APELLIDOS Y NOMBRE
D.N.I.:

EXAMEN DE CÁLCULO I - INGENIERÍA INFORMÁTICA
14 DE JUNIO DE 2010

1. Decide si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando tu respuesta:
   a) $\int_{-1}^{1} (\operatorname{sen} x)^3/x \, dx = 0$
   b) Existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) = e^x/(1+x^2)$ y $f(0) = 5$
   c) Para todo $x \geq 0$ se cumple que $x^5 \operatorname{sen} x \leq x^3 \log(2+x) + 10^6 x$
   d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $f'(0) = f''(0) = 1$ entonces $f(1) \geq f(0)$

2. Calcula el número exacto de soluciones de las siguientes ecuaciones (en la variable $x \in \mathbb{R}$):
   a) $x^2 + \operatorname{sen} x = 0$
   b) $e^x + 2^{-x} = 1$
   c) $3x^3 + a^3 - a^2 x = 0$, donde a es un número real positivo

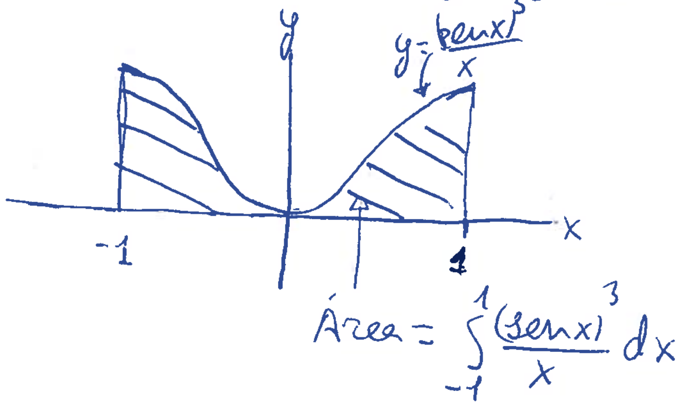
3. Se lanza una pelota con cierta velocidad y ángulo α con respecto al suelo. Esta, por acción de la gravedad, describe la parábola
$$y = (\operatorname{tg} \alpha) x - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) x^2$$
donde y es la distancia vertical y x la distancia horizontal de la pelota al punto de lanzamiento. ¿Con qué ángulo debemos lanzar la pelota si queremos que el área comprendida entre trayectoria y el suelo sea máxima? En ese caso, ¿a qué distancia caerá?

4. Estúdiese la existencia y continuidad de las derivadas sucesivas de la función
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

5. Se pide calcular las primitivas
$$\int \frac{e^{2t} + 4e^t}{e^{2t} + 2e^t + 2} dt$$
$$\int x^3 \, sen \ x \, dx$$

1 a) Falsa, porque $\frac{(\operatorname{sen} x)^3}{x} > 0$ para todo x en el intervalo $[-1, 1]$ excepto en $x = 0$, luego la integral $\int_{-1}^{1} \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{x}\, dx$ es el área por debajo de la gráfica de $\frac{(\operatorname{sen} x)^3}{x}$, por lo que $\int_{-1}^{1} \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{x}\, dx > 0$.

Veamos que la función es positiva: si $0 < x < 1$, como $1 < \pi$ tenemos que $\operatorname{sen} x > 0$. Por otra parte, si $-1 < x < 0$, $\operatorname{sen} x$ es negativa, luego $(\operatorname{sen} x)^3$ también, pero $x < 0$, por lo que $\frac{(\operatorname{sen} x)^3}{x} > 0$. De hecho la gráfica es simétrica con respecto al eje "y", ya que $\frac{(\operatorname{sen}(-x))^3}{(-x)} = \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{x}$.



1b) Cierta. Por el Teorema fundamental del Cálculo, cualquier función del tipo

$$C + \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt,$$

con "C" una constante, tiene como derivada $\frac{e^x}{1+x^2}$. Como además necesitamos que valga 5 para $x=0$, tomamos $C=5$, es decir,

$$\boxed{f(x) = 5 + \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt}$$

satisface las propiedades que nos piden.

(1c) Falsa. Para valores pequeños de x sí se va a cumplir la desigualdad, pero para x grande en general no, porque x^5 crece mucho más rápido que $x^3\log(2+x)$ y que $10^6 x$ (porque la potencia de x es más grande). Para demostrarlo, una buena forma es usando límites. Si la desigualdad fuese cierta, entonces

$$0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq \frac{\log(2+x)}{x^2} + \frac{10^6}{x^4} \quad \forall x \geq 0$$

también se cumpliría. Tomando límites deduciríamos que

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} |\operatorname{sen} x| \leq 0$$

luego $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = 0$, lo cuál es una contradicción porque sabemos que $\operatorname{sen} x$ oscila entre -1 y 1 luego el límite no existe.

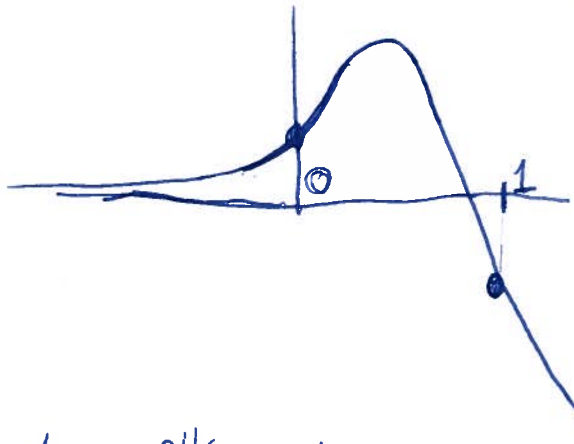
De esa contradicción obtenemos que la desigualdad inicial no era cierta para todo $x \geq 0$.

(1d) Falso. Podemos verlo geométricamente de manera sencilla. $f'(0)=1$ significa que la pendiente de la recta tangente ~~en x~~ a la gráfica en $x=0$ es 1.

$f''(0)=1$ significa que la gráfica es cóncava hacia arriba.

Lo importante es que la información en el punto $x=0$ no nos dice nada sobre la función en $x=1$. Así, si la función decrece antes de llegar a $x=1$, podríamos tener $f(1)<f(0)$.

Por ejemplo, una función con la siguiente gráfica



cumpliría $f'(0)=f''(0)=1$ pero no que $f(1)\geq f(0)$.

También podemos buscar la fórmula para una función de este tipo; por ejemplo

$$f(x)=1/2+x+\frac{x^2}{2}-5x^3. \longrightarrow \begin{cases} f(0)=1/2 \\ f(1)=-3 \end{cases}$$

Ni siquiera nos dicen que f sea continua, así que la función $f(x)=e^x$ para $x\neq 1$, $f(1)=0$ también valdría.

2a) El número de soluciones es dos.

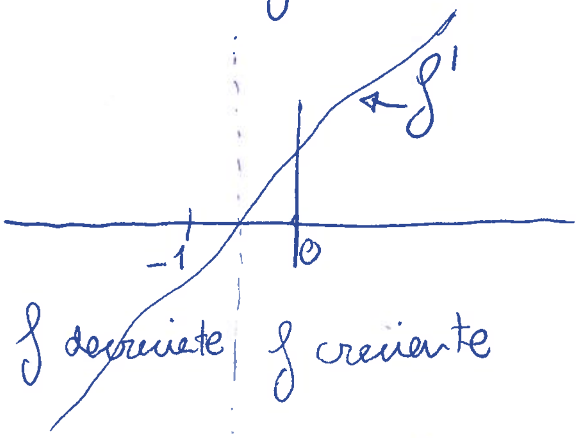
$f(x)=x^2+\operatorname{sen} x$. Veremos ver que f se anula para dos valores de x.

$f'(x)=2x+\cos x \overset{?}{=} 0 \to$ No podemos despejar.
Para calcular en cuantos puntos se anula volvemos a derivar

$f''(x)=2-\operatorname{sen} x \overset{?}{=} 0$ No tiene solución porque $|\operatorname{sen} x| \leq 1$.

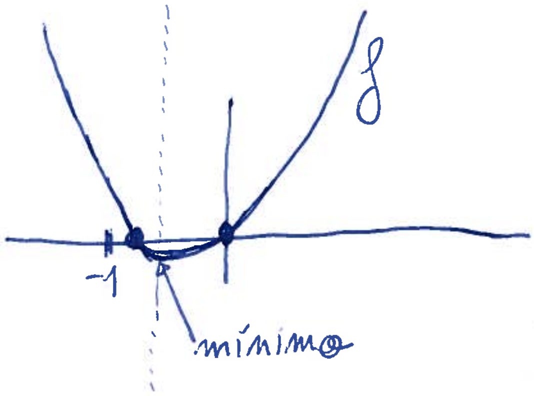
$\Rightarrow f''>0$ siempre $\Rightarrow f'$ creciente.

Como $\left.\begin{array}{l} f'(-1)=-2+\cos(-1)<0 \\ f'(0)=0+\cos 0=1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'$ se anula en el intervalo $(-1,0)$



Como

x	$y=f(x)$
$-\infty$	∞
-1	$1+\operatorname{sen}(-1)>0$
0	$0+\operatorname{sen} 0=0$
1	$1+\operatorname{sen} 1>0$



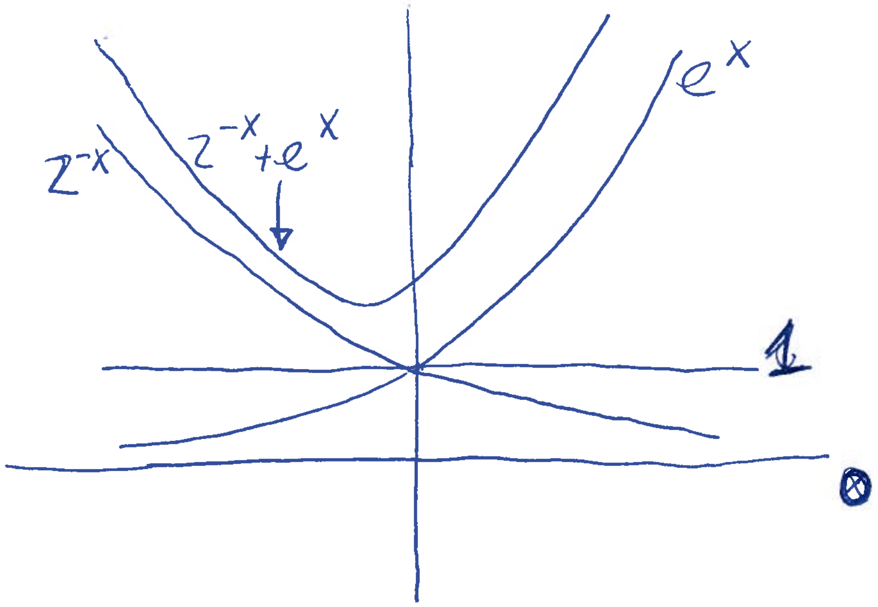
Luego tiene dos soluciones, una en $x=0$ y otra para algún x en el intervalo $(-1,0)$.

(2b) La ecuación no tiene soluciones.

Podemos demostrarlo fijándonos en que $f(x)=e^{x}+2^{-x}$ es mayor que e^{x} y que 2^{-x}.

Si $f(x)=1$, entonces
$$\left.\begin{array}{l} e^{x}<1 \Rightarrow x<0 \\ \qquad\text{y} \\ 2^{-x}<1 \Rightarrow x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no puede ser.}$$

También podemos verlo geométricamente:



$2^{-x}+e^{x}>1$ siempre.

Incluso podríamos ser más precisos, calculando la derivada de $f(x)=2^{-x}+e^{x}$ para ver que f tiene un único punto de mínimo en $x_0 = \frac{-\ln(1/\ln 2)}{(\ln 2)+1}$ y que $f(x_0)>1$.

(2c) El número de raíces es siempre 1.

Para verlo, es suficiente comprobar que la función $f(x) = 3x^3 + a^3 - a^2 x$ sólo corta al eje x en una ocasión.

Calculamos las zonas de crecimiento:

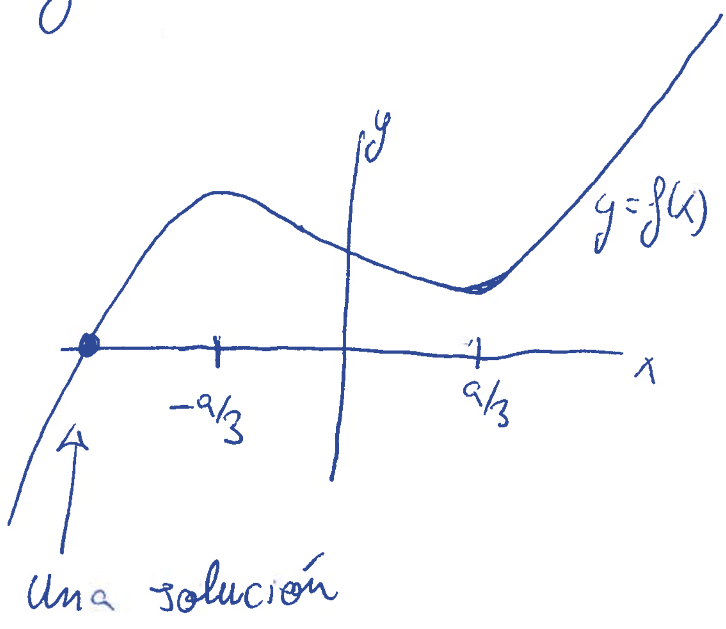
$$f'(x) = 9x^2 - a^2 \stackrel{?}{=} 0 \iff x = a/3 , \quad x = -a/3 .$$

f': $+$ en $(-\infty, -a/3)$, $-$ en $(-a/3, a/3)$, $+$ en $(a/3, \infty)$

f: creciente, decreciente, creciente (con cambios en $-a/3$ y $a/3$)

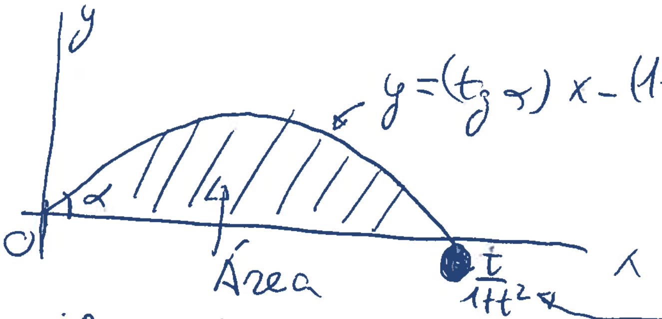
Luego $x = -a/3$ es un máximo y $x = a/3$ un mínimo.

x	$y = f(x)$
$-\infty$	$-\infty$
$-a/3$	$3\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a^3 - a^2\left(-\frac{a}{3}\right) = \frac{11}{9}a^3 > 0$
$a/3$	$3\left(a/3\right)^3 + a^3 - a^2\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{5}{9}a^3 > 0$
∞	∞



③ Debemos calcular α para que el área por debajo de la trayectoria sea máxima. Para ello vamos a calcular primero el área.

$$y=(\operatorname{tg}\alpha)\,x-(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,x^2 = tx-(1+t^2)x^2$$



Vamos a escribir $\operatorname{tg}\alpha = t$ para acortar.

Calculamos la distancia a la que cae la pelota:

$$0 = y = tx-(1+t^2)x^2 \Rightarrow x = \frac{t}{1+t^2}$$

Entonces,

$$\text{Área} = \int_0^{\frac{t}{1+t^2}} \left(tx-(1+t^2)x^2\right)dx =$$

integremos en x, luego t se comporta como constante

$$= t\frac{x^2}{2} - (1+t^2)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{t}{1+t^2}}$$

$$= \frac{t}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 - \frac{1+t^2}{3}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^3 = \frac{t^3}{(1+t^2)^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

Por tanto,

$$\text{Área} = \text{Área}(t) = \frac{1}{6}\frac{t^3}{(1+t^2)^2}.$$

El área depende del ángulo α (o de su tangente); para hallar el máximo derivamos

$$\frac{d\,\text{Área}}{dt} = \frac{1}{6}\frac{t^3}{(1+t^2)^2}\left[3\frac{1}{t} - 2\frac{2t}{1+t^2}\right] \overset{?}{=} 0 \iff \frac{3}{t} = \frac{4t}{1+t^2} \iff$$

$$\iff 3+3t^2 = 4t^2 \iff t=\sqrt{3} \quad \cancel{t=-\sqrt{3}}$$

luego $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ radianes } (60^\circ)}$.

distancia $= \frac{\sqrt{3}}{\ldots} = \sqrt{3}/4$

④ Vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\geq 0 \\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ y de sus derivadas.

En todas, el único punto problemático es el $x=0$, ya que x^3, 0 son polinomios.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^3=0^3=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 0=0$

$\Rightarrow f$ continua.

$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 3x^2=0$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 0=0$

$\Rightarrow f$ derivable

también podemos verlo directamente con la definición

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$\lim_{h\to 0^+}\frac{3h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}3h=0$

$\lim_{h\to 0^-}\frac{0-0}{h}=0$

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x\geq 0 \\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ → Como con f, vemos que f' es continua y derivable, y

$f''(x)=\begin{cases} 6x & x\geq 0 \\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ $\lim_{x\to 0^+} 6x=\lim_{x\to 0^-} 0=0 \Rightarrow f''$ continua

$\lim_{x\to 0^+} f'''(x)=6\neq 0=\lim_{x\to 0^-} f'''(x)$

$\Downarrow$

f'' no derivable en $x=0$

$f'''(x)=\begin{cases} 6 & x> 0 \\ 0 & x< 0\end{cases}$ f''' no definida en $x=0$
$\text{Dom } f'''=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$f^{IV}(x)=\begin{cases} 0 & x> 0 \\ 0 & x< 0\end{cases}$ $\text{Dom } f^{IV}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $f^{IV}=f^{V}=f^{VI}=\ldots$

f''', f^{IV}, f^{V}, ... son derivables en todo su dominio.

5

$$\int \frac{e^{2t}+4e^t}{e^{2t}+2e^t+2}\,dt \underset{\substack{\text{cambio}\\ x=e^t\\ \Updownarrow \\ t=\log x \\ dt=\frac{dx}{x}}}{\overset{\substack{e^{2t}=(e^t)^2\\ \downarrow}}{=}} \int \frac{x^2+4x}{x^2+2x+2}\,\frac{dx}{x} =$$

$$= \int \frac{x+4}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$(x^2+2x+2)' = 2x+2$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| + 3\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx =$$

x^2+2x+2 no ~~se anula~~ tiene raíces reales. Entonces, debemos escribirlo como

$$x^2+2x+2 = (x+a)^2+b^2$$
$$x^2+2x+2 = x^2+2ax+(a^2+b^2)$$
$$\Downarrow$$

luego

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \Leftarrow \begin{cases} 2 = 2a \\ 2 = a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b^2=1 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| + 3\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| + 3\,\operatorname{arctg}(x+1)$$

Deshaciendo el cambio

$$\boxed{\int \frac{e^{2t}+4e^t}{e^{2t}+2e^t+2}\,dt = \frac{1}{2}\log|e^{2t}+2e^t+2| + 3\,\operatorname{arctg}(e^t+1) + cte}$$

(5) $$\int \underbrace{x^3}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x \, dx}_{dv} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partes}}}{=} x^3(-\cos x) - \int 3x^2(-\cos x)\, dx =$$

$$\begin{cases} du = 3x^2\, dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$= -x^3 \cos x + \int \underbrace{3x^2}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partes}}}{=}$$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x - \int 6x \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + \int \underbrace{6x}_{u} \underbrace{(-\operatorname{sen} x)\, dx}_{dv} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partes}}}{=}$$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - \int 6 \cos x \, dx$$

luego

$$\boxed{\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + cte}$$