

EXAMEN CÁLCULO I - INF - 14 enero 2010

1

(a) - En $x \neq 1$ f es continua, porque es composición de funciones continuas.

- Para ver si es continua en $x=1$, hay que ~~decidir~~ decidir si los límites laterales coinciden.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |x| = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{\pi} \int_0^x \arcsen \sqrt{t} \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \arcsen \sqrt{t} \, dt.$$

Suego hay que ver si $\frac{4}{\pi} \int_0^1 \arcsen \sqrt{t} \, dt = 1.$

Para ello, calculemos

$$\int \arcsen \sqrt{t} \, dt \stackrel{f}{=} \int x \cdot 2 \sin x \cos x \, dx = \int x \sin 2x \, dx =$$

$$x = \arcsen \sqrt{t}$$



$$\sin x = \sqrt{t} \Leftrightarrow t = \sin^2 x$$

$$dt = 2 \sin x \cos x \, dx$$

$$\stackrel{f}{=} -x \frac{\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2}$$

Partes

$$u = x$$

$$\Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin 2x \, dx \Rightarrow v = -\frac{\cos 2x}{2}$$

(i)

y deshaciendo el cambio

$$\int \arcsen \sqrt{t} dt = -\frac{\cos(2 \arcsen \sqrt{t})}{2} \cdot \arcsen \sqrt{t} + \frac{\sin(2 \arcsen \sqrt{t})}{2},$$

luego

$$\int_0^1 \arcsen \sqrt{t} dt = -\frac{\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2})}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\pi}{4}$$

luego $\frac{4}{\pi} \int_0^1 \arcsen \sqrt{t} dt = 1$, y portanto

F es continua en todo punto.

(1b) Como $|x|$ es derivable en $x > 1$ y

$\frac{4}{\pi} \int_0^x \arcsen \sqrt{t} dt$ lo es para todo x (porque $\arcsen \sqrt{t}$ es continua), entonces $F(x)$ es derivable si $x \neq 1$. Para ver si es derivable en $x=1$, estudiamos las derivadas laterales:

$$F'_+(1) = \frac{d}{dx} |x| \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} x \Big|_{x=1} = 1.$$

$$F'_-(1) = \frac{d}{dx} \frac{4}{\pi} \int_0^x \arcsen \sqrt{t} dt \Big|_{x=1} = \frac{4}{\pi} \arcsen \sqrt{x} \Big|_{x=1} = \frac{4}{\pi} \arcsen 1 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 2.$$

Como $2 \neq 1 \Rightarrow F$ no derivable en $x=1$. (ii)

2a

$$\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int (2 \sin t)^2 (2 \cos t) (2 \cos t dt) =$$

$x = 2 \sin t$

$$dx = 2 \cos t dt$$

$$\sqrt{4-x^2} = 2 \cos t$$

$$= 2 \int 2 \sin^2 t \cos^2 t dt = 2 \int \sin^2 2t dt =$$

$$= 2 \int \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \int 1 - \cos 4t dt =$$

$$= t - \frac{\sin 4t}{4} = \arcsin \frac{x}{2} - \frac{\sin(4 \arcsin \frac{x}{2})}{4}$$

luego

$$\int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \left[\arcsin 1 - \frac{\sin(4 \arcsin 1)}{4} \right] - \left[\arcsin(-1) - \frac{\sin(4 \arcsin(-1))}{4} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

(iii)

(26) Primero factorizamos $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$.

Puede tener $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ como raíces enteras.

$P(2) = 8 - 4 - 16 + 12 = 0$, luego $x-2$ divide a $P(x)$.

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{) x-2} \\ x^2 + x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 8x + 12 \\ -x^2 + 2x \\ \hline -6x + 12 \\ 6x - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ahora $x^2 + x - 6 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array}$$

luego $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3)$.

Entonces

$$\frac{3x^2 - 10x + 18}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$x=2 \Rightarrow A = \frac{3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 18}{2+3} = \frac{12 - 20 + 18}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

$$x=-3 \Rightarrow C = \frac{3(-3)^2 - 10(-3) + 18}{(-3-2)^2} = \frac{27 + 30 + 18}{25} = \frac{75}{25} = 3.$$

$$x=\infty \Rightarrow 3 = B + C \Rightarrow B = 0.$$

por tanto

$$\frac{3x^2 - 10x + 18}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{3}{x+3}$$

luego

$$\int \frac{3x^2 - 10x + 18}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx = -\frac{2}{x-2} + 3 \ln|x+3|$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3x^2 - 10x + 18}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx &= \left(-\frac{2}{1-2} + 3 \ln 4 \right) - \left(-\frac{2}{-2} + 3 \ln 3 \right) \\ &= 1 + 3(\ln 4 - \ln 3) \\ &= 1 + 3 \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

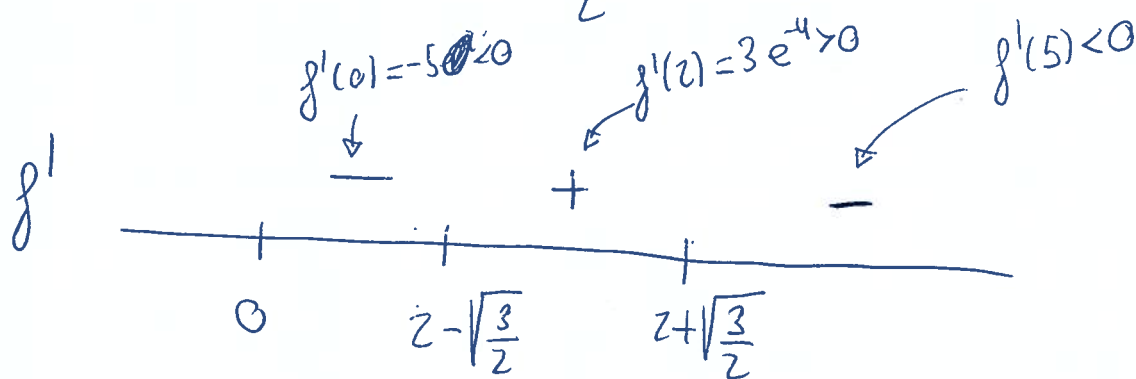


$$\begin{aligned}
 (3a) \quad f'(x) &= (2x-3)e^{-2x} + (x^2-3x+1)(-2e^{-2x}) \\
 &= (2x-3-2x^2+6x-2)e^{-2x} \\
 &= (-2x^2+8x-5)e^{-2x}
 \end{aligned}$$

luego $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2+8x-5=0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{-2 \cdot 2} = \frac{-8 \pm \sqrt{24}}{-4} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{6}}{-4} =$$

$$= 2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}.$$



luego f es decreciente en $[0, 2 - \sqrt{\frac{3}{2}})$ y $(2 + \sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$

f es creciente en $(2 - \sqrt{\frac{3}{2}}, 2 + \sqrt{\frac{3}{2}})$.

3b) Por el apartado anterior, f tiene un máximo local en $x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ y un mínimo local en $x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Para ver si son globales, evaluemos f en esos puntos y en los extremos:

$$f(0) = 1.$$

$$f\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)e^{-4 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}} < 0$$

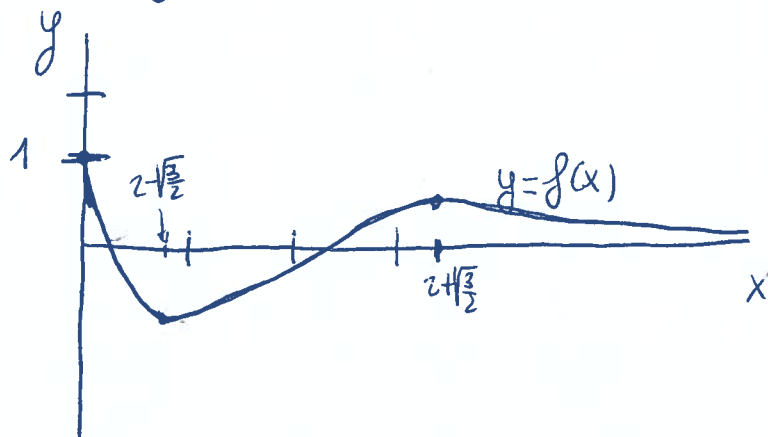
$$f\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)e^{-4 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}} < \frac{3}{2} - 1 < 1.$$

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Por tanto, f tiene máximo global en $x = 0$

f ~~no~~ tiene mínimo global en $x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3c) Con la información anterior:

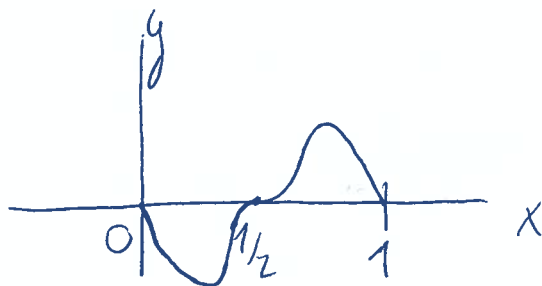


(4a) Falsa. Con $f(x) = \cos x$

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) \cos x dx = \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos^2 x dx > 0.$$

porque $\cos^2 x > 0$ si $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$.

(4b) Falsa. Tome $f(x)$ con una gráfica como esta:



En ese caso $x = \frac{1}{2}$ es un punto de inflexión.

Encontrar la fórmula para f es más difícil (pero no era necesario).

Por ejemplo, $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3 - 4(x - \frac{1}{2})^5$ funciona.

(4c) Falsa. Tome $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Es continua y derivable en $[0, \infty)$, es decreciente en $(2, \infty)$ ~~pero~~ ~~no~~ ~~p~~ y $f > 0$, pero no posee mínimo absoluto.

~~g(x) = 1/(1+x^2)~~