ es convergente. Además, su límite es el único punto fijo de f en I, que viene dado por $x = \dfrac{1}{1+x} \Longrightarrow x^2 + x - 1 = 0$, de donde, $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{167}$ Supongamos que la ecuación $x^2 = bx + a$ tiene dos raíces reales distintas α y β. Dados dos números reales λ y μ, definamos $\{x_n\}$ por:

$$x_1 = \lambda + \mu, \ \ x_2 = \lambda\alpha + \mu\beta, \ \ x_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n$$

Prueba que $x_n = \lambda\alpha^{n-1} + \mu\beta^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicaciones. i) La sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$x_1=x_2=1,\quad x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$$

se llama **sucesión de Fibonacci**. Calcula explícitamente x_n.

ii) Estudia la convergencia de la sucesión definida para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$x_1=a,\ x_2=b,\quad x_{n+2}=\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_n).$$

Solución. La igualdad $x_n=\lambda\alpha^{n-1}+\mu\beta^{n-1}$ es cierta para $n=1$ y para $n=2$. Sea $n\in\mathbb{N}$, con $n\geqslant 2$, y supongamos que la igualdad se verifica para todo $k\in\mathbb{N}$ con $k\leqslant n$. Entonces, teniendo en cuenta que $\alpha^2=b\alpha+a$ y $\beta^2=b\beta+a$, tenemos que:

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=bx_n+ax_{n-1}=b\lambda\alpha^{n-1}+b\mu\beta^{n-1}+a\lambda\alpha^{n-2}+a\mu\beta^{n-2}=\\&=\lambda(b\alpha+a)\alpha^{n-2}+\mu(b\mu+a)\beta^{n-2}=\lambda\alpha^n+\mu\beta^n\end{aligned}$$

Lo que prueba la igualdad para $n+1$. Concluimos, por inducción, que la igualdad es cierta para todo $n\in\mathbb{N}$.

i) Como $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, deducimos que $a=b=1$. Por tanto, α y β son las raíces de $x^2=x+1$, las cuales vienen dadas por:

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\qquad \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Calculemos λ y μ por las condiciones $x_1=1=\lambda+\mu=, x_2=1=\lambda\alpha+\mu\beta$. Fácilmente se obtiene que:

$$\lambda=\frac{5-\sqrt{5}}{2},\qquad \mu=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Deducimos, por lo antes visto, que:

$$x_n=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{5+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

iii) Pongamos $x_1=a^1b^0$, $x_2=a^0b^1$, $x_n=a^{p_n}b^{q_n}$. Entonces:

$$x_{n+2}=a^{p_{n+2}}b^{q_{n+2}}=a^{\frac{1}{2}(p_{n+1}+p_n)}b^{\frac{1}{2}(q_{n+1}+q_n)}.$$

Tenemos las ecuaciones:

$$p_1=1,\ p_2=0,\ 2p_{n+2}=p_{n+1}+p_n,\qquad q_1=0,\ q_2=1,\ 2q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$$

Ambas ecuaciones son de la forma $2x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ por lo que $a=b=1$ y α y β son las raíces de $2x^2=x+1$. Por tanto $\alpha=1$, $\beta=-\frac{1}{2}$. En consecuencia:

$$p_n=\lambda_1+\mu_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\qquad q_n=\lambda_2+\mu_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

Debemos ahora calcular λ_1,μ_1 y λ_2,μ_2 para que se verifiquen las respectivas condiciones iniciales $p_1=1, p_2=0$ y $q_1=0, q_2=1$. Fácilmente se obtiene que $\lambda_1=\frac{1}{3}$, $\mu_1=\frac{2}{3}$, $\lambda_2=\frac{2}{3}$, $\mu_2=-\frac{2}{3}$. Deducimos que:

$$x_n=a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}b^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\longrightarrow a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{ab^2}.$$

☺

7.3. Sucesiones divergentes. Indeterminaciones en el cálculo de límites

Las sucesiones que no son convergentes pueden tener comportamientos muy variados. Por ejemplo, una sucesión acotada que tenga dos valores de adherencia diferentes no es convergente, los términos de dicha sucesión se aproximan a un valor de adherencia o al otro, antiguamente se decía que la sucesión "oscilaba" entre estos valores. Pero una sucesión acotada no convergente puede tener muchos valores de adherencia. No debes hacerte una idea demasiado esquemática de las sucesiones. En el capítulo 5 hemos visto que el conjunto de los números racionales es numerable, esto significa que es posible escribir todos los números racionales como los términos de una sucesión y también podemos hacerlo con los racionales que están en el intervalo $[0,1]$. Pongamos $\mathbb{Q}\cap[0,1] = = \{r_n : n\in\mathbb{N}\}$. La sucesión $\{r_n\}$ es acotada y, como consecuencia de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ (proposición 5.11), dicha sucesión tiene como valores de adherencia *todos* los puntos del intervalo $[0,1]$.

Vamos a estudiar ahora un tipo muy particular de sucesiones *no convergentes* pero que presentan una gran regularidad.

7.34 Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es **positivamente divergente**, y escribimos $\{x_n\}\to+\infty$, si para todo número real $K>0$ existe un número natural $m_K\in\mathbb{N}$, tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n\geqslant m_K$ se verifica que $x_n\geqslant K$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es **negativamente divergente**, y escribimos $\{x_n\}\to-\infty$, si para todo número real $K<0$ existe un número natural $m_K\in\mathbb{N}$, tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n\geqslant m_K$ se verifica que $x_n\leqslant K$.

Diremos que una sucesión es **divergente** para indicar que es positivamente o negativamente divergente.

7.35 Observación. Es importante que te des cuenta de que "divergente" no es sinónimo de "no convergente". Las sucesiones acotadas no convergentes no son tampoco divergentes. Sin embargo, muchos textos usan la expresión "sucesión divergente" con el significado de "sucesión no convergente". También es lamentablemente frecuente llamar "sucesiones oscilantes" a las sucesiones acotadas no convergentes. No te dejes confundir: una sucesión o es convergente o no es convergente. Un *tipo especial de sucesiones no convergentes* son las sucesiones positivamente divergentes y negativamente divergentes. Eso es todo, lo demás son ganas de confundir al lector.

En la siguiente proposición se exponen algunas propiedades elementales, pero importantes, de las sucesiones divergentes. Puesto que $\{x_n\}\to+\infty$ si, y sólo si $\{-x_n\}\to-\infty$, es suficiente enunciar dichas propiedades para sucesiones positivamente divergentes.

7.36 Proposición. *i)* $\{|x_n|\}\to+\infty$ *si, y sólo si,* $\{1/x_n\}\to 0$.

ii) La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión acotada es una sucesión positivamente divergente.

iii) La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

iv) El producto de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

v) El producto de una sucesión positivamente divergente por una sucesión que converge a un número positivo es otra sucesión positivamente divergente.

Frecuentemente hay que estudiar la convergencia o divergencia de una suma o producto de dos sucesiones precisamente cuando las reglas que hemos visto en secciones anteriores no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ no está determinado por el de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Por ejemplo, si sabemos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{y_n\} \to -\infty$, ¿qué podemos decir del comportamiento de la sucesión $\{x_n + y_n\}$? Respuesta: absolutamente nada. Baste para convencerse de ello la consideración de los siguientes casos:

$$\begin{array}{lll} x_n = 2n, & y_n = -n; & \{x_n + y_n\} = \{n\} \to +\infty \\ x_n = n, & y_n = -2n; & \{x_n + y_n\} = \{-n\} \to -\infty \\ x_n = n+1, & y_n = -n; & \{x_n + y_n\} = \{1\} \to 1 \\ x_n = (-1)^n + n, & y_n = (-1)^n - n; & \{x_n + y_n\} = \{2(-1)^n\} \end{array}$$

En consecuencia, las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Análogamente, si sabemos que $\{x_n\} \to 0$ y que $\{y_n\}$ es divergente, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n y_n\}$; la cual se dice que es **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$". Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos sucesiones divergentes o de dos sucesiones que convergen a cero, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

El siguiente resultado permite resolver en muchas ocasiones indeterminaciones de la forma "∞/∞".

7.37 Teorema (**Criterio de Stolz**). *Sea $\{y_n\}$ una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente y sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que*

$$\left\{ \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \right\} \to L$$

donde $L \in \mathbb{R}$, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica también que $\left\{ \dfrac{x_n}{y_n} \right\} \to L$.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $L \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe, por hipótesis, un número natural k, tal que para todo $n \geqslant k$ se verifica que

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así todas las fracciones

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k}, \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{y_{k+2} - y_{k+1}}, \cdots, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

se encuentran comprendidas entre $L-\varepsilon/2$ y $L+\varepsilon/2$, por lo que, usando el ejercicio 8, obtenemos que:

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_k}{y_{n+1}-y_k}<L+\frac{\varepsilon}{2} \tag{7.10}$$

cualquiera sea $n\geqslant k$. Teniendo en cuenta ahora la igualdad

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-L=\frac{x_k-Ly_k}{y_{n+1}}+\left(1-\frac{y_k}{y_{n+1}}\right)\left(\frac{x_{n+1}-x_k}{y_{n+1}-y_k}-L\right)$$

deducimos que:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-L\right|\leqslant\left|\frac{x_k-Ly_k}{y_{n+1}}\right|+\left|\frac{x_{n+1}-x_k}{y_{n+1}-y_k}-L\right|. \tag{7.11}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(x_k-Ly_k)/y_{n+1}\right\}=0$, existe un número natural q tal que, para todo $n\geqslant q$, se verifica

$$\left|\frac{x_k-Ly_k}{y_{n+1}}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Teniendo en cuenta (7.10) y (7.11), deducimos que para todo $n\geqslant \max\{k,q\}$ se verifica que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-L\right|<\varepsilon.$$

Hemos probado, pues, que $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n/y_n\}=L$.

Supongamos ahora que $L=+\infty$. En tal caso, para todo $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande, se tendrá que $x_{n+1}-x_n>y_{n+1}-y_n>0$, por lo que la sucesión $\{x_n\}$ es, a partir de un término en adelante, estrictamente creciente. Supondremos, pues no es restrictivo hacerlo, que dicha sucesión es toda ella estrictamente creciente y que $x_{q+1}-x_q>y_{q+1}-y_q$ para todo $q\in\mathbb{N}$. Sumando estas desigualdades desde $q=1$ hasta $q=n$, resulta $x_{n+1}-x_1>y_{n+1}-y_1$. Y, como $\{y_n\}\to+\infty$, deducimos que $\{x_n\}\to+\infty$. Podemos usar ahora lo ya probado, intercambiando las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, para obtener que

$$\lim\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}=\lim\left\{\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}\right\}=0.$$

De donde se sigue que $\{x_n/y_n\}\to+\infty$.

El caso $L=-\infty$ se reduce al previo cambiando la sucesión $\{x_n\}$ por $\{-x_n\}$. □

Es importante observar que, aún en las hipótesis del Criterio de Stolz, puede ocurrir que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ sea convergente pero no lo sea $\left\{\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$; es decir, el Criterio de Stolz da una condición suficiente pero no necesaria para la convergencia o divergencia de $\{x_n/y_n\}$ (ver ejercicio 175).

Observa que el criterio de Stolz recuerda a la regla de L'Hôpital donde las derivadas han sido sustituidas por las diferencias consecutivas. Del Criterio de Stolz se deducen dos útiles criterios para estudiar la convergencia de sucesiones de medias aritméticas o geométricas.

7.38 Proposición (Criterio de la media aritmética). *Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde L es un número real, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica que*

$$\left\{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right\} \to L.$$

Demostración. Basta aplicar el Criterio de Stolz a las sucesiones $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $y_n = n$. □

7.39 Proposición (Criterio de la media geométrica). *Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que*

$$\left\{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right\} \to L.$$

Demostración. Lo afirmado se deduce del criterio de la media aritmética teniendo en cuenta que

$$\log\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right) = \frac{\log(a_1) + \log(a_2) + \cdots + \log(a_n)}{n}$$

y la proposición 7.46. □

7.40 Corolario. *Supongamos que $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que $\{\sqrt[n]{x_n}\} \to L$.*

Demostración. Basta aplicar el criterio de la media geométrica a la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

7.3.1. Sucesiones y límite funcional

El siguiente resultado establece una relación entre límite funcional y límite de sucesiones que es de gran utilidad práctica, pues proporciona una estrategia general para calcular límites de sucesiones y permite utilizar para ello las técnicas conocidas para calcular límites funcionales.

7.41 Proposición. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:*

i) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = L$.

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to a$ con $x_n \neq a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$.

Demostración. $i) \Longrightarrow ii)$. Supongamos que $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = L$ y sea $\{x_n\} \to a$ con $x_n \in A$ y $x_n \neq a$. Debemos probar que $suc f(x_n) \to L$. Consideremos el caso en que a y L son números reales. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$

se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Como $\{x_n\} \to a$, existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|x_n - a| < \delta$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n \in A$, $x_n \neq a$ y $|x_n - a| < \delta$; en consecuencia, se verificará que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Hemos probado así que $\{f(x_n)\} \to L$.

Para probar que $ii) \Longrightarrow i)$, probaremos que $no i) \Longrightarrow no ii)$. Que f no tiene límite en a igual a L, quiere decir que *existe* un $\varepsilon_0 > 0$, tal que *para todo* $\delta > 0$ hay *algún punto* $x_\delta \in A$, con $x_\delta \neq a$ y $|x_\delta - a| < \varepsilon_0$ pero $|f(x_\delta) - L| \geqslant \varepsilon_0$. Tomando para cada $n \in \mathbb{N}$ $\delta = \frac{1}{n}$, obtenemos un $x_n \in A$ con $x_n \neq a$ y $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ pero $|f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon_0$. Claramente se tiene que $\{x_n\} \to a$, con $x_n \in A$ y $x_n \neq a$ pero $\{f(x_n)\}$ no converge a L.

Los demás casos en que o bien a o L son infinitos se hacen de manera parecida. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es que todo límite funcional que conozcas te va a permitir resolver *muchos* límites de sucesiones. En particular, de la lista de límites básicos que debes conocer se deducen los siguientes resultados.

7.42 Proposición. *Para toda sucesión* $\{x_n\} \to 0$ *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,sen} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \operatorname{sen} x_n}{(x_n)^3} = \frac{1}{6} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \alpha \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n - x_n}{(x_n)^3} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n) - x_n}{x_n^2} = \frac{-1}{2}$$

7.43 Estrategia. Una estrategia para calcular límites de sucesiones consiste en convertir el límite de la sucesión que tienes que calcular en un caso particular de un límite funcional. El por qué de esta estrategia es que para calcular límites de funciones disponemos de muchas más herramientas que las que tenemos para trabajar directamente con sucesiones.

Según esta estrategia, para calcular el límite de una sucesión $\{y_n\}$ lo que hay que hacer es relacionar dicho límite con un límite funcional. Debemos inventarnos una función, f, y una sucesión convergente, $\{x_n\} \to a$, de forma que se tenga $y_n = f(x_n)$. Entonces, podemos asegurar que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$, también es $\lim\{y_n\} = \alpha$.

7.44 Ejemplo. Se trata de calcular el límite de la sucesión $y_n = \dfrac{\log(n)}{n(\sqrt[n]{n} - 1)}$.

Para ello nos fijamos en que en el denominador aparece $\sqrt[n]{n} - 1$. Poniendo $x_n = \sqrt[n]{n}$, sabemos que $x_n \to 1$. La sucesión cuyo límite queremos calcular recuerda el límite funcional $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x-1} = 1$. Pongamos $f(x) = \dfrac{\log x}{x-1}$. Como caso particular de este límite funcional, tenemos que $f(x_n) \to 1$, y es claro que $y_n = f(x_n)$. Hemos probado así que $y_n \to 1$ y todo lo que hemos tenido que hacer es relacionar dicho límite con un límite funcional que ha resultado ser (cosa muy frecuente) una derivada: la derivada de la función $\log x$ en el punto $x = 1$. ♦

Teniendo en cuanta la caracterización de la continuidad, el siguiente resultado es un caso particular de la proposición 7.41.

7.45 Proposición. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A$. Equivalen las afirmaciones:*

i) f es continua en a.

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Podemos expresar este resultado como sigue: *la continuidad permuta con el límite secuencial*, esto es, si f es continua entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)$$

Recogemos seguidamente algunas importantes propiedades de las sucesiones divergentes de logaritmos y exponenciales. Todas ellas se deducen, teniendo en cuenta la proposición 7.41, de las correspondientes propiedades de las funciones exponencial y logaritmo natural (proposición 4.50).

7.46 Proposición.

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{e^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \iff \{e^{x_n}\} \to 0$.

Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x > 0 \iff \{\log(x_n)\} \to \log x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{\log(x_n)\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to 0 \iff \{\log(x_n)\} \to -\infty$.

7.3.2. Sucesiones asintóticamente equivalentes

7.47 Definición. Diremos que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Por ejemplo, las sucesiones $\{\log n\}$ y $\{n(\sqrt[n]{n} - 1)\}$ son asintóticamente equivalentes.

El siguiente resultado nos dice que para estudiar la convergencia de un producto de varias sucesiones podemos sustituir las que queramos por otras que sean asintóticamente equivalentes, sin que ello afecte a la convergencia o divergencia del producto ni a su eventual límite.

7.48 Proposición. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:*

i) $\{x_n z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.

ii) $\{x_n z_n\}$ es divergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es divergente, en cuyo caso ambas sucesiones son divergentes del mismo tipo.

En particular, $\{x_n\}$ es convergente (resp. divergente) si, y sólo si, $\{y_n\}$ es convergente (resp. divergente), en cuyo caso ambas tienen igual límite (resp. son divergentes del mismo tipo).

Demostración. Las afirmaciones hechas en $i)$ y $ii)$ son consecuencia de que

$$\lim \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \lim \left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\} = 1.$$

Si, por ejemplo, $\{y_n z_n\}$ es convergente, entonces como:

$$\{x_n z_n\} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \{y_n z_n\},$$

se sigue que $\{x_n z_n\}$ también es convergente y tiene el mismo límite que $\{y_n z_n\}$.

El mismo razonamiento prueba que si $\{x_n\}$ es divergente entonces también $\{y_n\}$ es divergente del mismo tipo.

La afirmación hecha al final del enunciado es consecuencia de lo anterior tomando $z_n = 1$. □

7.49 Observación. Es importante observar que en una suma de sucesiones no se puede, en general, sustituir una sucesión por otra asintóticamente equivalente. Por ejemplo, si $x_n = n+1$, $y_n = n + 1/n$ y $z_n = -n$, es claro que $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ pero $\{x_n + z_n\} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es asintóticamente equivalente a $\{y_n + z_n\} = \{1/n\}$.

7.3.3. Sucesiones de potencias

Hay otras indeterminaciones que surgen al considerar *sucesiones de potencias*, es decir, sucesiones de la forma $\{x_n^{y_n}\}$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos e $\{y_n\}$ es una sucesión cualquiera de números reales. Puesto que

$$x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n)),$$

teniendo en cuenta la proposición 7.46, la convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n^{y_n}\}$ vendrá determinada por la de $\{y_n \log(x_n)\}$; la cual, a su vez, está determinada en todos los casos por el comportamiento de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, excepto cuando dicha sucesión $\{y_n \log(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo “$0\,\infty$”, lo que ocurre en los siguientes casos.

a) $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación “1^∞”)

b) $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación “∞^0”)

c) $\{x_n\} \to 0$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación “0^0”)

El siguiente resultado, que es la versión para sucesiones del criterio de equivalencia logarítmica para límites funcionales, permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “$0\,\infty$”.

7.50 Teorema (Criterio de equivalencia logarítmica). *Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:*

- $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L \Longleftrightarrow \lim\{y_n(x_n - 1)\} = L.$

- $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty \iff \{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to 0 \iff \{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$.

Demostración. Puesto que $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$, las afirmaciones hechas en el enunciado se deducen de la proposición 7.46, sin más que tener en cuenta que, como $\{x_n\} \to 1$, las sucesiones $\{\log(x_n)\}$ y $\{x_n - 1\}$ son asintóticamente equivalentes, por lo que, en virtud de la proposición 7.48, si una de las sucesiones $\{y_n \log(x_n)\}$ e $\{y_n(x_n - 1)\}$ es convergente (resp. divergente a $+\infty$ o a $-\infty$), la otra también es convergente con igual límite (resp. divergente a $+\infty$ o a $-\infty$). $\square$

Los ejercicios que siguen son de cálculo de límites de sucesiones. Deberás usar los criterios de Stolz y de las medias aritmética y geométrica y el criterio de equivalencia logarítmica. En general, debes seguir la estrategia básica de relacionar un límite de una sucesión con un límite funcional apropiado.

7.3.4. Ejercicios propuestos

340. Supongamos que $\{x_n\} \to 0$, siendo $-1 < x_n \neq 0$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Justifica, usando derivadas, que $\{(1 + x_n)^\alpha - 1\}$ es asintóticamente equivalente a $\{\alpha x_n\}$.

341. Prueba que la sucesión $\{\log n!\}$ es asintóticamente equivalente a $\{n \log n\}$.

342. Justifica que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{1 + 1/n^\alpha} - 1\right\}$ es asintóticamente equivalente a $\left\{1/n^{\alpha+1}\right\}$, donde $\alpha > 0$.

343. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

a) $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, donde $\alpha > -1$.

b) $x_n = \sqrt[k]{(n + a_1)(n + a_2)\cdots(n + a_k)} - n$, donde $k \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

c) $x_n = \left(\dfrac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}\right)^n$ donde $a > 0$, $b > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

d) $x_n = \left(\dfrac{1 + 2^{p/n} + 3^{p/n} + \cdots + p^{p/n}}{p}\right)^n$, donde $p \in \mathbb{N}$.

e) $x_n = n\left(\dfrac{1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \dfrac{1}{k+1}\right)$, donde $k \in \mathbb{N}$.

f) $x_n = \left(\dfrac{3}{4}\dfrac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}\right)^{n^2}$

g) $x_n = n\left[\left(1 + \dfrac{1}{n^3 \log(1 + 1/n)}\right)^n - 1\right]$

h) $x_n = \dfrac{1}{n}\left(n + \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n-2}{3} + \cdots + \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{1}{n} - \log(n!)\right)$

344. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

$$a)\ x_n = \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)} \qquad b)\ x_n = \frac{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{\mathrm{e}}\cdots\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}$$

$$c)\ x_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n \qquad d)\ x_n = \left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n}$$

$$e)\ x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j \qquad f)\ x_n = \frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$$

$$g)\ x_n = \log n\left[\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right] \qquad h)\ x_n = \sqrt[n]{\frac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}\ \ (p,q\in\mathbb{N})$$

$$i)\ x_n = \left(\frac{5\sum_{k=1}^{n}k^4}{n^5}\right)^n \qquad j)\ x_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$$

$$k)\ x_n = n\frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1-n\operatorname{sen}(1/n)} \qquad l)\ x_n = \frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$$

345. Sabiendo que $\{a_n\}\to a$, calcula el límite de las sucesiones:

a) $x_n = n(\sqrt[n]{a_n}-1)$

b) $x_n = \dfrac{\exp(a_1)+\exp(a_2/2)+\cdots+\exp(a_n/n)-n}{\log n}$

c) $x_n = \dfrac{a_1+a_2/2+\cdots+a_n/n}{\log n}$

346. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\ \frac{n\log(1+1/n)-1}{(1+1/n)^n-\mathrm{e}},\quad b)\ n\left(\sqrt[n]{2-1/n}-1\right),\quad c)\ n^2\frac{n^{1/n^2}-1}{\log(n)},\quad d)\ H_n\left(n^{1/H_n^2}-1\right)$$

Donde $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

Sugerencia. Usa equivalencias asintóticas apropiadas.

347. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}\to L\in\mathbb{R}^+$. Calcula el límite de la sucesión $\sqrt[n]{\dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}}$

348. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos, α un número real, y supongamos que $\{n^\alpha x_n\}\to L\in\mathbb{R}_o^+$. Calcula el límite de la sucesión $n^\alpha\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.

349. Sean a, b números positivos; definamos $x_k = a+(k-1)b$ para cada $k\in\mathbb{N}$ y sea G_n la media geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y A_n su media aritmética. Calcula el límite de la sucesión $\dfrac{G_n}{A_n}$.

350. Sea $\{x_n\}\to x$, $\{y_n\}\to y$, $x\neq y$. Definamos $z_{2n-1}=x_n$, y $z_{2n}=y_n$. Justifica que la sucesión

$$\left\{\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}\right\}$$

es convergente.

351. Definamos $\{x_n\}$ por:

$$x_{3m}=\frac{1}{2^{3m-1}3^m}, \quad x_{3m-1}=\frac{1}{2^{3m-3}3^{m-2}}, \quad x_{3m-2}=\frac{1}{2^{3m-4}3^m}.$$

Calcula el límite de la sucesión $\sqrt[n]{x_n}$ y justifica que la sucesión $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ no converge.

352. Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones de números positivos verificando que $\{(x_n)^n\}\to x>0$ $\{(y_n)^n\}\to y>0$. Dados $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$, con $\alpha+\beta=1$, calcula $\lim(\alpha x_n+\beta y_n)^n$.

353. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ es divergente, y sea $\{b_n\}\to L$, donde L puede ser un número real o $\pm\infty$. Justifica que

$$\left\{\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right\}\to L.$$

Aplicación. Supuesto que $\{x_n\}\to x$, calcula $\displaystyle\lim\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x_k$.

354. Dadas dos funciones polinómicas P,Q, tales que el grado de Q es mayor o igual que el grado de P y $Q(n)\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, justifica que la sucesión $\left\{\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right\}$ es convergente y calcula su límite.

355. a) Sea $f:[a,b]\to]a,b]$ creciente y continua. Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n\in\mathbb{N}$ por $x_1=a$ y $x_{n+1}=f(x_n)$, converge a un punto $u\in]a,b]$ tal que $f(u)=u$.
b) Dado $0<\alpha\leqslant\frac{1}{4}$, estudia la convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ definida por:

$$z_1=\alpha, \quad z_{n+1}=\alpha+z_n^2 \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

356. a) Justifica las desigualdades

$$0<\log\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}<x \;\; (x>0); \quad x<\log\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}<0 \;\; (x<0).$$

b) Dado $x\neq 0$ definamos $x_1=x$, y para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$x_{n+1}=\log\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}.$$

Estudia la convergencia de $\{x_n\}$.

357. Se considera la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida para todo $x>0$ por $f(x)=\log x-x+2$.

1. Prueba que f tiene exactamente dos ceros, α y β, con $\alpha<1<\beta$.

2. Dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se define la siguiente sucesión por recurrencia:

$$x_{n+1} = \log x_n + 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona creciente y acotada que converge a β.

358. Dado un número $\alpha \in]0, \pi[$, se define la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_1 = \operatorname{sen} \alpha$, $x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n$.

(a) Justifica que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y calcula su límite.

(b) Calcula el límite de la sucesión $z_n = \dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}$

7.3.5. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto $\boxed{168}$ Prueba que $\{\log n!\}$ es asintóticamente equivalente a $\{n \log n\}$.

Solución. Pongamos $x_n = n \log n$, $y_n = \log n!$. Aplicaremos el criterio de Stolz para calcular el límite de la sucesión $\{\frac{x_n}{y_n}\}$. Tenemos que:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)\log(n+1) - n \log n}{\log(n+1)} = \frac{n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log(n+1)} + 1$$

Teniendo en cuenta que $n \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 1$ y que $\log n \to +\infty$, obtenemos que $\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right\} \to 1$ y, por el criterio de Stolz, concluimos que $\{\frac{x_n}{y_n}\} \to 1$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{169}$ Justifica que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{1 + 1/n^\alpha} - 1\right\}$ es asintóticamente equivalente a $\left\{1/n^{\alpha+1}\right\}$, donde $\alpha > 0$.

Solución. Pongamos $x_n = \sqrt[n]{1 + 1/n^\alpha}$. Como $1 \leqslant x_n \leqslant \sqrt[n]{2}$, deducimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $\{x_n\} \to 1$. Sabemos que $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1$, porque dicho límite es la derivada en 1 de la función logaritmo. Por tanto, en virtud de la proposición 7.41, para toda sucesión $\{z_n\} \to 1$ se verifica que $\lim \dfrac{\log(z_n)}{z_n - 1} = 1$, esto es, $z_n - 1 \sim \log(z_n)$. Análogamente, se tiene que $\log(1 + u_n) \sim u_n$ para toda sucesión $\{u_n\} \to 0$. Deducimos que:

$$x_n - 1 \sim \log(x_n) = \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n}\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{170}}$ Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

a) $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, donde $\alpha > -1$.

b) $x_n = \sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)} - n$, donde $k \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

c) $x_n = \left(\dfrac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}\right)^n$ donde $a > 0$, $b > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

d) $x_n = \left(\dfrac{1 + 2^{p/n} + 3^{p/n} + \cdots + p^{\,p/n}}{p}\right)^n$, donde $p \in \mathbb{N}$.

e) $x_n = n\left(\dfrac{1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \dfrac{1}{k+1}\right)$, donde $k \in \mathbb{N}$.

f) $x_n = \left(\dfrac{3}{4}\dfrac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}\right)^{n^2}$

g) $x_n = n\left[\left(1 + \dfrac{1}{n^3 \log(1+1/n)}\right)^n - 1\right]$

h) $x_n = \dfrac{1}{n}\left(n + \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n-2}{3} + \cdots + \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{1}{n} - \log(n!)\right)$

Solución. a) Pongamos $x_n = \frac{u_n}{v_n}$. Aplicamos el criterio de Stolz, lo cual puede hacerse porque, al ser $\alpha > -1$ se tiene que $n^{\alpha+1}$ es una sucesión estrictamente creciente.

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]}$$

Usando las equivalencias asintóticas $x_n - 1 \sim \log(x_n)$, válida cuando $\{x_n\} \to 1$, y $\log(1 + u_n) \sim u_n$, válida cuando $\{u_n\} \to 0$, tenemos que:

$$n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right] \sim n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} = (\alpha+1) n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim (\alpha+1) n \frac{1}{n} = \alpha+1.$$

Deducimos que $\lim \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \frac{1}{\alpha+1}$ y, por el criterio de Stolz, $\lim x_n = \frac{1}{\alpha+1}$.

b)Tenemos que:

$$\sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)} - n = n\left(\sqrt[k]{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right)\left(1 + \frac{a_2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_k}{n}\right)} - 1\right) \sim$$
$$\sim n\frac{1}{k} \log\left[\left(1 + \frac{a_1}{n}\right)\left(1 + \frac{a_2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_k}{n}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} n \log\left(1 + \frac{a_j}{n}\right) \to \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a$.

c) Es una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$, donde

$$u_n = \frac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}, \qquad v_n = n$$

Claramente $u_n \to 1$, por lo que tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$\begin{aligned} v_n(u_n - 1) &= n\left(\frac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta} - 1\right) = n\left(\frac{\alpha(\sqrt[n]{a} - 1) + \beta(\sqrt[n]{b} - 1)}{\alpha + \beta}\right) = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} n(\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} n(\sqrt[n]{b} - 1) \to \\ &\to \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \log a + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \log b = \log\left(a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right) \end{aligned}$$

Deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$.

d) Es una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$, donde

$$u_n = \frac{1 + 2^{\frac{p}{n}} + 3^{\frac{p}{n}} + \cdots + p^{\frac{p}{n}}}{p}, \qquad v_n = n$$

Claramente $u_n \to 1$, por lo que tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$\begin{aligned} v_n(u_n - 1) &= n\left(\frac{1 + 2^{\frac{p}{n}} + 3^{\frac{p}{n}} + \cdots + p^{\frac{p}{n}}}{p} - 1\right) = \\ &= \frac{1}{p}\left(n\big(2^{\frac{p}{n}} - 1\big) + n\big(3^{\frac{p}{n}} - 1\big) + \cdots + n\big(p^{\frac{p}{n}} - 1\big)\right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\lim n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$, deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(u_n - 1) = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n = \log n! \Longrightarrow \lim\{x_n\} = n!.$$

f) Es una sucesión de potencias $x_n = u_n^{v_n}$, donde:

$$u_n = \frac{3}{4}\frac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}, \quad v_n = n^2.$$

La base $\{u_n\}$ converge a 1, pues aplicando Stolz con $a_n = 1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$ y $b_n = n^3$, tenemos:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3} = \frac{4n^2 + 4n + 1}{3n^2 + 3n + 1} \to \frac{4}{3}.$$

Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$\begin{aligned} v_n(u_n - 1) &= n^2\left(\frac{3}{4}\frac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3} - 1\right) = \\ &= \frac{3}{4}\frac{3\big(1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2\big) - 4n^3}{n} \end{aligned}$$

Apliquemos ahora el criterio de Stolz con $z_n = 3\big(1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2\big) - 4n^3, w_n = n$. Tenemos:

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{w_{n+1}-w_n} = 3(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 + 4n^3 = -1.$$

Deducimos que $v_n(u_n - 1) \to -\frac{3}{4}$ y, por tanto, $\lim\{x_n\} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}^3}}$.

g) $x_n = n\left[\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n - 1\right]$. Pongamos $z_n = \left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n$. La sucesión $\{z_n\}$ es una indeterminación del tipo 1^∞. Tenemos que:

$$n\frac{1}{n^3\log(1+1/n)} = \frac{1}{n}\frac{1}{n\log(1+1/n)} \to 0 \quad\Longrightarrow\quad z_n \to 1.$$

En consecuencia:

$$x_n \sim n\log(z_n) = n^2\log\left(1+\frac{1}{n^3\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) \sim n^2\frac{1}{n^3\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Luego $\lim\{x_n\} = \lim \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$ ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{171}}$ Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

$$a)\ x_n = \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)} \qquad b)\ x_n = \frac{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{\mathrm{e}}\cdots\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}$$

$$c)\ x_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n \qquad d)\ x_n = \left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n}$$

$$e)\ x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j \qquad f)\ x_n = \frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$$

$$g)\ x_n = \log n\left[\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right] \qquad h)\ x_n = \sqrt[n]{\frac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}\ \ (p,q\in\mathbb{N})$$

$$i)\ x_n = \left(\frac{5\sum_{k=1}^{n}k^4}{n^5}\right)^n \qquad j)\ x_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$$

$$k)\ x_n = n\frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1-n\operatorname{sen}(1/n)} \qquad l)\ x_n = \frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$$

Solución. a) Usaremos la estrategia 7.33. Pongamos $H_n = \log n + x_n$ donde $\{x_n\} \to \gamma$. Tenemos que:

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)} = \frac{\log(\log n + x_n)}{\log(\log n)} = \frac{\log\left(\log n\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)\right)}{\log(\log n)} =$$
$$= \frac{\log(\log n) + \log\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)}{\log(\log n)} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)}{\log(\log n)} \to 1.$$

7.51 Observación. Hemos visto en el ejercicio resuelto 161 que $H_n \sim \log n$, pero de aquí no puede deducirse directamente que $\log(H_n) \sim \log(\log n)$ que es lo que hemos probado. La razón es que no es cierto en general que si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ también sea $\log(x_n) \sim \log(y_n)$. Por ejemplo, las sucesiones $\{e^{\frac{1}{n}}\}$ y $\{e^{\frac{1}{n^2}}\}$ son asintóticamente equivalentes porque ambas convergen a 1, pero sus logaritmos son las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}$ y $\{\frac{1}{n^2}\}$ que no son asintóticamente equivalentes.

En general, no hay garantías de que una equivalencia asintótica entre sucesiones se conserve por una determinada función.

c) Tomando logaritmos tenemos que:

$$\log x_n = n \log\left(1 + \frac{\log n}{n}\right) - \log n = n\left(\log\left(1 + \frac{\log n}{n}\right) - \frac{\log n}{n}\right)$$

Esta expresión es de la forma $\log(1 + u_n) - u_n$ donde $u_n \to 0$. Recordemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Tenemos que:

$$\log x_n = \frac{\log\left(1 + \frac{\log n}{n}\right) - \frac{\log n}{n}}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^2} \frac{(\log n)^2}{n}$$

Poniendo $u_n = \frac{\log n}{n}$, como $u_n \to 0$, deducimos que la primera de las dos fracciones anteriores converge a $-\frac{1}{2}$ y la segunda $\frac{(\log n)^2}{n} \to 0$. Concluimos que $\log x_n \to 0$ y, por tanto, $\{x_n\} \to 1$.

e) $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \log \prod_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j$. Pongamos:

$$z_k = \frac{1}{k} \log \prod_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j \log\left(1 + \frac{1}{j}\right)}{k}.$$

De esta forma, se tiene que:

$$x_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k}{n}.$$

Como $\{z_n\}$ es la sucesión de las medias aritméticas de la sucesión $y_n = n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, y $\lim\{y_n\} = 1$, se sigue, por el criterio de la media aritmética, que $\{z_n\} \to 1$. Como $\{x_n\}$ es la sucesión de las medias aritméticas de $\{z_n\}$, volviendo ahora a aplicar el mismo criterio, deducimos que $\{x_n\} \to 1$.

f) $x_n = \dfrac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$. Pongamos:

$$x_n = \left(\frac{2\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n^2}}\right)^n = \left(2\sqrt[n]{\frac{1}{n}} - \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right)^n$$

Se trata de una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$ donde $u_n = 2\sqrt[n]{\frac{1}{n}} - \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ y $v_n = n$. Claramente $u_n \to 1$, por lo que se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n - 1) = n\left(2\sqrt[n]{\frac{1}{n}} - \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} - 1\right) = -n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} - 1\right)^2 \sim$$
$$\sim -n\left(\log\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{\log n}{n} \to 0.$$

Deducimos que $x_n \to 1$.

g) La sucesión $x_n = \log n\left[\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right]$ es de la forma $b_n(a_n - 1)$ donde $a_n = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n$, $b_n = \log n$. Veamos que $\{a_n\} \to 1$. Para ello, como se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, aplicamos el criterio de equivalencia logarítmica:

$$n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1\right) = \frac{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\log n} \to 0$$

Por tanto, $\{a_n\} \to 1$. Podemos aplicar ahora el criterio de equivalencia logarítmica a la sucesión $b_n(a_n - 1)$. Tenemos que:

$$a_n^{b_n} = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n\log n}$$

Esta sucesión es una indeterminación del tipo 1^∞ y podemos volver a aplicarle el criterio de equivalencia logarítmica.

$$n\log n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1\right) = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1.$$

Concluimos que $\{x_n\} \to 1$.

h) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}$ donde $p, q \in \mathbb{N}$. Es una sucesión del tipo $x_n = \sqrt[n]{z_n}$ donde $z_n = \frac{(pn)!}{(qn)^{pn}}$. Tenemos que:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(pn+p)!}{(qn+q)^{pn+p}}\frac{(qn)^{pn}}{(pn)!} = \frac{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}{(qn+q)^p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{pn}$$

La fracción $\frac{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}{(qn+q)^p}$ es un cociente de dos polinomios en la variable n del mismo grado p y coeficientes líder iguales a p^p y q^p respectivamente, por tanto su límite es igual a $\left(\frac{p}{q}\right)^p$. La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{pn} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{np}$ converge a e^{-p}. Por tanto, en virtud del corolario 7.40, la sucesión dada converge a $\left(\frac{p}{q\,\mathrm{e}}\right)^p$.

k) $x_n = n\dfrac{\sqrt[n]{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n\operatorname{sen}(1/n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n} - \operatorname{sen}(\frac{1}{n})}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$. Pongamos $y_n = \frac{1}{n}$. Tenemos que $x_n = f(y_n)$. Como $y_n \to 0$, el límite de $\{x_n\}$ es igual al límite de $f(x)$ en $x = 0$. Tenemos que:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,\frac{\mathrm{e}^{x - \operatorname{sen} x} - 1}{x - \operatorname{sen} x} \sim \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} \sim 1 \qquad (x \to 0)$$

Donde hemos usado que la función $\frac{\mathrm{e}^{x-\operatorname{sen} x} - 1}{x - \operatorname{sen} x}$ es de la forma $\frac{e^{h(x)}-1}{h(x)}$ donde $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, por lo que dicha función tiene límite igual a 1 en $x = 0$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{172}$ Sabiendo que $\{a_n\} \to a$, calcula el límite de las sucesiones:

a) $x_n = n(\sqrt[n]{a_n} - 1)$

b) $x_n = \dfrac{\exp(a_1) + \exp(a_2/2) + \cdots + \exp(a_n/n) - n}{\log n}$

c) $x_n = \dfrac{a_1 + a_2/2 + \cdots + a_n/n}{\log n}$

Solución. b) Es una sucesión del tipo $x_n = \frac{u_n}{v_n}$. Aplicaremos el criterio de Stolz.

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{\exp\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right) - 1}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \sim n\frac{a_{n+1}}{n+1} \to a.$$

Donde hemos usado la equivalencia asintótica $\mathrm{e}^{z_n} - 1 \sim z_n$ válida siempre que $z_n \to 0$ y $\log(1 + y_n) \sim y_n$, válida siempre que $y_n \to 0$. Concluimos que $\{x_n\} \to a$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{173}$ Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L > 0$. Calcula el límite de la sucesión $\sqrt[n]{\dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}}$

Solución. Es una sucesión del tipo $w_n = \sqrt[n]{y_n}$ donde $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$. Aplicaremos el corolario 7.40. Tenemos que:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n}\,\frac{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{(x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}} \sim L\frac{1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}}(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

En virtud, del citado corolario, se tiene que $\sqrt[n+1]{x_{n+1}} \to L$. Sea $z_n = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n(n+1)}}$. Consideremos la sucesión:

$$\log z_n = \frac{\log(x_1) + \log(x_2) + \cdots + \log(x_n)}{n(n+1)}$$

Pongamos $a_n = \log(x_1) + \log(x_2) + \cdots + \log(x_n)$, $b_n = n(n+1)$. Aplicaremos el criterio de Stolz.

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\log(x_{n+1})}{2n+2} = \frac{1}{2}\log \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \to \frac{1}{2}\log L = \log\sqrt{L}.$$

Deducimos que $\log z_n \to \log\sqrt{L}$, por lo que $z_n \to \sqrt{L}$ y también $\frac{y_{n+1}}{y_n} \to \sqrt{L}$. El citado corolario 7.40 implica que $w_n \to \sqrt{L}$.

Ejercicio resuelto $\boxed{174}$ Sean a, b números positivos; definamos $x_k = a + (k-1)b$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y sea G_n la media geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y A_n su media aritmética. Calcula el límite de la sucesión $\dfrac{G_n}{A_n}$.

Solución. Tenemos que $A_n = \dfrac{na + \frac{n(n-1)}{2}b}{n} = a + \dfrac{n-1}{n}b$. Por tanto:

$$\frac{G_n}{A_n} = \frac{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}{a + \frac{n-1}{n}b} = \frac{1}{\frac{a}{n} + \frac{n-1}{2n}b}\sqrt[n]{\frac{x_1x_2\cdots x_n}{n^n}}$$

Calcularemos el límite de la sucesión $U_n = \sqrt[n]{\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{n^n}}$ que es del tipo $U_n = \sqrt[n]{z_n}$, usando el corolario 7.40, tenemos:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}n^n = \frac{x_{n+1}}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{b}{\mathrm{e}}.$$

Deducimos que $\{\frac{G_n}{A_n}\} \to \frac{2}{\mathrm{e}}$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{175}$ Sea $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, $x \neq y$. Definamos $z_{2n-1} = x_n$, y $z_{2n} = y_n$. Justifica que la sucesión

$$\left\{\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}\right\}$$

es convergente.

Solución. Pongamos $u_n = \dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}$. Tenemos que:

$$u_{2n} = \frac{z_1 + z_3 + \cdots + z_{2n-1}}{2n} + \frac{z_2 + z_4 + \cdots + z_{2n}}{2n} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{1}{2}\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \to \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

Donde hemos aplicado el criterio de la media aritmética. Análogamente se comprueba que $\{u_{2n-1}\} \to \frac{x+y}{2}$. Concluimos que $\{u_n\} \to \frac{x+y}{2}$.

Observa que no se puede calcular el límite de $\{u_n\}$ aplicando el criterio de Stolz. Llamando $Z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, $V_n = n$, tenemos $u_n = \frac{Z_n}{V_n}$ y:

$$\frac{Z_{n+1} - Z_n}{V_{n+1} - V_n} = Z_{n+1} - Z_n = \begin{cases} x_{m+1}, & \text{si } n = 2m \text{ es par;} \\ y_m, & \text{si } n = 2m-1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto, la sucesión $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{V_{n+1} - V_n}$ no es convergente. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{176}}$ a) Justifica las desigualdades:

$$0 < \log \frac{e^x - 1}{x} < x \quad (x > 0); \quad x < \log \frac{e^x - 1}{x} < 0 \quad (x < 0).$$

b) Dado $x \neq 0$ definamos $x_1 = x$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \log \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}.$$

Estudia la convergencia de $\{x_n\}$.

Solución. a) En virtud del teorema del valor medio tenemos que:

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x} = e^c$$

donde c es un punto comprendido entre x y 0, esto es, $c \in]0, x[$ si $x > 0$, y $c \in]x, 0[$ si $x < 0$. En el primer caso es $1 < e^c < e^x$ y en el segundo es $e^x < e^c < 1$. Á partir de aquí se deducen enseguida las desigualdades del enunciado.

b) Definamos $f(x) = \log \dfrac{e^x - 1}{x}$ y $f(0) = 0$. La función f es continua en $\mathbb{R}$. Supongamos que $x < 0$. Entonces, como consecuencia de la segunda de las desigualdades del apartado anterior, se tiene que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y $x_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, dicha sucesión converge y su límite es un número $\alpha \leqslant 0$, que debe verificar la igualdad $\alpha = f(\alpha)$ lo que exige que $\alpha = 0$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{177}}$ Se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por $f(x) = \log x - x + 2$.

a) Prueba que f tiene exactamente dos ceros, α y β, con $\alpha < 1 < \beta$.

b) Dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se define la siguiente sucesión por recurrencia:

$$x_{n+1} = \log x_n + 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona creciente y acotada que converge a β.

Solución. a) Como $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ y $f(1) = 1 > 0$ y, evidentemente, la función f es continua en $\mathbb{R}^+$, podemos aplicar el teorema de Bolzano a los intervalos $]0, 1]$ y $[1, +\infty[$, para deducir que f tiene algún cero en cada uno de ellos.

Como $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, se sigue que f es estrictamente decreciente en $[1, +\infty[$ y estrictamente creciente en $]0, 1]$. Por tanto solamente puede anularse una vez en dichos intervalos.

b) Como la función $h(x) = \log x + 2$ es estrictamente creciente para $x > 0$ y $h(\alpha) = \alpha$, $h(\beta) = \beta$, se deduce que para todo $x \in]\alpha, \beta[$ es $\alpha < h(x) < \beta$. Además, como $h(x) - x$ es continua y no se anula en $]\alpha, \beta[$ debe tener signo constante. Como $h(1) > 0$, deducimos que $x < h(x)$ para todo $x \in]\alpha, \beta[$. Por tanto, dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se tiene que $x_1 < h(x_1) = x_2$ y, supuesto que $x_{n-1} < x_n$ se tiene que $x_n = h(x_{n-1}) < h(x_n) = x_{n+1}$. Por tanto $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y, además, todos sus términos están en $]\alpha, \beta[$, luego dicha sucesión converge y su límite, λ, debe verificar la igualdad $\lambda = h(\lambda)$; puesto que $\alpha < \lambda \leqslant \beta$, se sigue que $\lambda = \beta$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{177}$ Dado un número $\alpha \in]0,\pi[$, se define la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_1 = \operatorname{sen}\alpha,\ x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n$.

(a) Justifica que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y calcula su límite.

(b) Calcula el límite de la sucesión $z_n = \dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}$

Solución. a) La conocida desigualdad $0 < \operatorname{sen} x < x$, válida para todo $x \in]0,\pi[$, implica que la sucesión es estrictamente decreciente y de números positivos. De aquí se deduce enseguida que es convergente y su límite es 0.

b)

$$z_n = \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x_n)} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \operatorname{sen}^2(x_n)}{x_n^2 \operatorname{sen}^2(x_n)} \sim$$

$$\sim \frac{x_n^2 - \operatorname{sen}^2(x_n)}{x_n^4} = \frac{\operatorname{sen}(x_n) + x_n}{x_n}\,\frac{x_n - \operatorname{sen}(x_n)}{x_n^3} \to \frac{1}{3}.$$

☺

7.4. Sucesiones de números complejos

7.52 Definición. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se dice que **converge** a un número complejo z si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|z_n - z| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}\ : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$$

Se dice que el número z es **límite de la sucesión** $\{z_n\}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{z_n\} = z$ o, simplemente, $\lim\{z_n\} = z$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{z_n\} \to z$.

Observa que, en virtud de la definición dada, se verifica que

$$\{z_n\} \to z \iff |z_n - z| \to 0$$

Recordemos que $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. Gracias a esta desigualdad tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos que $|z_n - z| \to 0$ si, y sólo si, $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0$ y $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

7.53 Proposición. *Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son convergentes. Además, en dicho caso*

$$\lim\{z_n\} = z \iff \operatorname{Re} z = \lim\{\operatorname{Re} z_n\} \quad y \quad \operatorname{Im} z = \lim\{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Los resultados obtenidos para sucesiones de números reales *en los que no interviene la estructura de orden* son también válidos para sucesiones de números complejos. Son válidos, en particular, los resultados relativos a álgebra de límites, el teorema de Bolzano–Weierstrass y el teorema de completitud.

7.4.1. Definición de la exponencial compleja

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z\in\mathbb{C}$. Pongamos $z = x + iy$ donde suponemos que $y \neq 0$ (puesto que si $y = 0$ tendríamos que $z = x$ sería un número real). Sea

$$z_n = \left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n.$$

Pongamos:

$$w_n = 1+\frac{x+iy}{n} = 1+\frac{x}{n}+i\,\frac{y}{n}, \qquad \varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{y/n}{1+x/n}.$$

Sea n_0 tal que para $n \geqslant n_0$ se verifique que $\operatorname{Re}(w_n) > 0$. Entonces, para $n \geqslant n_0$ resulta que $\varphi_n = \arg(w_n)$. Por otra parte, el módulo de w_n viene dado por:

$$|w_n|^2 = \left|1+\frac{z}{n}\right|^2 = \left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}.$$

Como $z_n = (w_n)^n$, tenemos, gracias a la fórmula de De Moivre, que:

$$z_n = (w_n)^n = |w_n|^n(\cos(n\varphi_n)+i\,\operatorname{sen}(n\varphi_n)) = \left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n =$$

$$= \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}\big(\cos(n\varphi_n)+i\,\operatorname{sen}(n\varphi_n)\big).$$

Pero, por el criterio de equivalencia logarítmica, es:

$$\lim|w_n|^n = \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \exp\left(\lim\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)\right) = \mathrm{e}^x.$$

Además, la sucesión $\{\varphi_n\}$ es asintóticamente equivalente a la sucesión $\left\{\dfrac{y/n}{1+x/n}\right\}$. Por tanto

$$\lim\{n\varphi_n\} = \lim\left\{n\frac{y/n}{1+x/n}\right\} = y.$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(w_n)^n = \lim_{n\to\infty}|w_n|^n\big(\cos(n\,\varphi_n)+i\,\operatorname{sen}(n\,\varphi_n)\big) = \mathrm{e}^x(\cos y + i\,\operatorname{sen} y).$$

Se define, por tanto, la exponencial de un número complejo $z = x + iy$ como

$$\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\,\operatorname{sen} y).$$

7.4.2. Ejercicios propuestos

360. Estudia la convergencia de las sucesiones:

i) $z_n = \sqrt[n]{n} + i\,n\,a^n \quad (a\in\mathbb{R}, |a|<1)$ ii) $z_n = \dfrac{2^n}{n} + \dfrac{i\,n}{2^n}$

iii) $z_n = \sqrt[n]{a} + i\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{n} \quad (a>0)$ iv) $z_n = n\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{n} + 5\,i\ \cos\dfrac{1}{n}$

v) $z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ vi) $z_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

361. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y sea $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\}\to\varphi$ y $\{|z_n|\}\to\rho$. Justifica que la sucesión $\{z_n\}\to\rho(\cos\varphi + i\ \operatorname{sen}\varphi)$.

362. Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}+i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n$.

Sugerencia. Expresa $z_n = |z_n|(\cos\varphi_n + i\,\operatorname{sen}\varphi_n)$ y usa el ejercicio anterior.

363. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i\ \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión $n\big(\sqrt[n]{2}-1\big)$ es bien conocido.

364. Sea $z\in\mathbb{C}$, con $|z|=1$, $z\neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

7.4.3. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto $\boxed{178}$ Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i\,\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

Sugerencia. Recuerda que el límite de la sucesión $n\big(\sqrt[n]{2}-1\big)$ es bien conocido.

Solución.

$$z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n} - 1\right) + i\ \sqrt[n]{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n} + \sqrt[n]{2} - 1\right) =$$
$$= n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) + \sqrt[n]{2}\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\frac{\pi}{2n}} + i\ \sqrt[n]{2}\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}} \to \log 2 + i\,\frac{\pi}{2}$$

Ejercicio resuelto $\boxed{\textbf{179}}$ Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z|=1$, $z\neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\mathrm{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

Solución. Siguiendo la sugerencia, supongamos que $\{z^n\}$ converge a un número $w\in\mathbb{C}$. Como $|z^n|=|z|^n=1$, debe ser $|w|=1$. Por una parte, es claro que $\{z^{n+1}\}\to w$ y también $\{z^{n+1}\} = z\{z^n\} \to zw$, por tanto debe ser $z = wz$, lo que implica que $(z-1)w = 0$ lo cual es imposible porque $z \neq 1$ y $w \neq 0$. Concluimos que $\{z_n\}$ no converge.

Sea φ un número real que no es un múltiplo entero de π. Pongamos $z = \cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\,\varphi$. Tenemos que $z\neq 1$ y $|z|=1$. Por lo antes visto, la sucesión $\{z^n\}=\{\cos(n\varphi)+i\ \mathrm{sen}(n\varphi)\}$ no converge. Veamos que esto implica que ninguna de las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$, $\{\mathrm{sen}(n\varphi)\}$ converge.

En efecto, de la igualdad:

$$\mathrm{sen}(n+1) = \mathrm{sen}\,n\cos 1 + \cos n\,\mathrm{sen}\,1 \quad\Longrightarrow\quad \cos n = \frac{1}{\mathrm{sen}\,1}\big(\mathrm{sen}(n+1) - \mathrm{sen}\,n\cos 1\big)$$

se deduce que si $\{\mathrm{sen}(n\varphi)\}$ converge, también converge $\{\cos(n\varphi)\}$ y, por tanto, la sucesión $\{\cos(n\varphi) + i\ \mathrm{sen}(n\varphi)\}$ converge, lo que es contradictorio.

Análogamente, de la igualdad:

$$\cos(n+1) = \cos n\cos 1 - \mathrm{sen}\,n\,\mathrm{sen}\,1 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{sen}\,n = \frac{1}{\mathrm{sen}\,1}\big(\cos(n+1) - \cos n\cos 1\big)$$

se deduce que si $\{\cos(n\varphi)\}$ converge, también converge $\{\mathrm{sen}(n\varphi)\}$ y, por tanto, la sucesión $\{\cos(n\varphi) + i\ \mathrm{sen}(n\varphi)\}$ converge, lo que es contradictorio. ☺

7.5. Demostraciones alternativas de los teoremas de Bolzano y de Weierstrass

Las demostraciones que vimos en el capítulo 4 de los teoremas de Bolzano y de Weierstrass se apoyaban directamente en “primeros principios”, esto es, en la definición de continuidad y en el axioma del supremo. Por eso dichas demostraciones son un poco complicadas y no del todo fáciles de seguir en una primera lectura. Con la ayuda de la teoría desarrollada en este capítulo podemos dar demostraciones más cortas y amigables de dichos teoremas.

7.54 Teorema (Otra demostración del teorema de los ceros de Bolzano). *Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.*

Demostración. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Si dividimos el intervalo $[a,b]$ por un punto $c \in]a,b[$ en dos subintervalos $[a,c]$ y $[c,b]$, puede ocurrir que $f(c) = 0$ en cuyo caso hemos acabado; en otro caso será $f(c) \neq 0$, por lo que una sola de las desigualdades $f(a)f(c) < 0$, $f(c)f(b) < 0$ tiene que ser cierta, es decir, la función f toma valores de signos opuestos en los extremos de uno de los subintervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ en que hemos dividido el intervalo $[a,b]$. Podemos ahora repetir este proceso partiendo de dicho subintervalo. Esto es lo que hacemos seguidamente.

Pongamos $a_1 = a, b_1 = b$. Dividimos el intervalo $[a_1, b_1]$ por la mitad en dos subintervalos y elegimos aquél en el que la función f toma valores de distinto signo en sus extremos y a este subintervalo le llamamos $[a_2, b_2]$. Repetimos ahora el proceso dividiendo por la mitad el intervalo $[a_2, b_2]$ y obtenemos un intervalo $[a_3, b_3]$ tal que $f(a_3)f(b_3) < 0$. Este proceso o bien se acaba porque en alguna etapa hemos dividido el intervalo por un punto en el que la función f se anula, en cuyo caso ya hemos encontrado un punto de $[a,b]$ donde la función se anula, o bien podemos proseguirlo indefinidamente obteniendo una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$ con la propiedad de que $f(a_n)f(b_n) < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(a_1) > 0$ y $f(b_1) < 0$, fácilmente se sigue que debe ser $f(a_n) > 0$ y $f(b_n) < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son monótonas y acotadas por lo que convergen. Además, como $b_n - a_n = (b-a)/2^{n-1}$, se sigue que ambas sucesiones convergen a un mismo número. Pongamos $\text{lím}\{a_n\} = \text{lím}\{b_n\} = \alpha$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a \leqslant a_n \leqslant b$, se sigue que $a \leqslant \alpha \leqslant b$. Como f es continua en $[a,b]$, en particular es continua en α por lo que se verifica que:

$$f(\alpha) = f(\text{lím}\{a_n\}) = f(\text{lím}\{b_n\}) = \text{lím}\{f(a_n)\} = \text{lím}\{f(b_n)\}\,.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(a_n) > 0$, se sigue que $f(\alpha) \geqslant 0$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(b_n) < 0$, se sigue que $f(\alpha) \leqslant 0$. Concluimos que $f(\alpha) = 0$. □

La demostración anterior da lugar al método de bisección para calcular (de forma aproximada) raíces de ecuaciones. Dicho método tiene la ventaja de que se programa muy fácilmente y permite controlar el error máximo que se comete así como el número de iteraciones necesarias para lograr una determinada precisión.

7.55 Teorema (Otra demostración del teorema de Weierstrass). *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.*

Demostración. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Probaremos primero que f está acotada en $[a,b]$, es decir, que el conjunto imagen $f([a,b])$ está acotado. Razonaremos por contradicción. Si f no está acotada en $[a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene que haber algún $x_n \in [a,b]$ tal que $f(x_n) \geqslant n$. De esta forma obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $[a,b]$ verificando que $f(x_n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, el teorema de Bolzano–Weierstrass nos dice que $\{x_n\}$ tiene alguna sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente. Pongamos $y_n = \{x_{\sigma(n)}\}$ y sea $\lambda = \text{lím}\{y_n\}$. Como $a \leqslant y_n \leqslant b$ tenemos que $a \leqslant \lambda \leqslant b$. Además, por la continuidad de f debe verificarse que $f(\lambda) = \text{lím}\{f(y_n)\}$. Pero esto es imposible porque al ser $f(y_n) = f(x_{\sigma(n)}) \geqslant \sigma(n) \geqslant n$, se sigue que la sucesión $\{f(y_n)\}$ no está acotada, por lo que no puede ser convergente. Concluimos que necesariamente f está acotada en $[a,b]$.

Una vez que hemos probado que el conjunto $f([a,b])$ está acotado, como evidentemente no es vacío, el axioma del supremo nos dice que hay un número real M que es el mínimo mayorante del mismo, es decir, $M = \sup f([a,b])$. Usando el resultado probado en el ejercicio resuelto 153, se sigue que hay una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de $[a,b]$ tal que $\lim\{f(z_n)\} = M$. La sucesión $\{z_n\}$ está acotada por lo que, en virtud del teorema de Bolzano–Weierstrass, tiene una parcial, $\{z_{\sigma(n)}\}$ convergente. Pongamos $w_n = z_{\sigma(n)}$ y sea $\lim\{w_n\} = c$. Como $a \leqslant w_n \leqslant b$ se tiene que $a \leqslant c \leqslant b$. Por la continuidad de f se tiene que $f(c) = \lim\{f(w_n)\} = \lim\left\{f(z_{\sigma(n)})\right\} = M$. Luego la función f alcanza en $c \in [a,b]$ un máximo absoluto. □

7.6. Continuidad uniforme

Piensa un par de minutos antes de responder a la siguiente pregunta. Supongamos que f es una función continua en un intervalo I. ¿Es cierto que si tomamos valores $x, y \in I$ muy próximos entre sí los correspondientes valores de la función $f(x)$, $f(y)$ también están muy próximos entre sí?

Si tu respuesta ha sido afirmativa, como suele ser, te equivocas. Considera la función continua $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$. Los puntos 10^{-10} y 10^{-20} están muy próximos entre sí: $10^{-10} - 10^{-20} < 10^{-10}$, pero $f(10^{-10}) = 10^{10}$ y $f(10^{-20}) = 10^{20}$ están muy distantes entre sí. No hay nada extraño en este comportamiento. A cualquier función continua cuya gráfica tenga una asíntota vertical le pasa lo mismo: hay puntos muy próximos entre sí en los que la función toma valores muy distantes entre sí.

Pero también hay funciones continuas y acotadas que se comportan de forma parecida. Considera la función continua $g:]0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Es una función acotada: el mayor valor que toma es 1 y el menor valor que toma es -1, de hecho se tiene que $g(]0,1]) = [-1,1]$. Sea n un número natural. Los puntos $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ e $y_n = \frac{1}{2n\pi - \pi/2}$ están, para n suficientemente grande, muy próximos entre sí; de hecho $\{x_n - y_n\} \to 0$. Los valores que toma en ellos la función $g(x_n) = 1$ y $g(y_n) = -1$ distan entre sí 2 unidades (que es la máxima distancia que puede haber entre valores tomados por esta función).

Si lo piensas un poco, te darás cuenta de que en ambos ejemplos este comportamiento se debe a que las funciones f y g "oscilan mucho" en intervalos arbitrariamente pequeños. Conviene precisar la idea de "oscilación en un intervalo".

7.56 Definición. Se define la *oscilación* de una función f en un intervalo J contenido en el dominio de definición de f como:

$$\omega(f, J) = \begin{cases} \sup f(J) - \inf f(J), & \text{si } f(J) \text{ está acotado;} \\ +\infty, & \text{si } f(J) \text{ no está acotado.} \end{cases}$$

En otros términos: la oscilación de f en J es la longitud del intervalo más pequeño que contiene a $f(J)$.

Para la función $f(x) = 1/x$ se tiene que $\omega\big(f, [1/2n, 1/n]\big) = n$ y $\omega\big(f,]0, 1/n]\big) = +\infty$. Para la función $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ tenemos que $\omega\big(g, [1/(2n\pi + \pi/2), 1/(2n\pi - \pi/2)]\big) = 2$. Estas funciones tienen una oscilación "grande" en intervalos arbitrariamente pequeños. En algunas circunstancias interesa poder controlar el tamaño de la oscilación de una función de manera que dicha oscilación sea menor que una cierta cantidad fijada, $\varepsilon > 0$, en *cualquier* intervalo de longitud menor que un cierto número $\delta > 0$. Las funciones para las que esto puede hacerse cualquiera sea $\varepsilon > 0$, se llaman *uniformemente continuas*.

7.57 Definición. Se dice que una función f es uniformemente continua en un intervalo I si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $\delta > 0$ de manera que siempre que J sea un intervalo contenido en I de longitud menor que δ, se verifica que la oscilación de f en J es menor o igual que ε.

Teniendo en cuenta que $\omega(f, J) \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ para todos $x, y \in J$, la definición dada puede expresarse de forma equivalente como sigue.

Una función f es uniformemente continua en un intervalo I si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $\delta > 0$ de manera que siempre que x, y sean puntos de I con $|x - y| \leqslant \delta$, se verifica que $|f(x) - f(y| \leqslant \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} |x - y| \leqslant \delta \\ x, y \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \tag{7.12}$$

7.58 Observaciones.

- El concepto de "continuidad uniforme" es un concepto global: depende del comportamiento de la función en todo un intervalo. No tiene sentido decir que una función es uniformemente continua en un punto: la continuidad uniforme no es un concepto local.

- Es muy interesante comparar las definiciones de continuidad puntual (4.1) y de continuidad uniforme (7.12). Resulta evidente que la continuidad uniforme en un intervalo I implica la continuidad en todo punto de I: *toda función uniformemente continua en un intervalo es continua en dicho intervalo.*

En general, no es cierto que una función continua en un intervalo I sea uniformemente continua en I como lo prueban los ejemplos dados al principio. Pero hay una situación particular en la que dicha afirmación sí es cierta. Este es el contenido del siguiente teorema. Se trata de un resultado importante en el que pueden destacarse aportaciones de varios matemáticos. Dirichlet ya lo incluyó en sus lecciones de 1862 y en 1872 Heine dio una primera demostración del mismo. Posteriormente Weierstrass, Borel y Lebesgue generalizaron el resultado inicial.

7.59 Teorema (Teorema de Heine). *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua en dicho intervalo.*

Demostración. Razonaremos por contradicción. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que no es uniformemente continua en $[a, b]$. En tal caso debe existir $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ hay puntos $x_\delta, y_\delta \in [a, b]$ con $|x_\delta - y_\delta| \leqslant \delta$ y $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon_0$. En particular, si para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos $\delta_n = \frac{1}{n}$, existirán puntos $x_n, y_n \in [a, b]$ con $|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. La sucesión $\{x_n\}$ está acotada por lo que debe tener una sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, convergente. Sea $\lim\{x_{\sigma(n)}\} = c$. Como $a \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant b$, se tiene que $a \leqslant c \leqslant b$. Como $\{x_n - y_n\} \to 0$, se sigue que $\{y_{\sigma(n)}\} \to c$. Como $c \in [a, b]$ y f es continua en $[a, b]$, f es continua en c, luego tiene que existir $r > 0$ tal que para todo $z \in]c - r, c + r[\cap [a, b]$ se verifica $|f(c) - f(z)| < \varepsilon_0/2$. Por tanto, para $x, y \in]c - r, c + r[\cap [a, b]$ tenemos que $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0$. Como $\{x_{\sigma(n)}\} \to c$ y $\{y_{\sigma(n)}\} \to c$, tiene que existir un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)} \in]c - r, c + r[\cap [a, b]$ por lo que debe ser $|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| < \varepsilon_0$, lo que es contradictorio porque $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □